Andrzej Wiśniewski

Logika I

Materiały do wykładu dla studentów kognitywistyki

Wykład 2. Działania na zbiorach

Niech A i B będą dowolnymi zbiorami.

Definicja 2.1. (suma zbiorów) *Suma zbiorów A i B jest to zbiór $A \cup B$ spełniający warunek*:

$$x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B.$$

Tak więc

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Przykład 2.1. Niech $A = \{1, 2, 3\}$ oraz $B = \{3, 4, 5\}$. Wówczas:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Przykład 2.2. Niech $A = \{1, 2, 3\}$ oraz $B = \varnothing$. Wówczas:

$$A \cup B = \{1, 2, 3\}.$$

Ostrzeżenie: Sumy zbiorów nie należy mylić z sumą liczb. Np.

$$2 + 2 = 4$$

$$\{2\} \cup \{2\} = \{2\}$$

Przykład 2.3. Niech:

$A = \{x : x$ jest kognitywistą$\}$

$B = \{x : x$ jest filozofem$\}$.

Wówczas:

$$A \cup B = \{x : x \text{ jest kognitywistą} \vee x \text{ jest filozofem}\}.$$

Uwaga 2.1. Do powyższego zbioru należą:

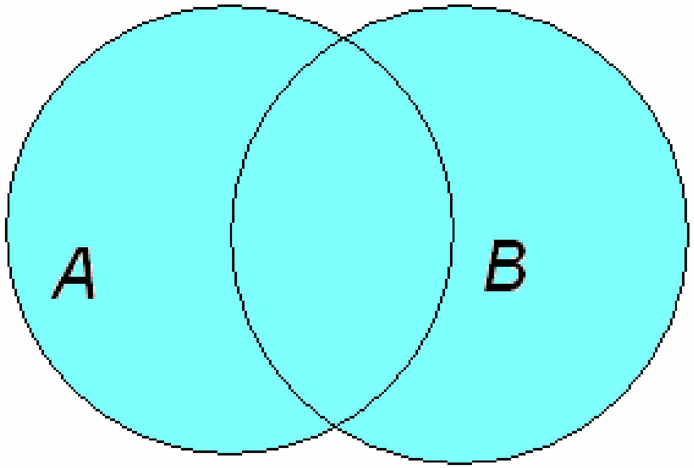
(a) wszyscy kognitywiści, którzy są zarazem filozofami,

(b) wszyscy filozofowie, którzy są zarazem kognitywistami,

(c) wszyscy kognitywiści, którzy nie są filozofami, oraz

(d) wszyscy filozofowie, którzy nie są kognitywistami.

Przedstawienie graficzne sumy zbiorów



$A \cup B$

Definicja 2.2. (iloczyn zbiorów; inaczej: przekrój zbiorów, część wspólna zbiorów) *Iloczyn zbiorów A i B jest to zbiór $A \cap B$ spełniający warunek*:

$$x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B.$$

Zatem

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Przykład 2.4. Niech $A = \{1, 2, 3\}$ oraz $B = \{3, 4, 5\}$. Wówczas:

$$A \cap B = \{3\}$$

Przykład 2.5. Niech $A = \{1, 2, 3\}$ oraz $B = \varnothing$. Wówczas:

$$A \cap B = \varnothing$$

Ostrzeżenie: Iloczynu zbiorów nie należy mylić z iloczynem liczb. Np.

$$2 \times 2 = 4$$

$$\{2\} \cap \{2\} = \{2\}$$

Przykład 2.6. Niech:

$A = \{x : x \text{ jest kognitywistą}\}$

$B = \{x : x \text{ jest filozofem}\}$.

Wówczas:

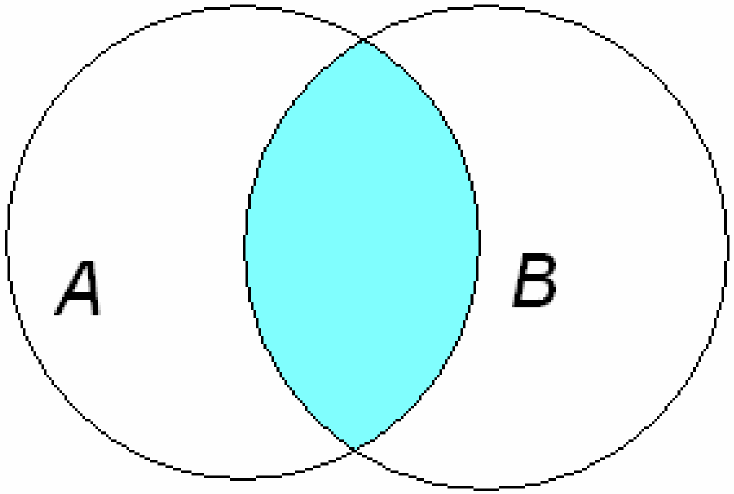
$$A \cap B = \{x : x \text{ jest kognitywistą} \wedge x \text{ jest filozofem}\}.$$

Uwaga 2.2. Do powyższego zbioru należą wyłącznie:

(a) wszyscy kognitywiści, którzy są zarazem filozofami,

(b) wszyscy filozofowie, którzy są zarazem kognitywistami.

Przedstawienie graficzne iloczynu zbiorów



$A \cap B$

Notacja: Zamiast $\neg(x \in A)$ piszemy $x \notin A$.

Definicja 2.3. (różnica zbiorów) *Różnica zbiorów A i B jest to zbiór $A \setminus B$ spełniający warunek*:

$$x \in A \setminus B \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B.$$

Tak więc

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Przykład 2.7. Niech $A = \{1, 2, 3\}$ oraz $B = \{3, 4, 5\}$. Wówczas:

$$A \setminus B = \{1, 2\}$$

Przykład 2.8. Niech $A = \{1, 2, 3\}$ oraz $B = \varnothing$. Wówczas:

$$A \setminus B = \{1, 2, 3\}$$

Do przemyślenia: $B \setminus A = ?$

Przykład 2.9. Niech:

$A = \{x : x \text{ jest kognitywistą}\}$

$B = \{x : x \text{ jest filozofem}\}$.

Wówczas:

$$A \setminus B = \{x : x \text{ jest kognitywistą} \wedge x \text{ nie jest filozofem}\}$$

Uwaga 2.3. Do powyższego zbioru należą wyłącznie ci kognitywiści, którzy nie są filozofami.

Przykład 2.10. Niech A i B będą takie same jak poprzednio. Wówczas:

$$B \setminus A = \{x: x \text{ jest filozofem} \wedge x \text{ nie jest kognitywistą}\}$$

czyli $B \setminus$ A jest zbiorem tych wszystkich filozofów, którzy nie są kognitywistami.

Definicja 2.4. (różnica symetryczna zbiorów) *Różnica symetryczna zbiorów A i B jest to zbiór $A \div B$ spełniający warunek*:

$$x \in A \div B \leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A).$$

Zatem

$$A \div B = \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}.$$

Przykład 2.11. Niech $A = \{1, 2, 3\}$ oraz $B = \{3, 4, 5\}$. Wówczas:

$$A \div B = \{1, 2, 4, 5\}$$

Przykład 2.12. Niech $A = \{1, 2, 3\}$ oraz $B = \{3, 4, 5\}$. Wówczas:

$$B \div A = \{1, 2, 4, 5\}$$

Przykład 2.13. Niech:

$A = \{x : x \text{ jest kognitywistą}\}$

$B = \{x : x \text{ jest filozofem}\}$.

Wówczas:

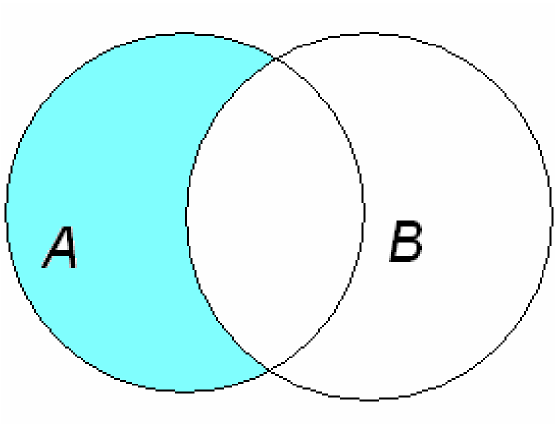
$A \div B = \{x : (x \text{ jest kognitywistą} \wedge x \text{ nie jest filozofem}) \vee (x \text{ jest filozofem} \wedge x \text{ nie jest kognitywistą})\}$.

czyli elementami zbioru $A \div B$ są wszyscy kognitywiści nie-filozofowie, a także wszyscy filozofowie nie-kognitywiści.

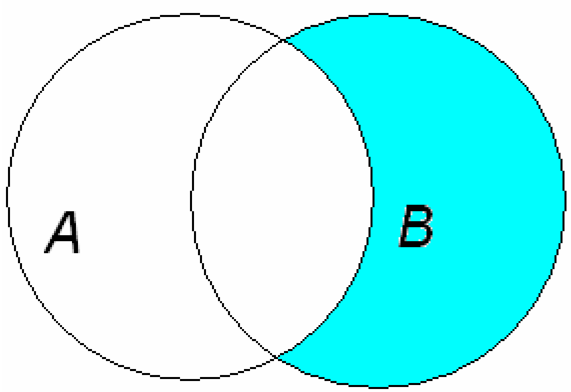
Wniosek 2.1:

$$A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

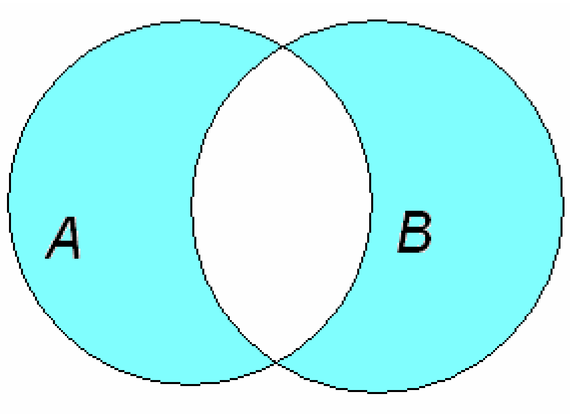
Przedstawienia graficzne różnicy zbiorów i różnicy symetrycznej zbiorów



$A \setminus B$



$B \setminus A$



$A \div B$

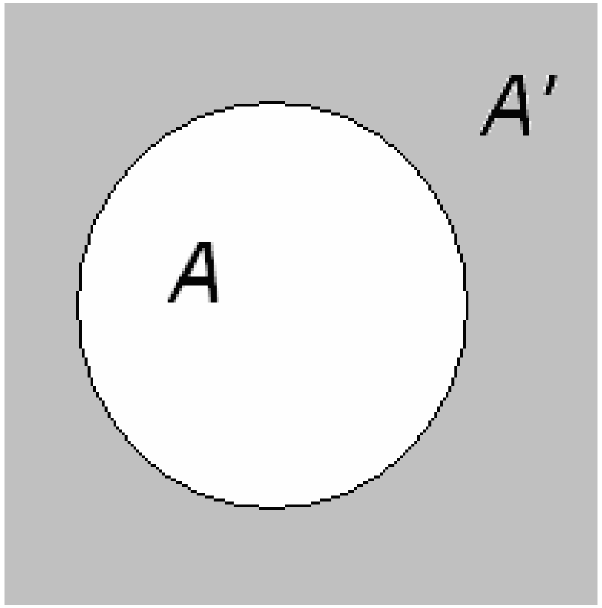
Teraz załóżmy, że ograniczamy się do rozważania podzbiorów pewnego dowolnego ale ustalonego zbioru **U**, zwanego uniwersum, przestrzenią lub zbiorem uniwersalnym.

Definicja 2.5. (dopełnienie zbioru w zbiorze) *Dopełnieniem zbioru A w zbiorze* **U** *nazywamy zbiór A' spełniający równość*:

$$A' = \mathbf{U} \setminus A.$$

Wniosek 2.2. $A' = \{x \in \mathbf{U} : x \notin A\}$.

Przedstawienie graficzne dopełnienia zbioru A w zbiorze **U**



Zbiór **U** jest reprezentowany przez prostokąt; szara część prostokąta reprezentuje *A'*.

Przykład 2.14.

Dopełnieniem zbioru {1, 2} w zbiorze {1, 2, 3, 4} jest zbiór {3, 4}.

Przykład 2.15.

Dopełnieniem zbioru liczb naturalnych parzystych w zbiorze liczb naturalnych jest zbiór liczb naturalnych nieparzystych.

Przykład 2.16.

Dopełnieniem zbioru wszystkich kognitywistów w zbiorze (wszystkich) ludzi jest zbiór tych wszystkich ludzi, którzy nie są kognitywistami.

Przykład 2.17.

Dopełnieniem zbioru wszystkich mężczyzn mających ponad 15 m wzrostu w zbiorze ludzi jest zbiór wszystkich ludzi.

Przykład 2.18.

Dopełnieniem zbioru wszystkich ludzi w zbiorze wszystkich ludzi jest zbiór pusty.

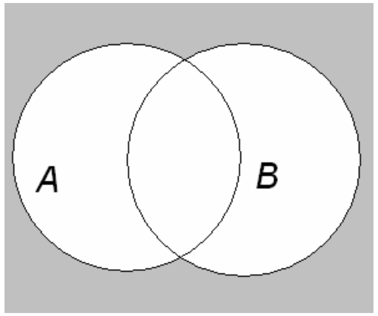
Wybrane prawa rachunku zbiorów

Twierdzenie 2.1. *Niech* **U** *będzie danym uniwersum i niech* $A \subseteq \mathbf{U}$ *oraz* $B \subseteq \mathbf{U}$. *Zachodzą następujące równości*:

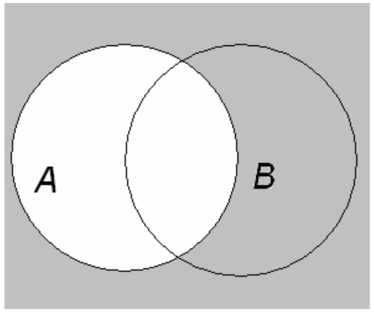
(a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$,

(b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

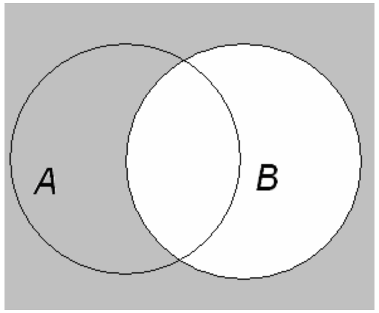
Uzasadnienie równości (a) metodą diagramów Venna:



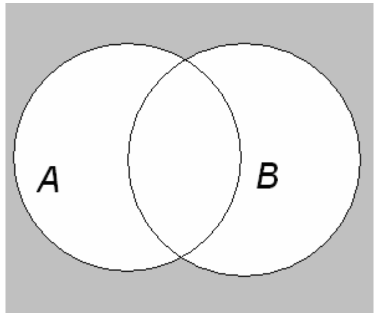
$(A \cup B)'$



A'



B'

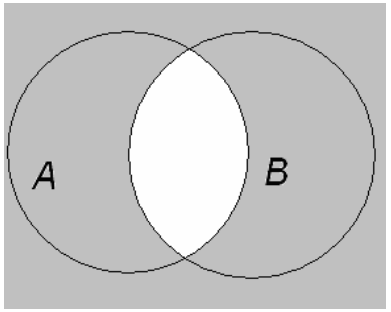


$A' \cap B'$

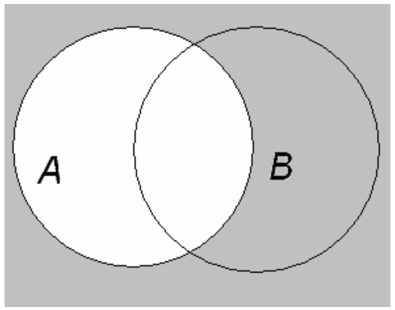
Komentarz: kolorem szarym oznaczono rozważany (każdorazowo) zbiór.

Wybrane prawa rachunku zbiorów

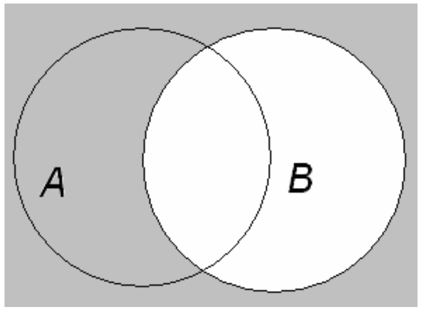
Uzasadnienie równości (b): $(A \cap B)' = A' \cup B'$ metodą diagramów Venna:



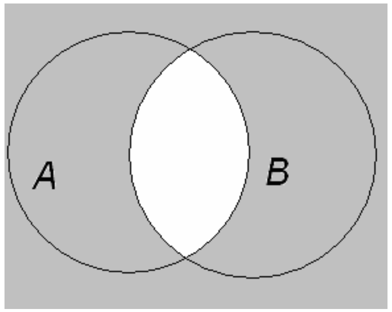
$(A \cap B)'$



A'



B'



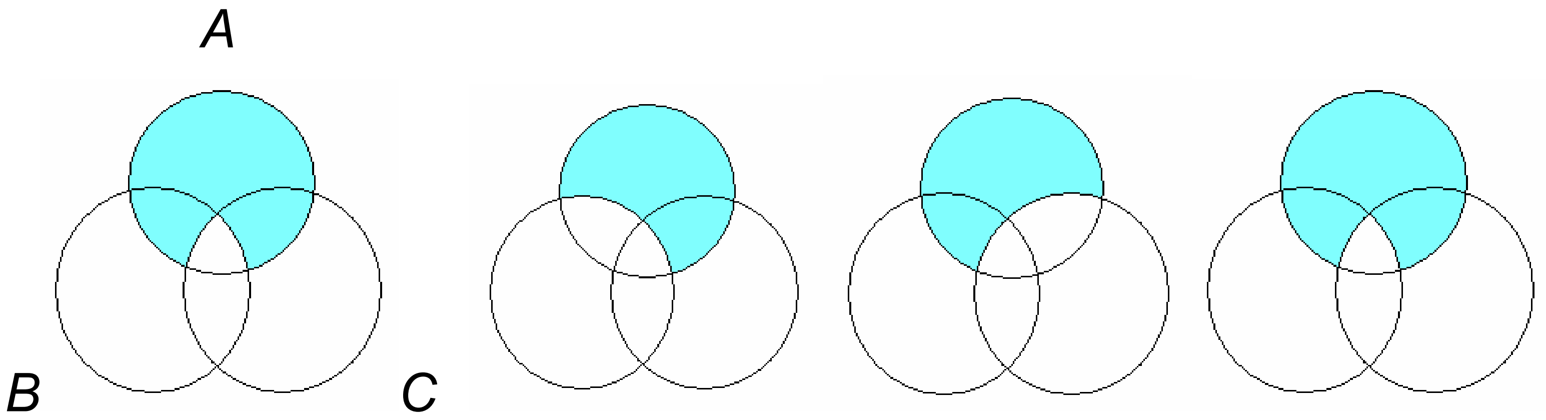
$A' \cup B'$

Twierdzenie 2.1*. *Dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzą następujące równości*:

(a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,

(b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Uzasadnienie równości (b) metodą diagramów Venna:



$A \setminus (B \cap C)$ $\qquad$ $(A \setminus B)$ $\qquad$ $(A \setminus C)$ $\qquad$ $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Twierdzenie 2.2. *Dla dowolnych podzbiorów A, B, C ustalonego uniwersum* $\mathbf{U}$ *zachodzą następujące równości*:

(a) $A \cup B = B \cup A$,

(a*) $A \cap B = B \cap A$,

(b) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,

(b*) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,

(c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

(c*) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

(d) $A \cup \varnothing = A$,

(d*) $A \cap \varnothing = \varnothing$,

(e) $A \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$,

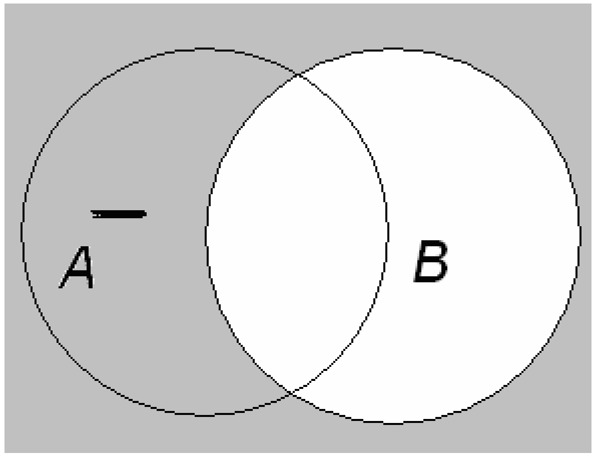
(e*) $A \cap \mathbf{U} = A$.

Nie wszystkie prawa rachunku zbiorów mają postać równości. Oto przykłady:

Twierdzenie 2.3. *Niech A, B będą podzbiorami danego uniwersum* **U**. *Wówczas jeśli* $A \cap B' = \emptyset$, to $A \subseteq B$.

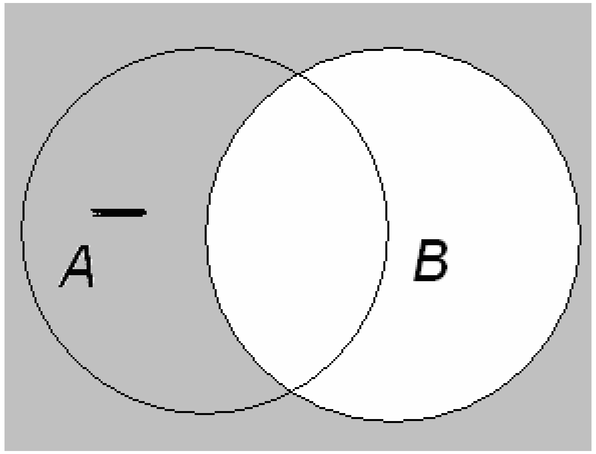
Uzasadnienie metodą diagramów Venna:

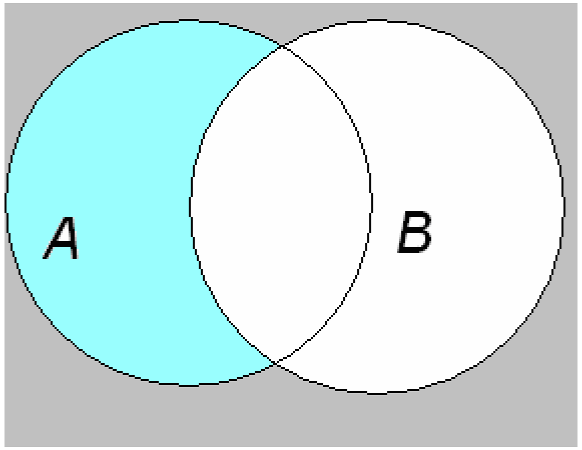
U:



Kolorem szarym oznaczono *B'* ; kreska – wskazuje na pustość obszaru.

Twierdzenie 2.4. $A \subseteq B$ *wtw* $A \setminus B = \emptyset$.





Twierdzenie 2.5. *Dla dowolnych zbiorów A i B następujące warunki są równoważne*:

(a) $A \subseteq B$,

(b) $A \cup B = B$,

(c) $A \cap B = A$.

Zbiór dwuelementowy, którego elementami są obiekty x i y, możemy scharakteryzować zarówno jako $\{x, y\}$, jak i jako $\{y, x\}$. Innymi słowy, kolejność, w jakiej wypiszemy nazwy elementów nie gra roli, albowiem

$$\{x, y\} = \{y, x\}.$$

Gdy chcemy scharakteryzować ***pary uporządkowane***, tj. mówiąc ogólnie, zbiory dwuelementowe, w których „kolejność występowania elementów jest istotna", musimy to zrobić w taki sposób, aby spełniony był następujący warunek:

(**WPU**) $\langle x, y\rangle = \langle u, w\rangle$ *wtw* $x = u \wedge y = w$.

Warunek (**WPU**) nie jest definicją, ale kryterium adekwatności definicji!

Definicja 2.6. (para uporządkowana)

Parą uporządkowaną $\langle x, y\rangle$ *nazywamy zbiór* $\{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Obserwacja: <Zygfryd, Berta> $\neq$ <Berta, Zygfryd>

Definicja 2.7. (*n*-tka uporządkowana; $n \geq 2$)

(a) $<x_1, x_2> = \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}\}$,

(b) $<x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}> = <<x_1, x_2, \ldots, x_n>, x_{n+1}>$.

Uwaga: Podane definicje nie wymagają, aby elementy były różne: mogą one być różne, ale nie muszą. Przykładowo, <1, 1> jest parą uporządkowaną (nawiasem mówiąc, $<1, 1> = \{\{1\}, \{1, 1\}\} = \{\{1\}\}$).

Definicja 2.8. (iloczyn kartezjański; inaczej produkt kartezjański)

Iloczynem kartezjańskim zbiorów A i B nazywamy zbiór:

$$A \times B = \{<x, y> : x \in A \wedge y \in B\}.$$

Przykład 2.19. Niech $A = \{1, 2\}$ oraz $B = \{3, 4\}$. Wówczas:

$$A \times B = \{<1, 3>, <1, 4>, <2, 3>, <2, 4>\}.$$

Iloczyn kartezjański

Przykład 2.20. Niech $A = \{\text{Jaś}\}$ oraz $B = \{\text{Małgosia, Zosia}\}$.

$$A \times B = \{<\text{Jaś, Małgosia}>, <\text{Jaś, Zosia}>\}.$$

Przykład 2.21. Niech $A = \{1, 2\}$ oraz $B = \{1, 2\}$.

$$A \times B = \{<1, 1>, <1, 2>, <2, 1>, <2, 2>\}.$$

Definicja 2.9. (iloczyn kartezjański n zbiorów; $n \geq 2$) *Iloczynem kartezjańskim zbiorów* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($n \geq 2$) *nazywamy zbiór*:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{<x_1, x_2, \ldots, x_n> : x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \ldots \wedge x_n \in A_n\}.$$

Definicja 2.10. (n-ta potęga kartezjańska zbioru; $n \geq 1$):

(a) $A^1 = A$,

(b) $A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ razy}}$

Pojęcie relacji możemy zdefiniować za pomocą pojęcia iloczynu kartezjańskiego; relacje w danym zbiorze możemy zdefiniować jako podzbiory potęg kartezjańskich tego zbioru. Ale o tym za tydzień.

Literatura:

Poruszane na tym wykładzie zagadnienia są omówione w prawie każdym podręczniku logiki lub teorii mnogości. Z nowszych (a więc łatwiej dostępnych) pozycji można wymienić:

[1] Roman Murawski, Kazimierz Świrydowicz: *Wstęp do teorii mnogości*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2005.

[2] Barbara Stanosz: *Wprowadzenie do logiki formalnej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1999 (jest to jedno z licznych wydań tej pozycji).

[3] Ryszard Wójcicki: *Wykłady z logiki z elementami teorii wiedzy*, Wydawnictwo Naukowe Scholar, Warszawa 2003.