Andrzej Wiśniewski

Logika I

Materiały do wykładu dla studentów kognitywistyki

Wykład 3. Relacje i funkcje

Już było...

Definicja 2.6. (para uporządkowana)

Parą uporządkowaną $<x, y>$ *nazywamy zbiór* $\{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Obserwacja: <Zygfryd, Berta> $\neq$ <Berta, Zygfryd>

Definicja 2.7. (n-tka uporządkowana; $n \geq 2$)

(a) $<x_1, x_2> = \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}\}$,

(b) $<x_1, x_2, ..., x_{n+1}> = <<x_1, x_2, ..., x_n>, x_{n+1}>$.

Definicja 2.8. (iloczyn kartezjański; inaczej produkt kartezjański)

Iloczynem kartezjańskim zbiorów A i B nazywamy zbiór:

$$A \times B = \{\langle x, y\rangle : x \in A \wedge y \in B\}.$$

Definicja 2.9. (iloczyn kartezjański n zbiorów; $n \geq 2$) *Iloczynem kartezjańskim zbiorów* $A_1, A_2, ..., A_n$ ($n \geq 2$) *nazywamy zbiór*:

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{\langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle : x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge ... \wedge x_n \in A_n\}.$$

Definicja 2.10. (n-ta potęga kartezjańska zbioru; $n \geq 1$):

(a) $A^1 = A$,

(b) $A^n = \underbrace{A \times A \times ... \times A}_{n \text{ razy}}$

Relacje n-członowe

Nie wdając się w – niewątpliwie głębokie – rozważania nad tym, czym są relacje i jak one istnieją, pojęcie relacji będziemy tu rozumieli teoriomnogościowo.

Definicja 3.1. (relacja n-członowa; $n \geq 2$) *Niech $n \geq 2$.* Relacją *n*-członową *nazywamy dowolny podzbiór zbioru n-tek uporządkowanych.*

Komentarz: Zbiór pusty jest podzbiorem dowolnego zbioru, a zatem i on jest relacją (tzw. *relacją pustą*). Operowanie pojęciem relacji pustej jest wygodne w pewnych zastosowaniach, dlatego też w powyższej definicji mówimy o podzbiorze zbioru *n*-tek uporządkowanych. Elementami *n*-członowej relacji niepustej są *n*-tki uporządkowane.

Terminologia: Gdy $n = 2$ i relacja jest niepusta, nazywamy ją *binarną*; gdy $n = 3$ i relacja jest niepusta, czasami mówimy o relacjach *ternarnych*.

Przykład 3.1. {<Jaś, Małgosia>, <Małgosia, Jaś>, <Piotruś, Zosia>} jest relacją binarną.

Przykład 3.2. {<Małgosia, Jaś, Zosia>, <Kasia, Piotruś, Beata>} jest relacją ternarną.

Uwaga: Mówiąc dalej o relacjach n-członowych, zawsze milcząco zakładamy, że $n \geq 2$.

Definicja 3.2. (relacja n-członowa w zbiorze; $n \geq 2$).
Mówimy, że relacja n-członowa R jest n-członową relacją w zbiorze A wtw $R \subseteq A^n$.

Wniosek 3.1. *R jest relacją n-członową w A wtw* $R \subseteq \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ razy}}$

Wniosek 3.2. *Niepusta n-członowa relacja w zbiorze A jest zbiorem n-tek uporządkowanych elementów zbioru A.*

Komentarz: Czasami pojęcie *n-członowej relacji w zbiorze* definiuje się następująco:

R jest n-członową relacją w zbiorze A wtw $R \subseteq A^n$.

Taka definicja dopuszcza przypadek $n = 1$, czyli tzw. relacje *unarne* (jednoczłonowe). Relacja unarna w A jest podzbiorem zbioru A. Dla tak określonego pojęcia nie zachodzi odpowiednik wniosku 3.1 (jako że pojęcie iloczynu kartezjańskiego nie ma zastosowania gdy $n = 1$).

Relacje n-członowe w iloczynie (produkcie) kartezjańskim zbiorów

Definicja 3.3. *Mówimy, że n-członowa relacja R jest* n-członową relacją w iloczynie kartezjańskim $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ *zbiorów* $A_1, A_2, ..., A_n$ *wtw* $R \subseteq A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$.

Daną relację możemy uważać zarówno za relację w określonym zbiorze, jak i za relację w iloczynie kartezjańskim różnych zbiorów. Przykładowo, niech $R \subseteq A \times A$ i niech $A \subset B$. Wówczas R jest (też) relacją w iloczynie kartezjańskim $A \times B$.

Jest to jeden z powodów, dla którego potrzebujemy pojęć dziedziny i przeciwdziedziny relacji binarnej, oraz pojęcia i-tej dziedziny relacji n-członowej ($1 \leq i \leq n$; oraz $n > 2$). Innym powodem jest oczywiście to, że relacja w A jest też relacją w każdym B takim, że $A \subset B$, i podobnie dla iloczynów kartezjańskich.

Notacja: Zamiast <x, y> $\in R$ piszemy xRy.

Definicja 3.4. (dziedzina, przeciwdziedzina i pole relacji binarnej)

Niech R będzie relacją binarną. Dziedziną *relacji R nazywamy zbiór*:

$$\boldsymbol{D}_R = \{x : \exists y\ (xRy)\}.$$

Przeciwdziedziną *relacji R nazywamy zbiór*:

$$\boldsymbol{D}^*_R = \{y : \exists x\ (xRy)\}.$$

Polem *relacji R jest zbiór*:

$$\boldsymbol{D}_R \cup \boldsymbol{D}^*_R.$$

Przykład 3.3. R = {<Jaś, Małgosia>, <Małgosia, Jaś>, <Piotruś, Zosia>}. Wówczas:

$$\boldsymbol{D}_R = \{\text{Jaś, Małgosia, Piotruś}\},$$

$$\boldsymbol{D}^*_R = \{\text{Małgosia, Jaś, Zosia}\}.$$

Polem relacji R jest zbiór {Jaś, Małgosia, Piotruś, Zosia}.

i-ta dziedzina relacji n-członowej; $n > 2$

Notacja: Zamiast $<x_1, x_2, ..., x_n> \in R$ piszemy $R(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Definicja 3.5. (*i*-ta dziedzina relacji *n*-członowej; $n > 2$ oraz $1 \leq i \leq n$).

Niech R będzie relacją n-członową, gdzie n > 2. *Pod pojęciem* *i*-tej dziedziny $(1 \leq i \leq n)$ *relacji R rozumiemy zbiór*:

$$\boldsymbol{D}^{i}_{R} = \{y : \exists x_1 ... \exists x_{i-1} \exists x_{i+1} ... \exists x_n \, R(x_1, ..., x_{i-1}, y, x_{i+1}, x_n)\}.$$

Przykład 3.4. R = {<Małgosia, Jaś, Zosia>, <Kasia, Piotruś, Beata>}.

$\boldsymbol{D}^{1}_{R}$ = {Małgosia, Kasia}

$\boldsymbol{D}^{2}_{R}$ = {Jaś, Piotruś}

$\boldsymbol{D}^{3}_{R}$ = {Zosia, Beata}

Niech *R* = {<*a*, *a*>, <*a*, *b*>, <*a*, *c*>, <*b*, *c*>, <*c*, *b*> }. O *a*, *b*, *c* zakładamy, że są one różne między sobą.

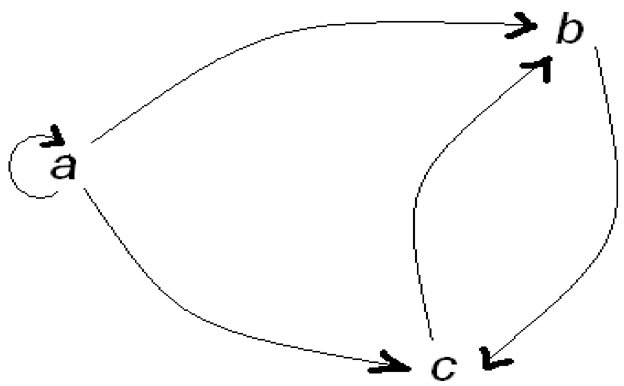


Diagram relacji R

Niech $R = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle\}$.

	a	*b*	*c*
a	1	1	1
b	0	0	1
c	0	1	0

Niech *R* = {<Jaś, Małgosia>, <Małgosia, Jaś>, <Piotruś, Zosia>}.

	Jaś	Małgosia	Piotruś	Zosia
Jaś	0	1	0	0
Małgosia	1	0	0	0
Piotruś	0	0	0	1
Zosia	0	0	0	0

Reprezentacja relacji n-członowej w postaci tabeli

Mamy 4 niepuste zbiory: **nazwisko** = {Kaczor Donald, Myszka Miki, Pies Pluto}, **nrkonta** $\subseteq$ ***N*, typkonta** = {oszczędnościowe, rozliczeniowe}**, saldo** $\subseteq$ ***N*** $\cup$ {0}**.** Opisujemy pewną konkretną relację $R \subseteq$ **nazwisko** $\times$ **nrkonta** $\times$ **typkonta** $\times$ **saldo**, którą nazwiemy słowem **Klient**, za pomocą następującej tabeli:

nazwisko	**nrkonta**	**typkonta**	**saldo**
Kaczor Donald	1101	oszczędnościowe	1000
Kaczor Donald	1201	rozliczeniowe	200
Myszka Miki	1202	rozliczeniowe	900
Pies Pluto	1102	oszczędnościowe	0
Pies Pluto	1103	oszczędnościowe	100000

Informatyk powie, że **Klient** jest relacją o atrybutach: nazwisko, nrkonta, typkonta, saldo. Schemat tej relacji napisze on następująco:

Klient (nazwisko, nrkonta, typkonta, saldo).

Wiersze tabeli nazwie on krotkami.

Własności relacji binarnych: zwrotność, przeciwzwrotność i niezwrotność

Definicja 3.6. *Mówimy, że relacja binarna R jest*:

(i) zwrotna *w zbiorze A wtw* $\forall x \in A\ (xRx)$,

(ii) przeciwzwrotna *w zbiorze A wtw* $\forall x \in A\ \neg(xRx)$,

(iii) niezwrotna *w zbiorze A wtw* $\neg\forall x \in A\ (xRx)$.

Przykład 3.5. Relacja *równości = w danym zbiorze liczb* jest w nim zwrotna.

Przykład 3.6. Relacja *ojcostwa w zbiorze wszystkich ludzi* jest w nim przeciwzwrotna.

Przykład 3.7. Relacja *lubienia kogoś w zbiorze wszystkich ludzi* jest w nim niezwrotna - ale nie przeciwzwrotna :).

Własności relacji binarnych: symetryczność, przeciwsymetryczność, antysymetryczność

Definicja 3.7. *Mówimy, że relacja binarna R jest*:

(i) symetryczna *w zbiorze A wtw* $\forall x \in A\ \forall y \in A\ (xRy \rightarrow yRx)$,

(ii) przeciwsymetryczna *w zbiorze A wtw*

$$\forall x \in A\ \forall y \in A\ (xRy \rightarrow \neg(yRx)),$$

(iii) antysymetryczna *w zbiorze A wtw*

$$\forall x \in A\ \forall y \in A\ (xRy \wedge x \neq y \rightarrow \neg(yRx)).$$

Przykład 3.8. Relacja *pokrewieństwa* jest symetryczna w zbiorze ludzi.

Przykład 3.9. Relacja *większości > w zbiorze liczb rzeczywistych* jest w nim przeciwsymetryczna.

Przykład 3.10. Relacja ≥ *bycia większym lub równym w zbiorze liczb rzeczywistych* jest w nim antysymetryczna.

Przykład 3.11. Relacja określona przez warunek „*x* jest zakochany w *y*” nie jest symetryczna w zbiorze ludzi; nie jest ona też w nim ani przeciwsymetryczna, ani antysymetryczna.

Własności relacji binarnych: przechodniość i spójność

Definicja 3.8. *Mówimy, że relacja binarna R jest*:

(i) przechodnia *w zbiorze A wtw*

$$\forall x \in A\ \forall y \in A\ \forall z \in A\ (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz),$$

(ii) spójna *w zbiorze A wtw* $\forall x \in A\ \forall y \in A\ (xRy \vee yRx \vee x = y)$.

Przykład 3.12. Relacja *większości > w zbiorze liczb rzeczywistych* jest w nim przechodnia.

Przykład 3.13. Relacja $\geq$ *bycia większym lub równym w zbiorze liczb rzeczywistych* jest w nim spójna.

Przykład 3.14. Relacja *lubienia kogoś w zbiorze ludzi* nie jest w nim ani przechodnia, ani spójna.

Definicja 3.9. *Mówimy, że relacja binarna R jest* relacją równoważnościową *w zbiorze A wtw R jest w A zwrotna, symetryczna i przechodnia.*

Przykład 3.15. Relacja *identyczności* = jest relacją równoważnościową w dowolnym zbiorze.

Przykład 3.16. Relacja *posiadania tego samego wzrostu* jest relacją równoważnościową w zbiorze wszystkich ludzi.

Definicja 3.10. *Niech A będzie niepustym zbiorem, zaś R będzie relacją binarną w A i zarazem równoważnościową w A.* Klasą abstrakcji *elementu $x \in A$ względem relacji R nazywamy zbiór*:

$$[x]_R = \{y \in A : xRy\}.$$

Komentarz: Do klasy abstrakcji elementu $x \in A$ względem relacji równoważnościowej R w A należą wszystkie te elementy zbioru A, które pozostają w relacji R do x, i tylko one.

Twierdzenie 3.1. *Niech A będzie niepustym zbiorem, natomiast R niech będzie relacją binarną w zbiorze A. Jeżeli R jest relacją równoważnościową w A, to dla dowolnych elementów x*, *y* $\in$ *A*:

(i) $x \in [x]_R$,

(ii) $[x]_R = [y]_R$ *wtw* xRy,

(iii) *jeśli* $[x]_R \neq [y]_R$, *to* $[x]_R \cap [y]_R = \varnothing$.

Uwaga: Przypominam, że przyjęliśmy tutaj, że *R*, będąc relacją binarną, jest *niepustym* zbiorem par uporządkowanych.

Twierdzenie 3.2. (zasada abstrakcji) *Niech A będzie niepustym zbiorem i niech R będzie binarną relacją równoważnościową w A. Relacja* R *ustala podział zbioru A na rozłączne i niepuste podzbiory (mianowicie klasy abstrakcji) w taki sposób, że dwa elementy x, y zbioru A należą do tego samego podzbioru wtw xRy.*

Notacja: Przez *A* / *R* oznaczamy zbiór wszystkich klas abstrakcji relacji *R* w zbiorze *A.*

Definicja 3.11. *Niech R będzie relacją binarną w zbiorze A. Relację R nazywamy* porządkującą zbiór *A wtw R jest zwrotna, przechodnia i antysymetryczna w A. Mówimy wówczas, że R* porządkuje *zbiór A, i parę uporządkowaną* <*A*, *R*> *nazywamy* zbiorem uporządkowanym.

Przykład 3.17. Relacja *niewiększości* $\leq$ *w* (dowolnym) *niepustym zbiorze liczb rzeczywistych* porządkuje ten zbiór.

Relacja *inkluzji* $\subseteq$ *w* (dowolnym) *zbiorze podzbiorów danego zbioru niepustego* porządkuje ten zbiór.

Definicja 3.12. *Relację binarną R w zbiorze A nazywamy* liniowo porządkującą zbiór *A wtw R porządkuje zbiór A i ponadto R jest spójna w A. Mówimy wówczas, że relacja R* liniowo porządkuje zbiór *A, i parę uporządkowaną* <*A*, *R*> *nazywamy* zbiorem liniowo uporządkowanym *lub* łańcuchem*.*

Przykład 3.18: Relacja *niewiększości* $\leq$ *w* (dowolnym) *niepustym zbiorze liczb rzeczywistych* liniowo porządkuje ten zbiór.

Ponieważ relacje zostały zdefiniowane jako zbiory, można na nich wykonywać te same działania, co na zbiorach.

Działaniami specyficznymi dla relacji są działania konwersu i iloczynu względnego.

Definicja 3.13. Konwersem *relacji binarnej R nazywamy relację $\breve{R}$ określoną wzorem*:

$$x\breve{R}y \leftrightarrow yRx.$$

Konwers relacji nazywamy też *relacją odwrotną*.

Przykład 3.19. Konwersem relacji bycia mężem jest relacja bycia żoną.

Definicja 3.14. *Niech R, S będą relacjami binarnymi.* Iloczynem względnym *relacji R i S jest relacja $R \circ S$ określona następująco*:

$$x(R \circ S)y \leftrightarrow \exists z\,(xRz \wedge zSy).$$

Przykład 3.20. Iloczynem względnym relacji bycia mężem i relacji bycia córką jest relacja bycia zięciem.

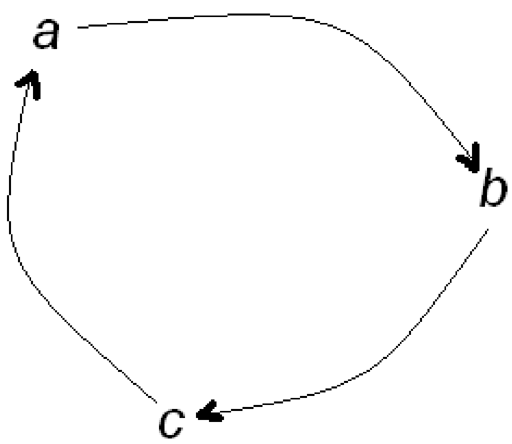
Niech $R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle\}$

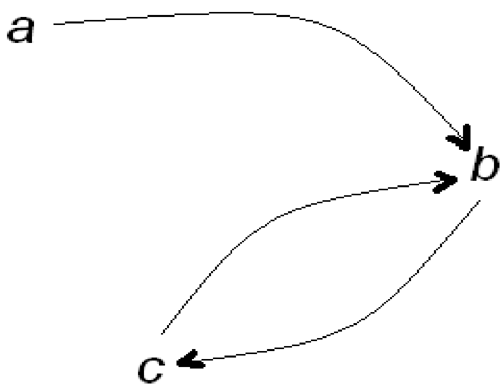
$S = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle\}$

$T = \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle\}$

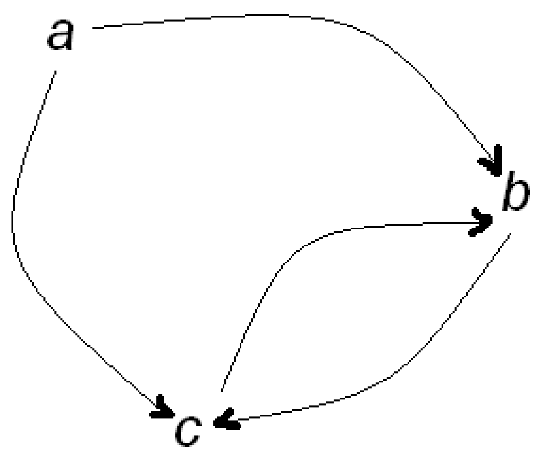
gdzie a, *b*, *c* są różne miedzy sobą. Relacje *R* i *S* są funkcjami, pod-czas gdy relacja *T* nie jest funkcją.

relacja *S*





relacja *R*



relacja *T*

Definicja 3.15. *Relację $R \subseteq A \times B$ nazywamy* funkcją jednoargumentową *wtw spełnione są następujące warunki*:

(i) $\forall x \in \boldsymbol{D}_R\, \exists y \in B\, (xRy)$,

(ii) $\forall x \in \boldsymbol{D}_R\, \forall y \in B\, \forall z \in B\, (xRy \wedge xRz \rightarrow y = z)$.

Komentarz: Warunki te sprowadzają się do wymagania, aby każdemu elementowi dziedziny $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{R}}$ relacji R był przyporządkowany dokładnie jeden element zbioru B. Przypomnijmy, że na mocy definicji 3.4 mamy $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{R}} \subseteq A$.

Nie wykluczają one natomiast ani tego, że dany element zbioru B jest przyporządkowany kilku elementom zbioru $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{R}}$, ani też tego, że pewne elementy zbioru B nie są przyporządkowane żadnym elementom zbioru $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{R}}$.

Terminologia i notacja: Funkcje oznaczamy symbolami f, g, ... Zbiór $\boldsymbol{D}_f$ (czyli dziedzina funkcji f traktowanej jako relacja binarna) jest zbiorem *argumentów* funkcji f, natomiast przeciwdziedziną $\boldsymbol{D}^*_f$ jest jej zbiorem *wartości*. Wartość funkcji jednoargumentowej f dla argumentu x – tj. ten jedyny element $y \in B$ taki, że $\langle x, y \rangle \in f$ – oznaczamy przez $f(x)$.

Napis:

$$f : A \mapsto B$$

mówi nam, że f jest funkcją, której zbiorem argumentów jest A (tj. $\boldsymbol{D}_f = A$) i której wartości należą do B (tj. $\boldsymbol{D}^*_f \subseteq B$); gdy f jest taką funkcją, mówimy, że f przekształca (lub odwzorowuje) zbiór A w zbiór B, albo też krótko, że f jest funkcja ze zbioru A w zbiór B. Zbiór wszystkich funkcji ze zbioru A w zbiór B oznaczamy przez B^A.

Definicja 3.16. *Funkcję f: $A \mapsto B$ nazywamy* wzajemnie jednoznaczną *wtw* $\forall x_1 \in A\ \forall x_2 \in A\ (x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$.

Funkcję wzajemnie jednoznaczną nazywamy też *różnowartościową*, albo *jednojednoznaczną.* Czasami też funkcje takie określane są mianem *iniekcji* albo *monomorfizmów..*

Definicja 3.17. *Funkcję f: $A \mapsto B$ nazywamy funkcją* przekształcającą zbiór *A* na zbiór *B wtw* $\forall y \in B\ \exists x \in A\ (y = f(x))$.

„Funkcje na" to inaczej *suriekcje* lub *epimorfizmy*.

Definicja 3.18. *Funkcję f: $A \mapsto B$ nazywamy* bijekcją *wtw f jest wzajemnie jednoznaczna oraz f przekształca zbiór A na zbiór B.*

Definicja 3.19. *Niech A będzie dowolnym niepustym zbiorem. Funkcję $f\colon A^m \mapsto B$ nazywamy* funkcją *m* zmiennych *przebiegających zbiór A i o wartościach należących do zbioru B.*

Funkcje więcej niż 1 zmiennej nazywamy też *funkcjami wieloargumentowymi*.

Przykład 3.21. Funkcja $f\colon \boldsymbol{N}^2 \mapsto \boldsymbol{N}$ określona przez równość:

$$f(x, y) = x + y$$

jest dwuargumentowa.

Przykład 3.22. Funkcja $g\colon \boldsymbol{N}^3 \mapsto \boldsymbol{N}$ dana wzorem:

$$g(x, y, z) = x \bullet y + z$$

jest trójargumentowa.

Uwaga: Czasami potrzebne są nam funkcje, które przyporządkowują każdemu elementowi iloczynu kartezjańskiego różnych niepustych zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pewien element jakiegoś zbioru B. Funkcje tego typu można określić jako funkcje jednoargumentowe ze zbioru $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ w zbiór B.

Skończony ciąg n-wyrazowy elementów zbioru A możemy utożsamić z n-tką uporządkowaną elementów zbioru A.

Ciąg taki możemy też zdefiniować jako funkcję ze zbioru $\{1, ..., n\}$ w zbiór A.

W przypadku nieskończonych ciągów elementów niepustego zbioru A wygodnie jest utożsamić je z funkcjami ze zbioru (wszystkich) liczb naturalnych $\boldsymbol{N}$ w zbiór A, tj. z funkcjami typu $A^{\boldsymbol{N}}$. Funkcja taka przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej i dokładnie jeden element zbioru A; element ten nazywamy *i-tym wyrazem* ciągu. Ciąg nieskończony ma przeliczalnie nieskończenie wiele wyrazów, niekoniecznie różnych między sobą.

Jakkolwiek zrobimy, ciąg skończony, którego kolejnymi wyrazami są $a_1, a_2, ... , a_n$ zapisujemy jako $<a_1, a_2, ..., a_n>$.

Ciągi

Pisząc **s** = $\langle s_1, s_2, ...\rangle$, mamy na myśli to, że **s** jest ciągiem (być może nieskończonym), którego kolejnymi wyrazami są s_1, s_2, ...; *i*-ty wyraz ciągu **s** oznaczamy przez s_i.

Podobnie pisząc **s** = $\langle s_1, s_2, ..., s_n\rangle$, chcemy powiedzieć, że **s** jest skończonym ciągiem, którego kolejnymi wyrazami są s_1, s_2, ..., s_n.

Uwagi końcowe. Wyjściowym pojęciem, z którego korzystaliśmy w tym wykładzie, było pojęcie zbioru: *n*-tki uporządkowane, iloczyny i potęgi kartezjańskie, a następnie relacje i funkcje były definiowane krok po kroku jako szczególnego rodzaju zbiory. Mówiąc ogólnie, przedstawiliśmy tu standardowe podejście teoriomnogościowe. Czasami jednak matematycy postępują inaczej: na początek definiują pojęcie funkcji jako pewnego rodzaju odwzorowania zbioru w zbiór, następnie określają ciągi jako funkcje (w sposób, który naszkicowaliśmy wyżej), a dalej, korzystając z pojęcia ciągu, wprowadzają pojęcie iloczynu kartezjańskiego i definiują relacje jako podzbiory iloczynów kartezjańskich. Oba podejścia są równoprawne.

Na koniec dwa drobne ostrzeżenia. Po pierwsze, terminologia dotycząca relacji nie jest ustalona w tym sensie, że w różnych podręcznikach można znaleźć różne nazwy (np. zamiast „przeciwsymetryczna" mówi się „asymetryczna" etc.). Po drugie, definiując zwrotność, symetryczność etc. relacji binarnych, określaliśmy w istocie zwrotność, symetryczność etc. w – dowolnym ale ustalonym – zbiorze *A*, a nie zwrotność, symetryczność etc. relacji określonej w danym zbiorze *A* względem tego zbioru. Uważna lektura odpowiednich partii podanych niżej pozycji może uczynić to rozróżnienie bardziej zrozumiałym.

Literatura:

[1] Roman Murawski, Kazimierz Świrydowicz: *Wstęp do teorii mnogości*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2005.

[2] Helena Rasiowa: *Wstęp do matematyki współczesnej*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1984 (książka ta miała też wiele innych wydań).

[3] Barbara Stanosz: *Wprowadzenie do logiki formalnej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1999 (jest to jedno z licznych wydań tej pozycji).

[4] Jeffrey D. Ullman, Jennifer Widom: *Podstawowy wykład z systemów baz danych*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2001.