Andrzej Wiśniewski

Logika I

Materiały do wykładu dla studentów kognitywistyki

Wykład 6. Reguły inferencyjne systemu aksjomatycznego Klasycznego Rachunku Zdań

System aksjomatyczny logiki

Budując logikę w postaci systemu aksjomatycznego, musimy scharakteryzować:

1) język sformalizowany, w którym wyrażone będą prawa interesującej nas logiki, oraz wyrażenia tego języka, które uważamy za *poprawnie zbudowane*; takie wyrażenia nazwiemy zwykle formułami języka rozważanej logiki,

2) reguły inferencyjne, które mówią nam, jak *możemy* wyprowadzać formuły z formuł,

3) zbiór aksjomatów budowanej logiki.

Język *KRZ* oraz pojęcie formuły języka *KRZ* (dalej krótko: formuły) zostały scharakteryzowane na wykładzie 4. Zajmijmy się teraz regułami inferencyjnymi.

Uwaga: Istnieje wiele systemów aksjomatycznych *KRZ*. Na początek zajmiemy się jednym z nich. Reguły inferencyjne będą regułami tego właśnie systemu.

Reguła odrywania: Z dwóch formuł, z których pierwsza ma postać implikacji $A \to B$, a druga jest poprzednikiem tej implikacji, tj. formułą A, wolno wyprowadzić formułę B, tj. następnik rozważanej implikacji.

Schematycznie zapisujemy regułę odrywania następująco:

$$\frac{\begin{array}{l} A \to B \\ A \end{array}}{B}$$

Zamiast „reguła odrywania" piszemy krótko RO.

Przykład 6.1.

1. $(p \to (q \to p)) \to ((p \to q) \to (p \to p))$
2. $p \to (q \to p)$
3. $(p \to q) \to (p \to p)$ [1, 2: RO]

Przykład 6.2.

1. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$
2. $p \to q$
3. $q \to r$
4. $(q \to r) \to (p \to r)$ [1, 2: RO]
5. $p \to r$ [4, 3: RO]

Twierdzenie 6.1. (semantyczne twierdzenie o odrywaniu) *Jeżeli formuła postaci $A \to B$ jest tautologią KRZ oraz formuła A jest tautologią KRZ, to formuła B jest tautologią KRZ.*

Dowód: Zapraszam na wykład :)

Widzimy zatem, że reguła odrywania zastosowana do przesłanek będących tautologiami prowadzi do wniosku będącego tautologią.

Nie znaczy to oczywiście, że RO wolno stosować tylko do przesłanek będących tautologiami. W przykładzie 6.1 obie przesłanki były tautologiami, natomiast w przykładzie 6.2 tylko pierwsza przesłanka była tautologią.

Reguła podstawiania

Uwaga: W „oficjalnym” zapisie zmiennymi zdaniowymi są napisy: p_1, p_2, p_3, ... Zmienne zdaniowe należą do alfabetu języka *KRZ*. Pisząc p_i, p_j, p_k, etc., przechodzimy natomiast na poziom *metajęzyka*; wyrażenia takie są w istocie metajęzykowymi zmiennymi, których wartościami są zmienne zdaniowe języka *KRZ.*

Reguła podstawiania: Z formuły A wolno wyprowadzić formułę powstającą z A poprzez zastąpienie zmiennej zdaniowej p_i (na każdym miejscu, gdzie występuje ona w A) formułą B.

Tego rodzaju „konsekwentne zastępowanie” zmiennej zdaniowej p_i w formule A formułą B nazywamy podstawianiem formuły B za zmienną p_i w formule A.

Zamiast „reguła podstawiania” piszemy krótko RP.

Przykład 6.3.

1. $(p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_1))$
2. $((p_2 \wedge p_1) \rightarrow (p_2 \rightarrow (p_2 \wedge p_1)))$ [1 RP: $p_1/(p_2 \wedge p_1)$]

Przykład 6.3.*

1. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
2. $q \wedge p \rightarrow (q \rightarrow q \wedge p)$ [1 RP: $p/q \wedge p$]

Przykład 6.4.

1. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
2. $p \rightarrow (p \rightarrow p)$ [1 RP: q/p]

Aby sformułować regułę podstawiania z większym stopniem precyzji, musimy najpierw zdefiniować operację podstawiania formuły za zmienną w formule. Definicja tego pojęcia jest indukcyjna.

Napis $A[p_i / B]$ skraca wyrażenie „wynik podstawienia formuły B za zmienną p_i w formule A”.

Najprostsze formuły to zmienne zdaniowe. Mamy:

$$(1) \qquad p_k[p_i / B] = \begin{cases} p_k, \text{ gdy } i \neq k \\ B, \text{ gdy } i = k. \end{cases}$$

Komentarz: gdy podstawiamy B za zmienną w formule będącej *właśnie tą zmienną*, otrzymujemy B; w przeciwnym przypadku wynik podstawienia będzie po prostu wyjściową zmienną.

Przykład 6.5.

$$p_1[p_2/(p_3 \wedge p_4)] = p_1$$

jako że $i \neq k$, tj. $2 \neq 1$.

$$p_1[p_1/(p_3 \wedge p_4)] = (p_3 \wedge p_4)$$

ponieważ $i = k$, tj. $1 = 1$.

Przykład 6.5.*

$$p[q/(r \wedge s)] = p$$

$$p[p/(r \wedge s)] = (r \wedge s)$$

Komentarz: W definicji dopuszczamy “paradoksalny” przypadek podstawiania za zmienną „nieobecną”, ponieważ chcemy, aby wynik podstawiania był zawsze określony (w tym „paradoksalnym” przypadku wynik jest po prostu identyczny z wyjściową zmienną).

(2) *Jeżeli A ma postać* $\neg C$, *to* $A[p_i/B] = \neg C[p_i/B]$.

Przykład 6.6. Niech A będzie formułą $\neg p$. Wówczas $C = p$. Niech B będzie formułą $(r \wedge s)$. Mamy:

$$\neg p[p/(r \wedge s)] = \neg(r \wedge s)$$

jako że $p[p/(r \wedge s)] = (r \wedge s)$.

(3) *Jeżeli A ma postać* $(C \to D)$, *to* $A[p_i/B] = (C[p_i/B] \to D[p_i/B])$.

Przykład 6.7. Niech $A = (p \to (q \to p))$. Wówczas $C = p$ oraz $D = (q \to p)$. Niech $B = \neg p$. Mamy:

$$(p \to (q \to p))[p/\neg p] =$$
$$= (p[p/\neg p] \to (q \to p)[p/\neg p]) =$$
$$= (p[p/\neg p] \to (q[p/\neg p] \to p[p/\neg p])) =$$
$$= (\neg p \to (q \to \neg p))$$

(4) *Jeżeli A ma postać* $(C \wedge D)$, *to* $A[p_i/B] = (C[p_i/B] \wedge D[p_i/B])$.

(5) *Jeżeli A ma postać* $(C \vee D)$, *to* $A[p_i/B] = (C[p_i/B] \vee D[p_i/B])$.

(6) *Jeżeli A ma postać* $(C \leftrightarrow D)$, *to* $A[p_i/B] = (C[p_i/B] \leftrightarrow D[p_i/B])$.

Uwaga dla purystów: Gdy mówimy o jakimś przedmiocie, musimy użyć jego nazwy, a nie samego tego przedmiotu. Zasada ta dotyczy wszelkich przedmiotów, w tym również przedmiotów będących wyrażeniami. Gdy mówimy (w metajęzyku) o wyrażeniach pewnego języka przedmiotowego, musimy dysponować zarówno metodą tworzenia nazw konkretnych wyrażeń tego języka, jak i tworzenia nazw dla klas wyrażeń posiadających tę samą formę. Do tego ostatniego celu służą (w logice) tzw. różki Quine'a, mające postać $\ulcorner\ \urcorner$. Przykładowo, napis $\ulcorner(C \wedge D)\urcorner$ jest nazwą dowolnego wyrażenia zbudowanego następująco: lewy nawias – formuła – znak koniunkcji - formuła – prawy nawias. Używając znaków $\ulcorner\ \urcorner$, możemy określić operację podstawiania w sposób zupełnie ścisły. Przykładowo, odpowiednikiem warunku (4) będzie:

(4*) Jeżeli $A = \ulcorner(C \wedge D)\urcorner$, to $A[p_i/B] = \ulcorner(C[p_i/B] \wedge D[p_i/B])\urcorner$

Dla celów tego wykładu taki stopień ścisłości nie jest jednak niezbędny.

Możemy teraz zapisać regułę podstawiania następująco:

$$\frac{A}{A[p_i\,/B]}$$

Prawdziwe jest:

Twierdzenie 6.2. (semantyczne twierdzenie o podstawianiu) *Jeżeli formuła A jest tautologią KRZ, to formuła* $A[p_i\,/B]$ *jest tautologią KRZ.*

Dowód: Zapraszam na wykład :)

Tak więc stosując regułę podstawiania do tautologii, otrzymujemy tautologię.

Reguła podstawiania jest regułą inferencyjną, której stosowanie do tautologii nigdy nie wyprowadzi nas poza zbiór tautologii. Nie jest ona natomiast regułą, której stosowanie gwarantuje wynikanie logiczne wniosku z przesłanki. Oto prosty przykład:

1. p
2. q [1 RP: p/q]

Weźmy teraz wartościowanie $\boldsymbol{v}$ takie, że $\boldsymbol{v}(p) = \mathbf{1}$ oraz $\boldsymbol{v}(q) = \mathbf{0}$. Jest oczywiste, że formuła q <u>nie</u> wynika logicznie na gruncie *KRZ* z formuły p.

Gwarancja przechodzenia od tautologii do tautologii jest jednak dokładnie tym, czego potrzebujemy w konstrukcji systemu aksjomatycznego Klasycznego Rachunku Zdań.

Rozważmy teraz następujący przykład dwukrotnego stosowania reguły RP:

1. $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$

2. $(r \to q) \to (\neg q \to \neg r)$ [1 RP: p/r]

3. $(r \to s) \to (\neg s \to \neg r)$ [2 RP: q/s]

Jest oczywiste, że taki sam wynik uzyskamy poprzez równoczesne podstawienie *r* za *p* oraz *s* za *q* w formule (1):

1. $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$

3*. $(r \to s) \to (\neg s \to \neg r)$ [1 RP: p/r, q/s]

oraz że przejście od (1) do (3*) możemy zawsze "rozbudować" tak, że stosowana jest RP w jej sformułowanej wyżej postaci.

W przypadku „równoczesnego podstawiania" należy jednak zachować należytą staranność w sytuacji, gdy zmienne, za które podstawiamy, występują też w formułach, które są podstawiane. Przykładowo, wynikiem równoczesnego podstawienia w formule:

1. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

za zmienną p formuły $(p \rightarrow q)$, a za zmienną q formuły p będzie oczywiście:

2. $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow (p \rightarrow q))$

a nie:

2.* $(p \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow (p \rightarrow p))$