Andrzej Wiśniewski

Logika I

Materiały do wykładu dla studentów kognitywistyki

*Wykład **4**. Semantyka Klasycznego Rachunku Zdań*

Skróty: zamiast „Klasyczny Rachunek Zdań” piszę *KRZ.*

Definicja 4.1. *Do alfabetu języka KRZ należą następujące znaki, i tylko one*:

$p_1, p_2, p_3, \ldots$	(*zmienne zdaniowe*)
$\neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow$	(*spójniki*)
( )	(*nawiasy*)

Zmiennych zdaniowych jest przeliczalnie nieskończenie wiele; zamiast p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 będę (czasami) pisał p, q, r, s, t.

Zbiór wszystkich zmiennych zdaniowych języka *KRZ* oznaczę symbolem *VAR*.

Definicja 4.2. Wyrażeniem *języka KRZ jest każdy skończony ciąg elementów alfabetu języka KRZ.*

Wyrażenia poprawnie zbudowane („sensowne”) języka *KRZ* to formuły tego języka.

Definicja 4.3. *Zbiór FORM* formuł języka *KRZ jest najmniejszym zbiorem spełniającym następujące warunki*:

(i) $VAR \subseteq FORM$,

(ii) *jeżeli wyrażenie A należy do FORM, to wyrażenie mające postać $\neg A$ należy do FORM,*

(iii) *jeżeli wyrażenia A, B należą do FORM, to wyrażenia mające postać*: $(A \to B)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \leftrightarrow B)$ *również należą do FORM.*

Każdy element zbioru FORM nazywamy formułą *języka KRZ*.

Zamiast „formuła *KRZ*" będę (w obrębie tego wykładu!) mówił/pisał „formuła".

Uwaga: Litery *A*, *B*, *C*, *D* występują w tym wykładzie w nowych rolach. Poprzednio były one zmiennymi przebiegającymi zbiory. Teraz są one *metajęzykowymi zmiennymi, których wartościami są formuły.*

Dygresja: Zamiast najpierw definiować pojęcie formuły i następnie pojęcie zbioru wszystkich formuł, zdefiniowaliśmy zbiór wszystkich formuł, a potem formuły. Jest to pierwsza różnica w stosunku do sposobu postępowania przyjętego na wykładzie z „Wprowadzenia do logiki”. Druga różnica polega na tym, że inaczej rozmieściliśmy nawiasy. W związku z tym trzeba inaczej określić zasady pomijania nawiasów w formułach. Teraz są one następujące:

(i) wolno pominąć zewnętrzną parę nawiasów w formule,

(ii) spójniki $\wedge$ i $\vee$ wiążą silniej niż spójniki $\rightarrow$ i $\leftrightarrow$.

Po trzecie, wprowadziliśmy mniej spójników.

Oba sposoby postępowania – przyjęty tutaj i przyjęty na wykładzie z „Wprowadzenia do logiki” - są równoprawne.

Niech **1** i **0** będą wartościami logicznymi, odpowiednio Prawdą i Fałszem.

Definicja 4.4. *Pod pojęciem n-argumentowej* ($n \geq 1$) funkcji prawdziwościowej *rozumiemy funkcję n zmiennych przebiegających zbiór* {**0**, **1**} *i o wartościach należących do zbioru* {**0**, **1**}.

Funkcje prawdziwościowe przyporządkowują zatem n-tkom uporządkowanym wartości logicznych wartości logiczne.

Mówiąc ściślej, jest tak, gdy $n > 1$; gdy $n = 1$, to funkcja prawdziwościowa przyporządkowuje wartościom logicznym wartości logiczne.

Przykład 4.1. Funkcja $f_{\neg}$: {**0**, **1**} $\mapsto$ {**0**, **1**} określona przez równości:

(i) $f_{\neg}(\mathbf{1}) = \mathbf{0}$,

(ii) $f_{\neg}(\mathbf{0}) = \mathbf{1}$

jest 1-argumentową funkcją prawdziwościową.

Przykład 4.2. Funkcja $f_{\wedge}$: $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\} \times \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\} \mapsto \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ określona przez równości:

(i) $f_{\wedge}(\mathbf{1}, \mathbf{1}) = \mathbf{1}$,

(ii) $f_{\wedge}(\mathbf{1}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$,

(iii) $f_{\wedge}(\mathbf{0}, \mathbf{1}) = \mathbf{0}$,

(iv) $f_{\wedge}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$

jest 2-argumentową funkcją prawdziwościową.

Funkcję $f_{\wedge}$ można też określić przy pomocy każdej z następujących tabelek:

$f_{\wedge}$	**1**	**0**
1	**1**	**0**
0	**0**	**0**

$f_{\wedge}$		
1	**1**	**1**
1	**0**	**0**
0	**1**	**0**
0	**0**	**0**

Przykład 4.3. Funkcje $f_{\rightarrow}$, $f_{\vee}$, $f_{\leftrightarrow}$ określone przez tabelki:

$f_{\rightarrow}$	**1**	**0**		$f_{\vee}$	**1**	**0**		$f_{\leftrightarrow}$	**1**	**0**
1	**1**	**0**		**1**	**1**	**1**		**1**	**1**	**0**
0	**1**	**1**		**0**	**1**	**0**		**0**	**0**	**1**

są 2-argumentowymi funkcjami prawdziwościowymi.

Funkcje $f_{\wedge}$, $f_{\rightarrow}$, $f_{\vee}$, $f_{\leftrightarrow}$ charakteryzują, kolejno, semantyczne własności spójników $\wedge$, $\rightarrow$, $\vee$, $\leftrightarrow$. Funkcja $f_{\neg}$ charakteryzuje semantycznie spójnik negacji $\neg$. I tę funkcję można określić przy pomocy tabelki:

$f_{\neg}$	
1	**0**
0	**1**

Definicja 4.5. Wartościowaniem *nazywamy każdą funkcję* $\mathbf{v}: FORM \mapsto \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ *taką, że*:

(i) *dla każdej zmiennej zdaniowej* z: $\mathbf{v}(z) = \mathbf{1}$ *albo* $\mathbf{v}(z) = \mathbf{0}$;

(ii) $\mathbf{v}(\neg A) = \mathbf{1}$ *wtw* $\mathbf{v}(A) = \mathbf{0}$;

(iii) $\mathbf{v}(A \wedge B) = \mathbf{1}$ *wtw* $\mathbf{v}(A) = \mathbf{1}$ *oraz* $\mathbf{v}(B) = \mathbf{1}$;

(iv) $\mathbf{v}(A \vee B) = \mathbf{1}$ *wtw* $\mathbf{v}(A) = \mathbf{1}$ *lub* $\mathbf{v}(B) = \mathbf{1}$;

(v) $\mathbf{v}(A \rightarrow B) = \mathbf{1}$ *wtw* $\mathbf{v}(A) = \mathbf{0}$ *lub* $\mathbf{v}(B) = \mathbf{1}$;

(vi) $\mathbf{v}(A \leftrightarrow B) = \mathbf{1}$ *wtw* $\mathbf{v}(A) = \mathbf{v}(B)$.

Komentarz: Gdy warunek z prawej strony równości (ii) – (vi) nie jest spełniony, to wartość odpowiedniej formuły przy wartościowaniu ***v*** wynosi rzecz jasna **0**.

Warunek (i) jest redundantny, jako że wartościowanie jest funkcją ze zbioru *FORM* w zbiór $\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$, a $VAR \subset FORM$. Jednakże brak redundancji nie zawsze sprzyja jasności.

Dane, konkretne wartościowanie przyporządkowuje każdej formule dokładnie jedną wartość logiczną: **0** lub **1**.

Wniosek 4.1. *Nie istnieje wartościowanie, przy którym wartością danej formuły są zarówno* **1**, *jak i* **0**.

Jest oczywiste, że istnieje nieskończenie wiele wartościowań.

Dygresja: Czasami obok pojęcia wartościowania wprowadza się też osobne pojęcie *wartościowania zmiennych*. Wartościowanie zmiennych jest funkcją przyporządkowującą każdej zmiennej zdaniowej jakąś wartość logiczną. Jednakże wartościowanie rozumiane w sensie definicji 4.5 również przyporządkowuje wartości logiczne wszystkim zmiennym zdaniowym, albowiem wartościowanie przyporządkowuje każdej formule wartość logiczną, a każda zmienna jest formułą.

Dla dociekliwych: Wartościowaniem zmiennych zdaniowych nazywamy każdą funkcję $\boldsymbol{v}^{\#}$: $VAR \mapsto \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$. Jest oczywiste, że każde wartościowanie zmiennych zdaniowych można rozszerzyć do dokładnie jednego wartościowania formuł $\boldsymbol{v}$, mianowicie takiego, przy którym $\boldsymbol{v}(z) = \boldsymbol{v}^{\#}(z)$ dla każdej zmiennej zdaniowej.

Nb. zauważmy, że litera „*z*” użyta w definicji 4.5 i w powyższym sformułowaniu nie jest zmienną zdaniową, lecz jest metajęzykową zmienną przebiegającą zbiór zmiennych zdaniowych.

Związek między zdefiniowanymi wyżej funkcjami prawdziwościowymi $f_\neg$, $f_\wedge$, $f_\vee$, $f_\to$, $f_\leftrightarrow$ a wartościowaniami jest następujący:

Wniosek 4.2. *Niech* $\boldsymbol{v}$ *będzie dowolnym wartościowaniem*.

(i) $\boldsymbol{v}(\neg A) = f_\neg(\boldsymbol{v}(A))$,

(ii) $\boldsymbol{v}(A \wedge B) = f_\wedge(\boldsymbol{v}(A), \boldsymbol{v}(B))$,

(iii) $\boldsymbol{v}(A \vee B) = f_\vee(\boldsymbol{v}(A), \boldsymbol{v}(B))$,

(iv) $\boldsymbol{v}(A \to B) = f_\to(\boldsymbol{v}(A), \boldsymbol{v}(B))$,

(v) $\boldsymbol{v}(A \leftrightarrow B) = f_\leftrightarrow(\boldsymbol{v}(A), \boldsymbol{v}(B))$.

Obliczanie wartości formuły przy wartościowaniu

Aby obliczyć wartość formuły A przy danym wartościowaniu $\boldsymbol{v}$, nie trzeba znać wartości wszystkich zmiennych zdaniowych przy tym wartościowaniu. *Wystarczy znać wartości logiczne przyporządkowane przez* $\boldsymbol{v}$ *zmiennym występującym w analizowanej formule* A. Jest tak dlatego, że zachodzi:

Twierdzenie 4.1. *Niech* A *będzie formułą, natomiast* $\boldsymbol{v}$ *i* $\boldsymbol{v}^*$ *będą wartościowaniami takimi, że*:

($) *dla dowolnej zmiennej zdaniowej* z *występującej w formule* A,

$$\boldsymbol{v}(z) = \boldsymbol{v}^*(z).$$

Wówczas $\boldsymbol{v}(A) = \boldsymbol{v}^*(A)$.

Z twierdzenia 4.1 wynika, iż wartość formuły przy danym wartościowaniu *nie zależy* od wartości (przy tym wartościowaniu) zmiennych zdaniowych nie występujących w analizowanej formule: istotne są tylko wartości zmiennych występujących w rozważanej formule.

Przykład 4.4. Niech $\boldsymbol{v}$ będzie wartościowaniem takim, że $\boldsymbol{v}(p) = \mathbf{1}$ oraz $\boldsymbol{v}(q) = \mathbf{0}$. Niech A będzie formułą $p \to q \wedge p$. Liczymy krok po kroku:

$\boldsymbol{v}(p \to q \wedge p)$

$= f_{\to}(\boldsymbol{v}(p), \boldsymbol{v}(q \wedge p))$ (bo zachodzi $\boldsymbol{v}(A \to B) = \boldsymbol{f}_{\to}(\boldsymbol{v}(A), \boldsymbol{v}(B))$)

$= f_{\to}(\boldsymbol{v}(p), f_{\wedge}(\boldsymbol{v}(q), v(p)))$ (bo zachodzi $\boldsymbol{v}(A \wedge B) = f_{\wedge}(\boldsymbol{v}(A), \boldsymbol{v}(B))$)

$= f_{\to}(\mathbf{1}, f_{\wedge}(\mathbf{0}, \mathbf{1}))$ (bo $\boldsymbol{v}(p) = \mathbf{1}$ i $\boldsymbol{v}(q) = \mathbf{0}$)

$= f_{\to}(\mathbf{1}, \mathbf{0})$ (bo $f_{\wedge}(\mathbf{0}, \mathbf{1}) = \mathbf{0}$)

$= \mathbf{0}$ (bo $f_{\to}(\mathbf{1}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$).

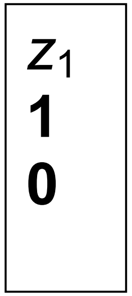
To samo możemy zrobić szybciej, wypisując odpowiedni wiersz tabelki zerojedynkowej:

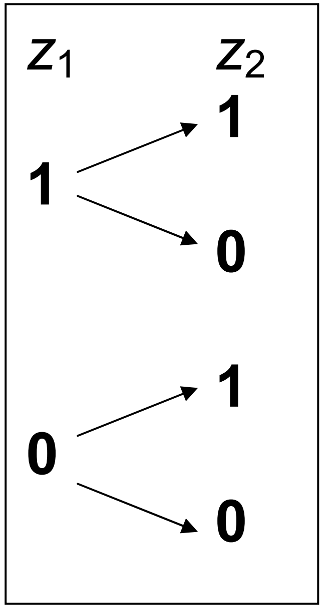
p	q	$q \wedge p$	$p \to q \wedge p$
1	**0**	**0**	**0**

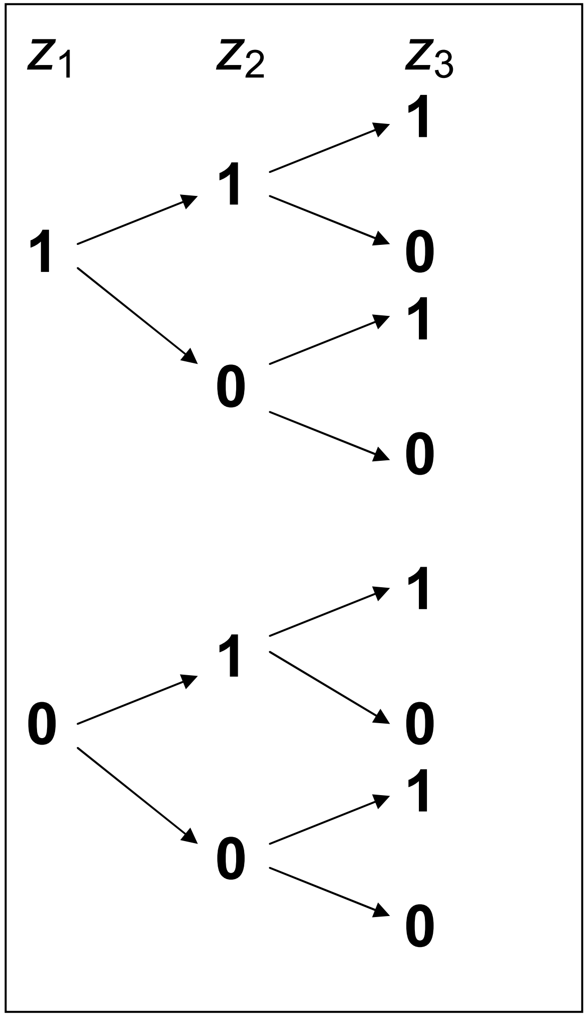
Definicja 4.6. *Formuła A jest* tautologią *KRZ wtw dla każdego wartościowania* **v** *zachodzi* **v**(A) = **1**.

Wartościowań jest nieskończenie wiele. Jednakże aby sprawdzić, czy formuła jest tautologią, nie musimy wcale dokonywać nieskończenie wielu obliczeń.

Niech A będzie formułą, w której występuje dokładnie n różnych między sobą zmiennych zdaniowych. Oznaczmy je symbolami z_1, z_2, ..., z_n. Ogół wartościowań możemy podzielić na dwie klasy: do pierwszej należą te, przy których wartością zmiennej z_1 jest **1**, do drugiej te, przy których wartością z_1 jest **0**. Ogół wartościowań z pierwszej klasy możemy dalej podzielić z uwagi na wartość zmiennej z_2, i podobnie dla wartościowań z drugiej klasy. Kontynuując postępowanie względem kolejnych zmiennych z_3, ..., z_n, otrzymamy w efekcie 2^n różnych klas wartościowań.


z_1
1
0


z_1
z_2
1
0
1
0
1
0


z_1
z_2
z_3
1
0
1
0
1
0
1
0
1
0
1
0
1
0

Teraz wybieramy dokładnie jedno wartościowanie z każdej wyróżnionej klasy i badamy, jaka jest wartość formuły przy tym wartościowaniu. Gdy w każdym rozważanym przypadku otrzymamy wartość **1**, formuła jest tautologią. Tak więc aby wykazać, że formuła o n zmiennych jest tautologią, wystarczy dokonać 2^n sprawdzeń.

Znane Państwu tabelki zerojedynkowe służą właśnie do mechanizacji rozumowania powyższego typu.

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$(p \to q) \wedge p \to q$
1	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**1**
0	**1**	**1**	**0**	**1**
0	**0**	**1**	**0**	**1**

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r)$	$p \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**
1	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**
0	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
0	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

Budowanie tabelki zerojedynkowej może być, mówiąc eufemistycznie, żmudnym zajęciem. Zwykle – chociaż nie zawsze – lepiej jest skorzystać z rozumowania nie wprost.

Istota rozumowania polega tu na tym, że zakładamy, iż istnieje wartościowanie ***v***, przy którym analizowana formuła *A* ma wartość **0**, tj. ***v***(*A*) = **0**. Gdy takie założenie doprowadzi nas do sprzeczności, wnosimy stąd, że *A* jest tautologią. Rozumowanie prowadzimy w metajęzyku i korzystamy w nim z definicji pojęcia wartościowania, wniosku 4.1 / wniosku 4.2 oraz z definicji odpowiednich funkcji prawdziwościowych.

Przykład 4.5. Zakładamy, że istnieje wartościowanie $\boldsymbol{v}$ takie, że:

$$\boldsymbol{v}((p \to q) \wedge p \to q) = \mathbf{0}.$$

1. $\boldsymbol{v}$ jest wartościowaniem	(założenie)
2. $\boldsymbol{v}((p \to q) \wedge p \to q) = \mathbf{0}$	(założenie)
3. $\boldsymbol{v}((p \to q) \wedge p) = \mathbf{1}$	(z (2))
4. $\boldsymbol{v}(q) = \mathbf{0}$	(z (2))
5. $\boldsymbol{v}(p \to q) = \mathbf{1}$	(z (3))
6. $\boldsymbol{v}(p) = \mathbf{1}$	(z (3))
7. $\boldsymbol{v}(q) = \mathbf{1}$	(z (5) i (6))
8. $\boldsymbol{v}$ nie jest wartościowaniem	(z (7) i (4) z uwagi na Wniosek 4.1)

sprzeczność (1) i (8) !!! Zatem dla każdego wartościowania $\boldsymbol{v}$ mamy:

$\boldsymbol{v}((p \to q) \wedge p \to q) = \mathbf{1}$. Analizowana formuła jest tautologią.

Przykład 4.5.* Zakładamy, że istnieje wartościowanie $\boldsymbol{v}$ takie, że:

$$\boldsymbol{v}((p \to q) \wedge p \to q) = \mathbf{0}.$$

1. $\boldsymbol{v}((p \to q) \wedge p \to q) = \mathbf{0}$ (założenie)
2. $\boldsymbol{v}((p \to q) \wedge p) = \mathbf{1}$ (z (1))
3. $\boldsymbol{v}(q) = \mathbf{0}$ (z (1))
4. $\boldsymbol{v}(p \to q) = \mathbf{1}$ (z (2))
5. $\boldsymbol{v}(p) = \mathbf{1}$ (z (2))
6. $\boldsymbol{v}(q) = \mathbf{1}$ (z (5) i (4))

sprzeczność (3) i (6) !!! Zatem dla każdego wartościowania $\boldsymbol{v}$ mamy:
$\boldsymbol{v}((p \to q) \wedge p \to q) = \mathbf{1}$. Analizowana formuła jest tautologią.

Przykład 4.6. Zakładamy, że istnieje wartościowanie $\boldsymbol{v}$ takie, że:

$$\boldsymbol{v}((p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)) = \mathbf{0}.$$

1. $\boldsymbol{v}$ jest wartościowaniem	(założenie)
2. $\boldsymbol{v}((p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)) = \mathbf{0}$	(założenie)
3. $\boldsymbol{v}(p \leftrightarrow q) = \mathbf{1}$	(z (2))
4. $\boldsymbol{v}(p \rightarrow q) = \mathbf{0}$	(z (2))
5. $\boldsymbol{v}(p) = \mathbf{1}$	(z (4))
6. $\boldsymbol{v}(q) = \mathbf{0}$	(z (4))
7. $\boldsymbol{v}(p \leftrightarrow q) = \mathbf{0}$	(z (5) i (6))
8. $\boldsymbol{v}$ nie jest wartościowaniem	(z (7) i (4) z uwagi na Wniosek 4.1)

sprzeczność (1) i (8) !!! Zatem analizowana formuła jest tautologią.

Przykład 4.6*. Zakładamy, że istnieje wartościowanie $\boldsymbol{v}$ takie, że:

$$\boldsymbol{v}((p \leftrightarrow q) \to (p \to q)) = \mathbf{0}.$$

1. $\boldsymbol{v}((p \leftrightarrow q) \to (p \to q)) = \mathbf{0}$	(założenie)
2. $\boldsymbol{v}(p \leftrightarrow q) = \mathbf{1}$	(z (1))
3. $\boldsymbol{v}(p \to q) = \mathbf{0}$	(z (1))
4. $\boldsymbol{v}(p) = \mathbf{1}$	(z (3))
5. $\boldsymbol{v}(q) = \mathbf{0}$	(z (3))
6. $\boldsymbol{v}(p \leftrightarrow q) = \mathbf{0}$	(z (4) i (5))

sprzeczność (2) i (6) !!! Zatem analizowana formuła jest tautologią.

Przykład 4.7. Zakładamy, że istnieje wartościowanie $\boldsymbol{v}$ takie, że:

$$\boldsymbol{v}(\neg(p \vee q) \rightarrow \neg p \wedge \neg q)) = \mathbf{0}.$$

1. $\boldsymbol{v}$ jest wartościowaniem (założenie)
2. $\boldsymbol{v}(\neg(p \vee q) \rightarrow \neg p \wedge \neg q) = \mathbf{0}$ (założenie)
3. $\boldsymbol{v}(\neg(p \vee q)) = \mathbf{1}$ (z (2))
4. $\boldsymbol{v}(p \vee q) = \mathbf{0}$ (z (3))
5. $\boldsymbol{v}(p) = \mathbf{0}$ (z (4))
6. $\boldsymbol{v}(q) = \mathbf{0}$ (z (4))
7. $\boldsymbol{v}(\neg p \wedge \neg q) = \mathbf{0}$ (z (2))

8.1. $\boldsymbol{v}(\neg p) = \mathbf{0}$ (z (7))	8.2. $\boldsymbol{v}(\neg q) = \mathbf{0}$ (z (7))
9.1. $\boldsymbol{v}(p) = \mathbf{1}$ (z (8.1))	9.2. $\boldsymbol{v}(q) = \mathbf{1}$ (z (8.2))
10.1. $\boldsymbol{v}$ nie jest wartościowaniem	10.2. $\boldsymbol{v}$ nie jest wartościowaniem

Na obu gałęziach otrzymaliśmy sprzeczność. Formuła jest tautologią.

Przykład 4.7*. Zakładamy, że istnieje wartościowanie ***v*** takie, że:

$$\boldsymbol{v}(p \vee q \to (\neg p \to q)) = \mathbf{0}.$$

1. $\boldsymbol{v}(\neg(p \vee q) \to \neg p \wedge \neg q) = \mathbf{0}$ (założenie)
2. $\boldsymbol{v}(\neg(p \vee q)) = \mathbf{1}$ (z (1))
3. $\boldsymbol{v}(p \vee q) = \mathbf{0}$ (z (2))
4. $\boldsymbol{v}(p) = \mathbf{0}$ (z (3))
5. $\boldsymbol{v}(q) = \mathbf{0}$ (z (3))
6. $\boldsymbol{v}(\neg p \wedge \neg q) = \mathbf{0}$ (z (1))

7.1. $\boldsymbol{v}(\neg p) = \mathbf{0}$ (z (6))	7.2. $\boldsymbol{v}(\neg q) = \mathbf{0}$ (z (6))
8.1. $\boldsymbol{v}(p) = \mathbf{1}$ (z (7.1))	8.2. $\boldsymbol{v}(q) = \mathbf{1}$ (z (7.2))

Na obu gałęziach otrzymaliśmy sprzeczność. Formuła jest tautologią.

Przykład 4.9. Zakładamy, że istnieje wartościowanie $\boldsymbol{v}$ takie, że:

$$\boldsymbol{v}(p \vee q \rightarrow p) = \mathbf{0}.$$

1. $\boldsymbol{v}$ jest wartościowaniem (założenie)

2. $\boldsymbol{v}(p \vee q \rightarrow p) = \mathbf{0}$ (założenie)

3. $\boldsymbol{v}(p) = \mathbf{0}$ (z (2))

4. $\boldsymbol{v}(p \vee q) = \mathbf{1}$ (z (2))

5.1. $\boldsymbol{v}(p) = \mathbf{1}$ (z (4))

5.2. $\boldsymbol{v}(q) = \mathbf{1}$ (z (4))

6.1. $\boldsymbol{v}$ nie jest wartościowaniem (z (5.1) i (3))

Nie jest tak, że na każdej gałęzi otrzymaliśmy sprzeczność. Formuła nie jest tautologią.

Niejako przy okazji ustaliliśmy, że analizowana formuła przyjmuje wartość $\mathbf{0}$ przy każdym wartościowaniu $\boldsymbol{v}$ takim, że $\boldsymbol{v}(p) = \mathbf{0}$ i $\boldsymbol{v}(q) = \mathbf{1}$.

Notacja: Zamiast „formuła *B* wynika logicznie na gruncie *KRZ* z formuły *A*” piszemy krótko: $A \models_{KRZ} B$.

Definicja 4.7. (wynikanie logiczne – na gruncie *KRZ* - formuły z formuły) $A \models_{KRZ} B$ *wtw dla każdego wartościowania* ***v*** *zachodzi*: (*) *jeżeli* $\boldsymbol{v}(A) = \mathbf{1}$, to $\boldsymbol{v}(B) = \mathbf{1}$.

Innymi słowy, formuła *B* wynika logicznie na gruncie *KRZ* z formuły *A* wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje takie wartościowanie, przy którym wartością formuły *A* jest prawda, a wartością formuły *B* jest fałsz.

Komentarz (dla „humanistów”): Zauważmy, że podana definicja nie przesądza, że formuła *A* jest prawdą przy wartościowaniu ***v***. Nie mówi ona o żadnym konkretnym wartościowaniu, lecz o warunku, który ma być spełniony z uwagi na wszystkie wartościowania.

Twierdzenie 4.2. *$A \models_{KRZ} B$ wtw formuła $A \rightarrow B$ jest tautologią KRZ.*

Dowód: Zapraszam na wykład :).

Komentarz: Aby wykazać, że B wynika logicznie z A, wystarczy zatem wykazać, że $A \rightarrow B$ jest tautologią. Dysponując metodą stwierdzania tautologiczności dysponujemy zarazem metodą wykazywania, że zachodzi wynikanie logiczne formuły z formuły.

Przykład 4.9. Formuła:

$$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$$

jest tautologią *KRZ* zwaną *prawem transpozycji*. Na mocy twierdzenia 4.2 mamy:

$$p \to q \models_{KRZ} \neg q \to \neg p$$

Tak więc jeśli ktoś wnioskuje zgodnie ze schematem:

$$\frac{p \to q}{\neg q \to \neg p}$$

to jego wniosek wynika logicznie z przesłanki. Zatem wniosek musi być prawdziwy jeśli tylko przesłanka jest prawdziwa.

Wynikanie logiczne na gruncie KRZ

Wszystkie tautologie *KRZ*, w których implikacja $\rightarrow$ jest spójnikiem głównym, niosą informacje o wynikaniu logicznym następnika z poprzednika. Oto lista wybranych tautologii tego rodzaju; w nawiasach podaję ich nazwy.

$p \wedge q \rightarrow p$	(prawo symplifikacji)
$p \rightarrow p \vee q$	(prawo addycji)
$\neg\neg p \rightarrow p$	(prawa podwójnej negacji)
$p \rightarrow \neg\neg p$	
$(p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$	(prawo eksportacji)
$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$	(prawo importacji)
$p \wedge \neg p \rightarrow q$	(prawo Dunsa Scotusa)
$(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$	(*modus ponendo ponens*)
$(p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p$	(*modus tollendo tollens*)
$(p \vee q) \wedge \neg p \rightarrow q$	(*modus tollendo ponens*)

Rozważmy teraz wynikanie formuły ze zbioru formuł.

Notacja: Zamiast „formuła *B* wynika logicznie na gruncie *KRZ* ze zbioru formuł *X*" piszemy krótko: $X \models_{KRZ} B$.

Definicja 4.8. (wynikanie logiczne - na gruncie *KRZ* – formuły ze zbiory formuł)

$X \models_{KRZ} B$ *wtw dla każdego wartościowania* $\mathbf{v}$ *zachodzi*:

(*) *jeżeli* $\mathbf{v}(A) = \mathbf{1}$ *dla każdego* $A \in X$, *to* $\mathbf{v}(B) = \mathbf{1}$.

Innymi słowy, formuła *B* wynika (logicznie na gruncie *KRZ*) ze zbioru formuł *X* wtedy i tylko wtedy, gdy <u>nie istnieje</u> takie wartościowanie, przy którym wszystkie formuły w *X* są prawdą, a *B* jest fałszem.

Konwencja: Zamiast $\forall A \in X\ (\mathbf{v}(A) = \mathbf{1})$ piszemy czasami: $\mathbf{v}(X) = \mathbf{1}$. Pisząc tak, mamy na myśli to, że *wszystkie* formuły ze zbioru formuł ***X*** są prawdziwe przy wartościowaniu ***v***. Proszę zapamiętać, że czytanie napisu $\mathbf{v}(X) = \mathbf{1}$ jako „zbiór *X* jest prawdziwy przy wartościowaniu ***v***" nie ma sensu: tylko pojedyncze formuły mogą być prawdziwe czy fałszywe przy wartościowaniach.

Zbiór X może być również zbiorem jednoelementowym, powiedzmy $\{A\}$. Oczywistą konsekwencją podanych definicji jest:

Wniosek 4.3. $\{A\} \models_{KRZ} B$ *wtw* $A \models_{KRZ} B$.

Wynikanie formuły z formuły moglibyśmy zatem zdefiniować jako wynikanie formuły z jednoelementowego zbioru formuł. Nie zachodzi jednak zależność odwrotna.

Przykład 4.10. Jest tak, że $\{p \to q, p\} \models_{KRZ} q$. Jednakże ani nie jest tak, że $p \to q \models_{KRZ} q$, ani nie jest tak, że $p \models_{KRZ} q$.

Notacja: Zamiast $A_1 \wedge (A_2 \wedge \ldots (A_{n-1} \wedge A_n)\ldots))$ piszemy $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$.

Twierdzenie 4.3. $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \models_{KRZ} B$ *wtw*

formuła $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$ *jest tautologią KRZ*.

Dowód: Zapraszam na wykład :).

Tak więc aby wykazać, że formuła B wynika logicznie ze zbioru formuł utworzonego z formuł $A_1, A_2, \ldots, A_n$, wystarczy pokazać, że formuła $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$ jest tautologią *KRZ*. Z drugiej strony, tautologie podpadające pod schemat $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$ niosą informacje o wynikaniu formuły B ze zbioru formuł $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$.

Przykład 4.11.

$$\underbrace{(p \to q)}_{A_1} \wedge \underbrace{p}_{A_2} \to \underbrace{q}_{B}$$

Zatem $\{p \to q, p\} \models_{KRZ} q$.

Przykład 4.12. Każda z podanych niżej formuł jest tautologią podpadającą pod schemat: $A_1 \wedge A_2 \to B$:

$(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$ (prawo sylogizmu hipotetycznego)

$(p \to q) \wedge (p \to r) \to (p \to q \wedge r)$ (prawo mnożenia następników)

$(p \to r) \wedge (q \to r) \to (p \vee q \to r)$ (prawo dodawania poprzedników)

Zatem:

$\{p \to q, q \to r\} \models_{KRZ} p \to r$

$\{p \to q, p \to r\} \models_{KRZ} p \to q \wedge r$

$\{p \to r, q \to r\} \models_{KRZ} p \vee q \to r$

Uwaga: Tautologie te podpadają też pod schemat $A \to B$. Zatem mamy również $(p \to q) \wedge (q \to r) \models_{KRZ} p \to r$, i podobnie w pozostałych przypadkach.

Uwaga końcowa, oparta na przykładzie: Ponieważ formuła $p \to r$ wynika logicznie (na gruncie *KRZ*) ze zbioru formuł $\{p \to q, q \to r\}$, to wnioskowanie przebiegające wedle schematu:

$$\frac{\begin{array}{c} p \to q \\ q \to r \end{array}}{p \to r}$$

ma tę własność, że jeśli obie jego przesłanki są prawdziwe, to wniosek musi być prawdziwy. Innymi słowy, mamy tutaj gwarancję przechodzenia od prawdy do prawdy. Jest to jedyna gwarancja dostarczana przez *KRZ* – sama logika nie dostarcza gwarancji prawdziwości przesłanek[1], a zatem również gwarancji prawdziwości wniosku.

Niby to oczywiste, ale nie zaszkodzi powtórzyć :)

[1] Z wyjątkami, o których na wykładzie.

Literatura:

Chociaż ten wykład dotyczył spraw podstawowych, są one (co może Państwa zdziwić) różnie przedstawiane w różnych podręcznikach. Ujęcia te są jednak równoważne.

W szczególności, pojęcie wartościowania w kontekście *KRZ* rozumie się czasami odmiennie niż na tym wykładzie: za wartościowania uważa się nieskończone ciągi wartości logicznych **0**, **1**. Wtedy trzeba jednak wprowadzić funkcje dwuargumentowe, przyporządkowujące formułom i wartościowaniom wartości logiczne. Przykład takiego podejścia znajdą Państwo w (obowiązującym w Wielkopolsce i na ziemiach przyległych) podręczniku [1].

W anglojęzycznej literaturze przedmiotu przyporządkowanie wartości logicznych zmiennym zdaniowym określa się czasami terminem *assignment* lub *interpretation*. Termin *interpretation* bywa też używany na oznaczenie tego, co nazwaliśmy tutaj wartościowaniem (ang. *valuation*). Tłumacze na język polski przyjmują różnorodne konwencje terminologiczne.

[1] Tadeusz Batóg: *Podstawy logiki*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 1994 (istnieje wiele wydań tej pozycji).

[2] Mordechai Ben-Ari: *Logika matematyczna w informatyce*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2005.

[3] Geoffrey Hunter: *Metalogika*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1982.

[4] Mieczysław Omyła: *Zarys logiki*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1995.

a ponadto praktycznie każdy w miarę zaawansowany podręcznik logiki.