Andrzej Wiśniewski

Logika I

Materiały do wykładu dla studentów kognitywistyki

Wykład 1. **Wprowadzenie do rachunku zbiorów**

Uwaga 1.1. W teorii mnogości mówimy o zbiorach w sensie dystrybutywnym; rachunek zbiorów jest fragmentem **teorii mnogości.**

Pojęcia „bycia zbiorem” oraz „należenia do zbioru” są pojęciami pierwotnymi; nie są one (wprost) definiowane, lecz ich sens określają łącznie aksjomaty teorii mnogości.

Piszemy:

Zbiór(x)	dla wyrażenia tego, że x jest zbiorem,
$x \in A$	dla wyrażenia tego, że (przedmiot, obiekt, indywiduum) x należy do zbioru A.

Gdy $x \in A$, mówimy też, że x *jest elementem* zbioru A.

Uwaga 1.2. Rozróżnienie między indywiduami a zbiorami nie ma charakteru absolutnego. W szczególności, zbiory mogą być elementami (należeć do) innych zbiorów.

Mamy dwa podstawowe sposoby określania zbioru:

1. **sporządzenie listy elementów określanego zbioru.**

Notacja: $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ oznacza zbiór, którego elementami są obiekty $a_1, a_2, ..., a_n$ i żadne inne.

$\{a\}$ oznacza zbiór, którego jedynym elementem jest obiekt a (zbiór tego rodzaju nazywamy *zbiorem jednostkowym* lub *singletonem*).

Przykład 1.1. {Zielona Góra, Gorzów Wielkopolski}

Przykład 1.2. $\{1, 3, 5, 7\}$

Przykład 1.3. $\{1, 3, \{5, 7\}\}$

Dygresja 1.1. Zbiór $\{1, 3, 5, 7\}$ ma cztery elementy, natomiast zbiór $\{1, 3, \{5, 7\}\}$ ma trzy elementy. Dlaczego?

Uwaga 1.3: Elementy listy powinny desygnować różne obiekty. Gdy, przykładowo, napiszemy $\{1, 2, 1\}$, jest to – używając eufemizmu - pretensjonalny opis zbioru $\{1, 2\}$.

2. **podanie warunku, który spełniają te i tylko te obiekty, które są elementami określanego zbioru.**

Notacja: $\{x : \Phi(x)\}$ oznacza zbiór wszystkich x-ów takich, że $\Phi(x)$

Przykład 1.4. $\{x : x$ jest studentem 1-go roku kognitywistyki$\}$

- *zbiór wszystkich studentów 1-go roku kognitywistyki*

Przykład 1.5. $\{x : x$ jest liczbą naturalną i x jest podzielne przez 2$\}$

- *zbiór wszystkich liczb naturalnych parzystych*

Przykład 1.6. $\{x : x$ jest mężczyzną w ciele kobiety$\}$

Dygresja 1.2. Czasami zamiast dwukropka używamy kreski |. Tak więc napisy $\{x : \Phi(x)\}$ oraz $\{x \mid \Phi(x)\}$ mają to samo znaczenie.

Dygresja 1.3. Gdy pragniemy scharakteryzować pewien podzbiór uprzednio scharakteryzowanego zbioru, czasami umieszczamy odniesienie do tego zbioru przed dwukropkiem/kreską. Przykładowo, napisy:

$$\{x \in N : x \text{ jest podzielne przez } 2\}$$

$$\{x : x \text{ jest liczbą naturalną i } x \text{ jest podzielne przez } 2\}$$

oznaczają ten sam zbiór, tj. zbiór liczb naturalnych parzystych.

Dygresja 1.4. Zbioru nieskończonego nie możemy scharakteryzować poprzez podanie listy jego wszystkich elementów. Niektóre zbiory skończone możemy jednak scharakteryzować zarówno poprzez podanie listy, jak i poprzez podanie warunku. Przykładowo, zbiór {1, 3, 5, 7} można również określić następująco:

$$\{x\text{: } x \text{ jest nieparzystą liczbą całkowitą dodatnią mniejszą od } 9\}$$

Notacja: wyrażenie wtw jest skrótem zwrotu „wtedy i tylko wtedy, gdy".

Następujące podstawowe zasady są albo aksjomatami teorii mnogości, albo konsekwencjami jej aksjomatów:

ZASADA EKSTENSJONALNOŚCI: *Zbiory A oraz B są identyczne wtw mają one dokładnie te same elementy; symbolicznie*:

$$A = B \ \ wtw \ \ \forall x\, (x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

Mówiąc swobodnie, wynika stąd, że określić zbiór to tyle, co określić, z jakich przedmiotów się on składa.

Przykład 1.7. Niech:

$$A = \{x : x \text{ jest prostokątem równobocznym}\}$$

$$B = \{x : x \text{ jest kwadratem}\}$$

Zbiory A oraz B są identyczne (tj. $A = B$).

ZASADA DYSTRYBUTYWNOŚCI: *Żaden zbiór nie jest identyczny z żadnym ze swoich elementów; symbolicznie*:

$$\neg(\exists y\, \exists x\, (\mathbf{Zbiór}(x) \wedge y \in x \wedge x = y))$$

Intuicyjnie rzecz biorąc, zbiór pusty to zbiór nie mający żadnego elementu. Pojęcie to można ściśle zdefiniować następująco:

Definicja 1.1 (*zbiór pusty*) *Zbiorem pustym nazywamy zbiór*:

$$\{x : x = x \wedge \neg(x = x)\}.$$

Zbiór pusty oznaczamy symbolem $\emptyset$.

Wniosek 1.1. *Następujące zbiory:*

$$\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\{\emptyset\}\},\ \{\{\{\emptyset\}\}\},\ \{\{\{\{\emptyset\}\}\}\},\ \ldots$$

są różne między sobą.

Inkluzję zbiorów (inaczej: zawieranie się zbiorów) definiujemy następująco:

Definicja 1.2. (inkluzja) *Zbiór A zawiera się w zbiorze B wtw każdy element zbioru A jest też elementem zbioru B; symbolicznie*:

$$A \subseteq B \text{ wtw } \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$$

Definicja 1.3. (podzbiór) *Zbiór A jest podzbiorem zbioru B wtw $A \subseteq B$.*

Dygresja 1.5. Zbiór pusty jest podzbiorem każdego zbioru. Dlaczego?

Przykład 1.8. Zbiór wszystkich mężczyzn jest podzbiorem zbioru wszystkich ludzi.

Przykład 1.9. Zbiór wszystkich ludzi jest podzbiorem zbioru wszystkich ludzi.

Wniosek 1.2. *Każdy zbiór jest swoim własnym podzbiorem*

- albowiem $\forall x(x \in A \rightarrow x \in A)$

Definicja 1.3. (inkluzja właściwa) $A \subset B$ *wtw* $A \subseteq B \wedge \neg(A = B)$

Definicja 1.4. (podzbiór właściwy) *Zbiór A* ***jest podzbiorem właściwym*** *zbioru B wtw* $A \subset B$.

Wniosek 1.3. *Jeżeli* $A \subset B$, *to* $\exists x\, (x \in B \wedge \neg(x \in A))$.

Przykład 1.10. Zbiór wszystkich mężczyzn jest podzbiorem właściwym zbioru wszystkich ludzi.

OSTRZEŻENIE: Długoletnia posługa dydaktyczna wśród humanistów nauczyła mnie, że znaki $\in$ oraz $\subset$ (czy $\subseteq$) są nagminnie mylone, co znaczy, że nie dostrzega się różnicy między należeniem elementu do zbioru a zawieraniem się zbioru w zbiorze. Jest to poważny błąd! Z pewną taką rezygnacją zwracam więc uwagę, że napisy typu:

$$\mathbf{1} \subset \{\mathbf{1, 2, 3}\}$$

$$\mathbf{1} \in \mathbf{1}$$

nie mają sensu!!!

Definicja 1.5. (krzyżowanie się zbiorów)

Zbiór A krzyżuje się ze zbiorem B wtw

(i) $\exists x\, (x \in A \wedge x \in B)$,

(ii) $\exists y\, (y \in A \wedge \neg(y \in B))$, oraz

(iii) $\exists z\, (z \in B \wedge \neg(z \in A))$.

Przykład 1.11. Zbiór wszystkich leni krzyżuje się ze zbiorem wszystkich studentów.

Przykład 1.12. Następujące zbiory A i B krzyżują się:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{2, 3, 4\}$$

Definicja 1.6. (rozłączność zbiorów) *Zbiory A oraz B są rozłączne wtw*

$$\neg\exists x\, (x \in A \wedge x \in B).$$

Przykład 1.13. Zbiór wszystkich liczb całkowitych dodatnich jest rozłączny ze zbiorem wszystkich liczb całkowitych ujemnych.

Twierdzenie 1.1. *Niech A i B będą dowolnymi zbiorami. Wówczas:*

(i) *A i B są rozłączne lub*

(ii) *A jest identyczny z B lub*

(iii) *A jest podzbiorem właściwym B lub*

(iv) *B jest podzbiorem właściwym A lub*

(v) *A krzyżuje się z B.*

Komentarz zostanie podany na wykładzie :)

Terminologia: Zbiór zbiorów (tj. zbiór, którego elementami są zbiory) nazywamy *rodziną zbiorów*.

Definicja 1.7. *Rodzinę wszystkich podzbiorów danego zbioru A nazywamy zbiorem potęgowym zbioru A i oznaczamy symbolem* 2^A.

Tak więc $2^A = \{X : X \subseteq A\}$.

Przykład 1.14. Niech $A = \{1, 2, 3\}$. Mamy wówczas:

$$2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Twierdzenie 1.2. *Jeżeli zbiór A jest skończony i ma n elementów, to zbiór potęgowy zbioru A ma* 2^n elementów.

Przypomnienie: Jeżeli przekształcenie f zbioru A w zbiór B jest funkcją, to każdemu elementowi x zbioru A odpowiada dokładnie jeden element $f(x)$ zbioru B.

Terminologia: Funkcja f jest wzajemnie jednoznaczna, jeżeli dla różnych argumentów przyjmuje ona zawsze różne wartości, tj. zachodzi $f(x) = f(y) \to x = y$.

Definicja 1.8. (równoliczność zbiorów). *Dwa zbiory A i B są równoliczne wtw istnieje funkcja wzajemnie jednoznaczna f, która odwzorowuje zbiór A na zbiór B. O funkcji takiej mówimy, że ustala ona równoliczność zbiorów A i B. O zbiorach równolicznych mówimy natomiast, że są one równej mocy.*

Przykład 1.15. Niech $A = \{1, 3, 5\}$ oraz $B = \{2, 4, 6\}$. Funkcja f: $A \mapsto B$ określona następująco:

$$f(x) = x + 1$$

ustala równoliczność zbiorów A i B.

Przykład 1.16. Niech $\boldsymbol{N}$ będzie zbiorem liczb naturalnych, a $\boldsymbol{N}_2$ zbiorem liczb naturalnych parzystych. Funkcja f: $\boldsymbol{N} \mapsto \boldsymbol{N}_2$ określona następująco:

$$f(x) = 2x$$

ustala równoliczność zbiorów $\boldsymbol{N}$ i $\boldsymbol{N}_2$.

Wniosek 1.4. *Zbiór liczb naturalnych jest równoliczny z pewnym swoim podzbiorem właściwym.*

Definicja 1.9 (zbiór nieskończony w sensie Dedekinda).

Zbiór A jest nieskończony wtw zbiór A jest równoliczny z jakimś swoim podzbiorem właściwym; w przeciwnym przypadku zbiór A jest skończony.

Wniosek 1.5. *Zbiór pusty jest skończony.*

Definicja 1.10. (zbiór przeliczalny) *Zbiór A jest przeliczalny wtw zbiór A jest skończony lub zbiór A jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych.*

Lemat 1. *Przedział* $(0, 1)$ *nie jest przeliczalny*.

Wniosek 1.6. *Istnieją zbiory nieskończone różnych mocy.*

Lemat 2. *Przedział* $(0, 1)$ *jest równoliczny ze zbiorem liczb rzeczywistych.*

Twierdzenie 1.3. *Zbiór liczb rzeczywistych jest nieskończony, ale nie jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych.*

Twierdzenie 1.4. *Dla dowolnego zbioru A, moc zbioru 2^A (tj. zbioru potęgowego zbioru A) jest większa od mocy zbioru A.*

Addendum: antynomia Russella

Niech $\boldsymbol{Z} =_{\mathrm{df}} \{X : \neg(X \in X)\}$. Zapytajmy, czy $\boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{Z}$?

Załóżmy, że $\boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{Z}$. Wówczas na mocy definicji zbioru $\boldsymbol{Z}$ dostajemy:

$$\neg(\boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{Z}).$$

Załóżmy, że $\neg(\boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{Z})$. Wówczas na mocy definicji zbioru $\boldsymbol{Z}$ dostajemy:

$$\boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{Z}.$$

Mamy zatem dwie implikacje:

$$\boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{Z} \rightarrow \neg(\boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{Z})$$

$$\neg(\boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{Z}) \rightarrow \boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{Z}$$

skąd dostajemy $\boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{Z} \leftrightarrow \neg(\boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{Z})$

co na mocy KRZ daje $\boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{Z} \wedge \neg(\boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{Z})$

czyli sprzeczność !!

W aksjomatycznych systemach teorii mnogości sprzeczność ta jest blokowana na różne wyrafinowane sposoby – o czym kiedy indziej.

Literatura:

Poruszane na tym wykładzie zagadnienia mają (poza równolicznością zbiorów i zbiorami nieskończonymi) charakter czysto propedeutyczny i jako takie są one omówione w prawie każdym podręczniku logiki lub teorii mnogości. Z nowszych (a więc łatwiej dostępnych) pozycji można wymienić:

[1] Roman Murawski, Kazimierz Świrydowicz: *Wstęp do teorii mnogości*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2005.

[2] Barbara Stanosz: *Wprowadzenie do logiki formalnej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1999 (jest to jedno z licznych wydań tej pozycji).

[3] Ryszard Wójcicki: *Wykłady z logiki z elementami teorii wiedzy*, Wydawnictwo Naukowe Scholar, Warszawa 2003.

Dowody lematu 1, lematu 2 oraz twierdzenia 1.4 można znaleźć m.in. w książce [1]. Bardzo sympatyczne (i pełniejsze) ujęcie bardziej zaawansowanych zagadnień poruszanych na tym wykładzie znajduje się w części pierwszej podręcznika:

[4] Geoffrey Hunter, *Metalogika*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1982.