Logika w zastosowaniach kognitywistycznych

Wprowadzenie do logiki epistemicznej. Wybrane multimodalne logiki epistemiczne

(notatki do wykładów)

Andrzej Wiśniewski
Andrzej.Wisniewski@amu.edu.pl

wersja beta 1.4

Mówiąc ogólnie, ***multimodalna logika epistemiczna*** to taka, w której analizuje się więcej niż jedno nastawienie sądzeniowe (*propositional attitude*). Nieco uściślając: chodzi tutaj o więcej niż jedno „główne" nastawienie sądzeniowe – wprowadzenie do rozważań dualnej modalności epistemicznej (np. $\mathbf{P}$ w przypadku $\mathbf{C}$, czy $\mathbf{M}$ w przypadku $\mathbf{K}$) nie czyni jeszcze z logiki epistemicznej logiki multimodalnej.

Budując multimodalną logikę epistemiczną, mamy do wyboru dwie strategie:

1) definiujemy pewne „nowe" modalności epistemiczne w terminach uprzednio scharakteryzowanych modalności epistemicznych, nie przyjmując żadnych aksjomatów specyficznych charakteryzujących „nowe" modalności, lub
2) obok aksjomatów charakteryzujących podstawowe własności poszczególnych modalności epistemicznych przyjmujemy też pewne aksjomaty charakteryzujące związki między analizowanymi modalnościami epistemicznymi.

Zajmijmy się na początek strategią pierwszą.

Wiedza jako całkowite przekonanie będące prawdą

I. Weźmy logikę przekonań **KDE4** (przypominam, że „główną" modalnością epistemiczną jest tutaj $\mathbf{C}$ – całkowite przekonanie) i zdefiniujmy operator wiedzy $\mathbf{K}^*$ tak:

$$\mathbf{K}^*A \leftrightarrow_{\text{df.}} \mathbf{C}A \wedge A,$$

natomiast dualny do $\mathbf{K}^*$ operator $\mathbf{M}^*$ tak:

$$\mathbf{M}^*A \leftrightarrow_{\text{df.}} \neg\mathbf{K}^*\neg A$$

nie przyjmując jednak żadnych aksjomatów specyficznych charakteryzujących – nawet cząstkowo – operator $\mathbf{K}^*$.

Formalnie rzecz biorąc, znaczyć to <u>może</u>, że rozszerzamy **KDE4** poprzez następującą modyfikację reguły zastępowania:

RZ*: *Z formuły B można wyprowadzić formułę powstającą z B w ten sposób, że podformułę formuły B występującą na danym miejscu w formule B zastąpimy na tym miejscu formułą odpowiadającą jej na mocy następujących równości definicyjnych:*

$$\mathbf{P}A =_{\text{df.}} \neg\mathbf{C}\neg A$$

$$\mathbf{K}^*A =_{\text{df.}} \mathbf{C}A \wedge A$$

$$\mathbf{M}^*A =_{\text{df.}} \neg\mathbf{C}\neg A \vee A$$

Symbolicznie możemy to zapisać tak:

$$\frac{B}{B[\neg\mathbf{C}\neg A \,//\, \mathbf{P}A]} \qquad \frac{B}{B[\mathbf{C}A \wedge A \,//\, \mathbf{K}^*A]} \qquad \frac{B}{B[\neg\mathbf{C}\neg A \vee A \,//\, \mathbf{M}^*A]}$$

Pytanie, które warto teraz zadać, brzmi: *jakie własności ma tak określony operator wiedzy* $\mathbf{K}^*$?

Otóż tezami będą, przykładowo:

(a) $\mathbf{K}^*(p \to q) \to (\mathbf{K}^*p \to \mathbf{K}^*q)$

(b) $\mathbf{K}^*p \to p$

(c) $\mathbf{K}^*p \to \mathbf{K}^*\mathbf{K}^*p$

ad.(a). Oto dowód (pomijam skądinąd oczywiste informacje dowodowe:)

1. $\mathbf{C}(p \to q) \to (\mathbf{C}p \to \mathbf{C}q)$
2. $(\mathbf{C}(p \to q) \wedge (p \to q)) \to ((\mathbf{C}p \to \mathbf{C}q) \wedge (p \to q))$
3. $\mathbf{K}^*(p \to q) \to ((\mathbf{C}p \to \mathbf{C}q) \wedge (p \to q))$
4. $((\mathbf{C}p \to \mathbf{C}q) \wedge (p \to q)) \to (\mathbf{C}p \wedge p \to \mathbf{C}q \wedge q)$
5. $\mathbf{K}^*(p \to q) \to (\mathbf{C}p \wedge p \to \mathbf{C}q \wedge q)$
6. $\mathbf{K}^*(p \to q) \to (\mathbf{K}^*p \to \mathbf{C}q \wedge q)$
7. $\mathbf{K}^*(p \to q) \to (\mathbf{K}^*p \to \mathbf{K}^*q)$

ad.(b). Dowód:

1. $\mathbf{C}p \wedge p \rightarrow p$
2. $\mathbf{K}^*p \rightarrow p$

ad.(c). Dowód:

1. $\mathbf{C}p \rightarrow \mathbf{CC}p$
2. $(\mathbf{C}p \rightarrow \mathbf{CC}p) \rightarrow (\mathbf{C}p \wedge p \rightarrow (\mathbf{CC}p \wedge \mathbf{C}p) \wedge (\mathbf{C}p \wedge p))$
3. $\mathbf{C}p \wedge p \rightarrow (\mathbf{CC}p \wedge \mathbf{C}p) \wedge (\mathbf{C}p \wedge p)$
4. $\mathbf{K}^*p \rightarrow (\mathbf{CC}p \wedge \mathbf{C}p) \wedge \mathbf{K}^*p$
5. $\mathbf{C}r \wedge \mathbf{C}q \rightarrow \mathbf{C}(r \wedge q)$
6. $\mathbf{CC}p \wedge \mathbf{C}p \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{C}p \wedge p)$
7. $(\mathbf{CC}p \wedge \mathbf{C}p \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{C}p \wedge p)) \rightarrow ((\mathbf{CC}p \wedge \mathbf{C}p) \wedge \mathbf{K}^*p \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{C}p \wedge p) \wedge \mathbf{K}^*p)$
8. $(\mathbf{CC}p \wedge \mathbf{C}p) \wedge \mathbf{K}^*p \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{C}p \wedge p) \wedge \mathbf{K}^*p$
9. $\mathbf{K}^*p \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{C}p \wedge p) \wedge \mathbf{K}^*p$
10. $\mathbf{K}^*p \rightarrow \mathbf{CK}^*p \wedge \mathbf{K}^*p$
11. $\mathbf{K}^*p \rightarrow \mathbf{K}^*\mathbf{K}^*p$

W rozważanym epistemicznym rachunku multimodalnym mamy regułę wtórną:

$$\frac{A}{\mathbf{K}^*A}$$

albowiem standardowe „przejście” od A do $\mathbf{K}^*A$ wygląda następująco:

$$\begin{gathered}
\ldots \\
A \\
\mathbf{C}A \\
A \to (\mathbf{C}A \to \mathbf{C}A \wedge A) \\
\mathbf{C}A \to \mathbf{C}A \wedge A \\
\mathbf{C}A \wedge A \\
\mathbf{K}^*A \\
\ldots.
\end{gathered}$$

Natomiast tezą budowanego rachunku nie będzie:

$$\neg \mathbf{K}^* p \to \mathbf{K}^* \neg \mathbf{K}^* p$$

co można sprawdzić np. badając metodą tabel analitycznych odpowiednik powyższej formuły, *viz*.:

$$\neg(\mathbf{C}p \wedge p) \to \mathbf{C}(\neg(\mathbf{C}p \wedge p)) \wedge \neg(\mathbf{C}p \wedge p)$$

Tezą jednak będzie:

$$p \wedge \neg \mathbf{K}^* \neg \mathbf{K}^* p \to \mathbf{K}^* p$$

co pokazuje, że „logiką wiedzy” budowanego rachunku jest ***S4.4***.

A oto dowód powyższej tezy:

1. $\mathbf{C}p \wedge p \to \mathbf{C}p \wedge p$
2. $\mathbf{C}p \wedge p \to \mathbf{K}^* p$
3. $(\mathbf{C}p \wedge p \to \mathbf{K}^* p) \to (p \wedge \neg \mathbf{K}^* p \to \neg \mathbf{C}p)$
4. $p \wedge \neg \mathbf{K}^* p \to \neg \mathbf{C}p$
5. $\neg \mathbf{C}p \to \mathbf{C}\neg \mathbf{C}p$

6. $p \wedge \neg \mathbf{K}^* p \to \mathbf{C}\neg\mathbf{C}p$

7. $\mathbf{K}^* p \to \mathbf{C}p \wedge p$

8. $\mathbf{C}p \wedge p \to \mathbf{C}p$

9. $\mathbf{K}^* p \to \mathbf{C}p$

10. $(\mathbf{K}^* p \to \mathbf{C}p) \to (\neg\mathbf{C}p \to \neg\mathbf{K}^* p)$

11. $\neg\mathbf{C}p \to \neg\mathbf{K}^* p$

12. $\mathbf{C}\neg\mathbf{C}p \to \mathbf{C}\neg\mathbf{K}^* p$

13. $p \wedge \neg\mathbf{K}^* p \to \mathbf{C}\neg\mathbf{K}^* p$

14. $(p \wedge \neg\mathbf{K}^* p \to \mathbf{C}\neg\mathbf{K}^* p) \to (p \wedge \neg\mathbf{K}^* p \to \mathbf{C}\neg\mathbf{K}^* p \wedge \neg\mathbf{K}^* p)$

15. $p \wedge \neg\mathbf{K}^* p \to \mathbf{C}\neg\mathbf{K}^* p \wedge \neg\mathbf{K}^* p$

16. $p \wedge \neg\mathbf{K}^* p \to \mathbf{K}^*\neg\mathbf{K}^* p$

17. $(p \wedge \neg\mathbf{K}^* p \to \mathbf{K}^*\neg\mathbf{K}^* p) \to (p \wedge \neg\mathbf{K}^*\neg\mathbf{K}^* p \to \mathbf{K}^* p)$

24. $p \wedge \neg\mathbf{K}^*\neg\mathbf{K}^* p \to \mathbf{K}^* p$

Odnotujmy jeszcze dwie interesujące tezy omawianej logiki.

$$\mathbf{CC}p \leftrightarrow \mathbf{CK}^*p$$

Sens intuicyjny powyższej tezy można wyrazić następująco: całkowite przekonanie i wiedza są subiektywnie nieodróżnialne.

Dowód:

1. $\mathbf{C}p \rightarrow \neg\mathbf{C}\neg p$
2. $\mathbf{CC}p \rightarrow \neg\mathbf{C}\neg\mathbf{C}p$
3. $\neg\mathbf{C}p \rightarrow \mathbf{C}\neg\mathbf{C}p$
4. $(\neg\mathbf{C}p \rightarrow \mathbf{C}\neg\mathbf{C}p) \rightarrow (\neg\mathbf{C}\neg\mathbf{C}p \rightarrow \mathbf{C}p)$
5. $\neg\mathbf{C}\neg\mathbf{C}p \rightarrow \mathbf{C}p$
6. $\mathbf{CC}p \rightarrow \mathbf{C}p$
7. $(\mathbf{CC}p \rightarrow \mathbf{C}p) \rightarrow (\mathbf{CC}p \rightarrow \mathbf{CC}p \wedge \mathbf{C}p)$
8. $\mathbf{CC}p \rightarrow \mathbf{CC}p \wedge \mathbf{C}p$
9. $\mathbf{C}q \wedge \mathbf{C}r \rightarrow \mathbf{C}(q \wedge r)$
10. $\mathbf{CC}p \wedge \mathbf{C}p \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{C}p \wedge p)$

11. $\mathbf{CC}p \wedge \mathbf{C}p \to \mathbf{CK}^*p$
12. $\mathbf{CC}p \to \mathbf{CK}^*p$
13. $\mathbf{C}p \wedge p \to \mathbf{C}p$
14. $\mathbf{K}^*p \to \mathbf{C}p$
15. $\mathbf{CK}^*p \to \mathbf{CC}p$
16. $\mathbf{CC}p \leftrightarrow \mathbf{CK}^*p$

Kolejna teza to:

$$\mathbf{M}^*p \leftrightarrow \mathbf{P}p \vee p$$

Dowód:

1. $\neg\mathbf{C}\neg p \vee p \leftrightarrow \neg\mathbf{C}\neg p \vee p$
2. $\mathbf{M}^*p \leftrightarrow \neg\mathbf{C}\neg p \vee p$
3. $\mathbf{M}^*p \leftrightarrow \mathbf{P}p \vee p$

Sens intuicyjny jest następujący: *p* nie jest wykluczone przez (wyidealizowany) podmiot epistemiczny wtedy i tylko wtedy, gdy podmiot ten myśli, że jest możliwe, że *p* <u>lub</u> (po prostu) jest tak, że *p*.

Wynika stąd, że podmiot nie wyklucza niczego, co jest faktem. Co jest zaiste daleko idącą idealizacją :)

Komentarz dotyczący semantyki oraz stosowalności metody tabel analitycznych – zapraszam na wykład :)

Wiedza obiektywna jako racjonalne przekonanie

II. Kolejną znaną multimodalną logikę epistemiczną otrzymujemy – mówiąc najogólniej – następująco.

Przyjmujemy **KDE4** jako logikę przekonań oraz ***S5*** jako „pomocniczą” logikę wiedzy. Operator wiedzy $\mathbf{K}^{**}$ definiujemy natomiast tak:

$$\mathbf{K}^{**}A \leftrightarrow_{\text{df.}} \mathbf{K}A \wedge \mathbf{C}A$$

gdzie $\mathbf{K}$ jest operatorem wiedzy charakteryzowanym przez (epistemiczną) ***S5***, natomiast $\mathbf{C}$ jest operatorem przekonania charakteryzowanym przez **KDE4**.

Typ wiedzy analizowany przez tę logikę nosi nazwę *rationally believed objective knowledge*.

Modalność dualną do $\mathbf{K}^{**}$ definiujemy rzecz jasna następująco:

$$\mathbf{M}^{**}A \leftrightarrow_{\text{df.}} \neg\mathbf{K}^{**}\neg A\ .$$

Patrząc od strony formalnej, aksjomatami analizowanej logiki są aksjomaty rachunku całkowitych przekonań **KDE4** oraz (epistemicznej) logiki ***S5***. Pierwotnymi regułami inferencyjnymi są: reguła odrywania, reguła podstawiania, dwie (*sic*!) reguły Gödla:

$$\frac{A}{\mathbf{C}A} \qquad\qquad \frac{A}{\mathbf{K}A}$$

oraz reguła zastępowania „rozszerzona” o następujące przypadki:

$$\frac{B}{B[\mathbf{K}A \wedge \mathbf{C}A \,//\, \mathbf{K}^{**}A]} \qquad\qquad \frac{B}{B[\neg\mathbf{K}\neg A \vee \neg\mathbf{C}\neg A \,//\, \mathbf{M}^{**}A]}$$

Można pokazać, że tezami rozważanej logiki są:

(a) $\mathbf{K}^{**}(p \to q) \to (\mathbf{K}^{**}p \to \mathbf{K}^{**}q)$

(b) $\mathbf{K}^{**}p \to p$

(c) $\mathbf{K}^{**}p \to \mathbf{K}^{**}\mathbf{K}^{**}p$

(d)[1] $\mathbf{M}^{**}p \wedge \mathbf{M}^{**}\mathbf{K}^{**}q \to \mathbf{K}^{**}(\mathbf{M}^{**}p \vee q)$

oraz że dla $\mathbf{K}^{**}$ obowiązuje odpowiednik reguły Gödla:

$$\frac{A}{\mathbf{K}^{**}A}$$

jako że możemy zawsze rozumować tak:

[1] (Logicznie) równoważna formule:

$$\neg\mathbf{K}^{**}\neg p \wedge \neg\mathbf{K}^{**}\neg\mathbf{K}^{**}q \to \mathbf{K}^{**}(\neg\mathbf{K}^{**}\neg p \vee q)$$

oraz formule:

$$\neg\mathbf{K}^{**}(\neg\mathbf{K}^{**}\neg p \vee q) \to \mathbf{K}^{**}\neg p \vee \mathbf{K}^{**}\neg\mathbf{K}^{**}q.$$

$$\ldots$$

$$A$$

$$\mathbf{K}A$$

$$\mathbf{C}A$$

$$A \rightarrow (\mathbf{K}A \rightarrow (\mathbf{C}A \rightarrow \mathbf{K}A \wedge \mathbf{C}A))$$

$$\mathbf{K}A \rightarrow (\mathbf{C}A \rightarrow \mathbf{K}A \wedge \mathbf{C}A)$$

$$\mathbf{C}A \rightarrow \mathbf{K}A \wedge \mathbf{C}A$$

$$\mathbf{K}A \wedge \mathbf{C}A$$

$$\mathbf{K}^{**}A$$

$$\ldots$$

W efekcie „logiką wiedzy” rozważanej epistemicznej logiki multimodalnej jest logika znana w literaturze przedmiotu pod nazwą ***S4F***, „silniejsza” od ***S4***, ale „słabsza” od ***S5***.

Tezami są m.in. formuły:

$$\mathbf{M}^{**}p \leftrightarrow \neg\mathbf{K}\neg p \vee \neg\mathbf{C}\neg p$$

$$\mathbf{M}^{**}p \leftrightarrow \mathbf{M}p \vee \mathbf{P}p$$

Tezą analizowanej logiki <u>nie</u> jest natomiast formuła:

$$\neg\mathbf{K}^{**}p \rightarrow \mathbf{K}^{**}\neg\mathbf{K}^{**}p$$

równoważna rzecz jasna formułom:

$$\mathbf{M}^{**}\neg p \rightarrow \mathbf{K}^{**}\mathbf{M}^{**}\neg p$$

$$\mathbf{M}\neg p \vee \mathbf{P}\neg p \rightarrow \mathbf{K}(\mathbf{M}\neg p \vee \mathbf{P}\neg p) \wedge \mathbf{C}(\mathbf{M}\neg p \vee \mathbf{P}\neg p).$$

Komentarze: zapraszam na wykład :)

***

Strategia II

Jak pamiętamy, druga ze strategii budowania epistemicznej logiki multimodalnej polega na przyjmowaniu, oprócz aksjomatów/ charakterystyk „podstawowych" operatorów epistemicznych, również pewnych aksjomatów/ postulatów charakteryzujących związki miedzy nimi.

Ponieważ będziemy teraz mówić o konstrukcjach łączących wiedzę i przekonania, użyjemy liter $\mathbb{K}$ *oraz* $\mathbb{B}$ *jako swoistych zmiennych odnoszących się do operatorów wiedzy i przekonania. Swoistych w tym sensie, że znaczenie tych operatorów będzie każdorazowo określane w omawianych systemach.*

Logika Krausa i Lehmana

Zacznijmy od (jednopodmiotowego) fragmentu logiki zaproponowanej przez Krausa i Lehmanna. [2]

Aksjomaty specyficzne są następujące:

(**K**$_{\mathbb{K}}$) $\mathbb{K}(p \rightarrow q) \rightarrow (\mathbb{K}p \rightarrow \mathbb{K}q)$

(**T**$_{\mathbb{K}}$) $\mathbb{K}p \rightarrow p$

(**5**$_{\mathbb{K}}$) $\neg\mathbb{K}p \rightarrow \mathbb{K}\neg\mathbb{K}p$

(**K**$_{\mathbb{B}}$) $\mathbb{B}(p \rightarrow q) \rightarrow (\mathbb{B}p \rightarrow \mathbb{B}q)$

(**D**$_{\mathbb{B}}$) $\mathbb{B}p \rightarrow \neg\mathbb{B}\neg p$

($\mathbb{KB}$1) $\mathbb{K}p \rightarrow \mathbb{B}p$

($\mathbb{KB}$2) $\mathbb{B}p \rightarrow \mathbb{KB}p$

Pierwotnymi regułami inferencyjnymi są reguła odrywania, reguła podstawiania oraz reguła Gödla dla $\mathbb{K}$.

---

[2] Prezentacja nasza będzie nieznacznie odbiegać od oryginału; „jednopodmiotowego" znaczy tutaj tyle, iż w przedstawianym systemie uwzględnimy tylko jeden operator przekonania i jeden operator wiedzy, domyślnie – dotyczący tego samego (wyidealizowanego) podmiotu epistemicznego. Oryginalna logika Krausa i Lehmana jest wielopodmiotową (*multiagent*) logiką epistemiczną, charakteryzującą też przekonania dzielone przez grupę podmiotów (*common beliefs*) oraz wiedzę dzieloną przez grupę (*common knowledge*). O takich logikach epistemicznych powiemy nieco więcej na następnym wykładzie.

Komentarz: zapraszam na wykład :)

Aksjomaty:

(𝕂𝔹1) $\mathbb{K}p \to \mathbb{B}p$

(𝕂𝔹2) $\mathbb{B}p \to \mathbb{K}\mathbb{B}p$

zdają się wyrażać podstawowe intuicyjne związki łączące wiedzę i przekonanie. Przyjęcie aksjomatu 𝕂𝔹1 prowadzi jednak do powstania dość nieoczekiwanych kłopotów. Otóż dowodliwe stają się następujące zależności:

(1) $\mathbb{B}\mathbb{K}p \to \mathbb{K}p$

(jeśli podmiot jest przekonany, że wie, że *p*, to podmiot wie, że *p*) oraz, co gorsza:

(2) $\mathbb{B}\mathbb{K}p \to p$

(jeśli podmiot jest przekonany, że wie, że *p*, to jest tak, że *p*; *one cannot believe to know a false proposition*).

Aby zlokalizować źródło trudności, prześledźmy dowody.

Teza: $\mathbb{B}\mathbb{K}p \to \mathbb{K}p$

1. $\mathbb{K}p \to \mathbb{B}p$ (*aksjomat* $\mathbb{K}\mathbb{B}$1)
2. $\mathbb{K}\neg\mathbb{K}p \to \mathbb{B}\neg\mathbb{K}p$ (1 **RP**: $p/\neg\mathbb{K}p$)
3. $\mathbb{B}p \to \neg\mathbb{B}\neg p$ (*aksjomat* $\mathbf{D}_{\mathbb{B}}$)
4. $(\mathbb{B}p \to \neg\mathbb{B}\neg p) \to (\mathbb{B}\neg p \to \neg\mathbb{B}p)$ (*aksjomat r-z*)
5. $\mathbb{B}\neg p \to \neg\mathbb{B}p$ (4, 3 **RO**)
6. $\mathbb{B}\neg\mathbb{K}p \to \neg\mathbb{B}\mathbb{K}p$ (5 **RP**: $p/\mathbb{K}p$)
7. $\neg\mathbb{K}p \to \mathbb{K}\neg\mathbb{K}p$ (aksjomat $\mathbf{5}_{\mathbb{K}}$)
8. $\neg\mathbb{K}p \to \mathbb{B}\neg\mathbb{K}p$ (7, 2 **RSH**)
9. $\neg\mathbb{K}p \to \neg\mathbb{B}\mathbb{K}p$ (8, 6 **RSH**)
10. $(\neg\mathbb{K}p \to \neg\mathbb{B}\mathbb{K}p) \to (\mathbb{B}\mathbb{K}p \to \mathbb{K}p)$ (*aksjomat r-z*)
11. $\mathbb{B}\mathbb{K}p \to \mathbb{K}p$ (10, 9 **RO**)

Teza: $\mathbb{B}\mathbb{K}p \rightarrow p$

1. $\mathbb{B}\mathbb{K}p \rightarrow \mathbb{K}p$ (*teza udowodniona*)
2. $\mathbb{K}p \rightarrow p$ (*aksjomat* $\mathbf{T}_{\mathbb{K}}$)
3. $\mathbb{B}\mathbb{K}p \rightarrow p$ (1, 2 **RSH**)

W przedstawionych dowodach użyto następujących aksjomatów specyficznych:

$\mathbb{K}p \rightarrow \mathbb{B}p$ (*aksjomat* $\mathbb{K}\mathbb{B}1$)

$\mathbb{B}p \rightarrow \neg\mathbb{B}\neg p$ (*aksjomat* $\mathbf{D}_{\mathbb{B}}$)

$\neg\mathbb{K}p \rightarrow \mathbb{K}\neg\mathbb{K}p$ (aksjomat $\mathbf{5}_{\mathbb{K}}$)

$\mathbb{K}p \rightarrow p$ (*aksjomat* $\mathbf{T}_{\mathbb{K}}$)

Aby „zablokować" pojawianie się niepożądanych konsekwencji, możemy zatem albo nie przyjmować jakiegoś spośród powyższych aksjomatów, albo zmienić pierwotne reguły inferencyjne. Rezygnacja z aksjomatu $\mathbf{T}_{\mathbb{K}}$ nie wchodzi jednak w grę, z oczywistych powodów.

Logika Voorbraaka

W multimodalnej logice epistemicznej Voorbraaka zakwestionowaniu ulega aksjomat $\mathbb{KB}1$. Aksjomaty specyficzne dla operatora przekonań $\mathbb{B}$ są prawie takie same, jak w logice przekonań **KDE** (z tym, że aksjomat **D** wyraża się bez użycia operatora dualnego, a zamiast formuły **E** wykorzystuje się równoważną formułę **5**), *viz.*:

($\mathbf{K}_{\mathbb{B}}$) $\mathbb{B}(p \to q) \to (\mathbb{B}p \to \mathbb{B}q)$

($\mathbf{D}_{\mathbb{B}}$) $\mathbb{B}p \to \neg\mathbb{B}\neg p$

($\mathbf{5}_{\mathbb{B}}$) $\neg\mathbb{B}p \to \mathbb{B}\neg\mathbb{B}p$

Natomiast aksjomaty dla funktora wiedzy $\mathbb{K}$ są takie same, jak w epistemicznej ***S5***:

($\mathbf{K}_{\mathbb{K}}$) $\mathbb{K}(p \to q) \to (\mathbb{K}p \to \mathbb{K}q)$

($\mathbf{T}_{\mathbb{K}}$) $\mathbb{K}p \to p$

($\mathbf{5}_{\mathbb{K}}$) $\neg\mathbb{K}p \to \mathbb{K}\neg\mathbb{K}p$

Ponadto przyjmuje się aksjomaty charakteryzujące związki między $\mathbb{K}$ a $\mathbb{B}$:

(KB2) $\mathbb{B}p \to \mathbb{K}\mathbb{B}p$

(KB3) $\mathbb{B}p \to \mathbb{B}\mathbb{K}p$

Pierwotne reguły inferencyjne to odrywanie, podstawianie oraz reguły Gödla dla $\mathbb{K}$ oraz $\mathbb{B}$.

Zakwestionowanie aksjomatu:

(KB1) $\mathbb{K}p \to \mathbb{B}p$

jest jednak zerwaniem z długą filozoficzną tradycją myślenia o wiedzy i przekonaniach. Voorbraak jest tego świadomy; twierdzi on, że charakteryzowane w jego logice pojecie wiedzy jest „obiektywne” w tym sensie, że dotyczy ono dowolnego podmiotu (*agent*) zdolnego do przetwarzania informacji niezależnie od tego, czy można mu przypisać świadome przekonania.

Rozwiązania Williamsona i Halperna

Williamson proponuje odrzucenie aksjomatu $\mathbf{5}_{\mathbb{K}}$ przy jednoczesnym zachowaniu aksjomatów:

(𝕂𝔹1) $\mathbb{K}p \to \mathbb{B}p$

(𝕂𝔹3) $\mathbb{B}p \to \mathbb{B}\mathbb{K}p$

Co ciekawe, do znanych zarzutów pod adresem przyjmowania aksjomatu negatywnej introspekcji dla wiedzy:

($\mathbf{5}_{\mathbb{K}}$) $\neg\mathbb{K}p \to \mathbb{K}\neg\mathbb{K}p$

dodaje on oryginalny argument związany z konsekwencjami występowania zasady negatywnej introspekcji (dla operatora wiedzy) w epistemicznej logice multimodalnej. Jest to zarzut następujący: formuła

(3) $\mathbb{B}p \to p$

staje się wyprowadzalna wówczas, gdy w charakterze przesłanek przyjmiemy (jednocześnie) aksjomaty 𝕂𝔹1, 𝕂𝔹3, $\mathbf{D}_{\mathbb{B}}$, $\mathbf{T}_{\mathbb{K}}$ oraz $\mathbf{5}_{\mathbb{K}}$.[3]
Z drugiej strony, przekonanie, że *p* z pewnością nie powinno implikować, że (jest tak, że) *p* !

[3] Dowód odtworzymy sobie na konwersatorium :)

Halpern podaje inne rozwiązanie.

Dowodząc tezy $\mathbb{BK}p \to \mathbb{K}p$, dokonujemy podstawienia w aksjomacie $\mathbb{KB}$1, *viz*.:

2. $\mathbb{K}\neg\mathbb{K}p \to \mathbb{B}\neg\mathbb{K}p$ (1 **RP**: $p/\neg\mathbb{K}p$)

przy czym jest to podstawienie formuły modalnej/ wyrażającej nastawienie sądzeniowe za zmienną zdaniową.

Modyfikując logikę tak, aby tego rodzaju podstawienia nie były dopuszczalne, możemy zbudować multimodalną logikę epistemiczną, w której operator przekonania $\mathbb{B}$ jest rozumiany zgodnie z logiką **KDE4**/**KD45**, operator wiedzy $\mathbb{K}$ zgodnie z ***S5*** i w której obowiązuje aksjomat $\mathbb{KB}$1. Tezami tej logiki <u>nie będą</u> natomiast paradoksalne formuły (1), (2) i (3).

Patrząc od strony formalnej, rozwiązanie polega albo na nałożeniu odpowiednich ograniczeń na regułę podstawiania (gdy aksjomaty są formułami, a nie schematami formuł), albo (w przeciwnym przypadku) na przyjęciu, że $\mathbb{KB}$1-aksjomatami są wyłącznie formuły postaci $\mathbb{K}\phi \to \mathbb{B}\phi$, gdzie ϕ nie zawiera żadnego operatora epistemicznego.

Odrzucenie aksjomatu $\mathbf{D}_{\mathbb{B}}$

W derywacji rodzącej paradoksalne konsekwencje tezy:

$$\mathbb{B}\mathbb{K}p \to \mathbb{K}p$$

użyto też aksjomatu $\mathbf{D}_{\mathbb{B}}$:

$$\mathbb{B}p \to \neg\mathbb{B}\neg p$$

Tak więc rezygnacja z aksjomatu $\mathbf{D}_{\mathbb{B}}$ również „blokuje” pojawienie się paradoksalnych konsekwencji (1), (2) i (3) w epistemicznej logice multimodalnej.

Taki krok ma jednak daleko idące następstwa. Zauważmy, że formuła $\mathbf{D}_{\mathbb{B}}$ jest logicznie równoważna formule:

(5) $\neg(\mathbb{B}p \wedge \mathbb{B}\neg p)$

wyrażającej fakt, że (wyidealizowany) podmiot epistemiczny nigdy nie jest jednocześnie przekonany do jakiegoś sądu i jego negacji.

Komentarz: zapraszam na wykład :)

Uwaga końcowa. Zasada negatywnej introspekcji dla wiedzy:

$$\neg\mathbb{K}p \to \mathbb{K}\neg\mathbb{K}p$$

nie obowiązuje w przedstawionych na tym wykładzie multimodalnych logikach epistemicznych budowanych zgodnie ze strategią pierwszą (tj. gdy $\mathbb{K} = \mathbf{K}^*$ lub $\mathbb{K} = \mathbf{K}^{**}$). W konsekwencji rodząca paradoksalne konsekwencje formuła:

$$\mathbb{B}\mathbb{K}p \to \mathbb{K}p$$

nie jest tezą tych logik. Z drugiej strony, są w nich dowodliwe formuły podpadające pod schemat:

(𝕂𝔹1) $\mathbb{K}p \to \mathbb{B}p$

gdzie $\mathbb{B}$ ma postać $\mathbf{C}$.