Andrzej Wiśniewski

Logika I

Materiały do wykładu dla studentów kognitywistyki

Wykłady 7 i 8. Aksjomatyczne ujęcie Klasycznego Rachunku Zdań

Istnieje wiele systemów aksjomatycznych Klasycznego Rachunku Zdań. Systemy te różnią się co do doboru aksjomatów i reguł inferencyjnych. Zajmiemy się tutaj jednym z nich.

Aksjomaty KRZ

Ax.1. $p \to (q \to p)$	***Prawo poprzednika***
Ax.2. $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$	***Prawo (sylogizm) Fregego***
Ax.3. $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$	***Prawo transpozycji***
Ax.4. $\neg\neg p \to p$	***Prawo podwójnego przeczenia***
Ax.5. $p \to \neg\neg p$	***Odwrotne prawo podwójnego przeczenia***
Ax.6. $p \wedge q \to p$	***Prawo symplifikacji***
Ax.7. $p \wedge q \to q$	***Drugie prawo symplifikacji***
Ax.8. $(p \to q) \to ((p \to r) \to (p \to q \wedge r))$	***Prawo mnożenia następników***

Aksjomaty KRZ

Ax.9. $p \to p \vee q$ — ***Prawo addycji***

Ax.10. $q \to p \vee q$ — ***Drugie prawo addycji***

Ax.11. $(p \to r) \to ((q \to r) \to (p \vee q \to r))$ — ***Prawo dodawania poprzedników***

Ax.12. $(p \leftrightarrow q) \to (p \to q)$ — ***Aksjomaty równoważności***

Ax.13. $(p \leftrightarrow q) \to (q \to p)$

Ax.14. $(p \to q) \to ((q \to p) \to (p \leftrightarrow q))$

Pierwotne reguły inferencyjne

Reguła odrywania

RO: $$\frac{A \to B \qquad A}{B}$$

Reguła podstawiania

RP: $$\frac{A}{A[p_i/B]}$$

Teza 1. $p \to p$ ***Prawo tożsamości***

1.	$p \to (q \to p)$	[Ax. 1]
2.	$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$	[Ax. 2]
3.	$(p \to (q \to p)) \to ((p \to q) \to (p \to p))$	[2 RP: r / p]
4.	$(p \to q) \to (p \to p)$	[3,1 RO]
5.	$(p \to (q \to p)) \to (p \to p)$	[4 RP: $q / (q \to p)$]
6.	$p \to p$	[5,1 RO]

Komentarz. Dowodem jest powyższy ciąg formuł. Numery po lewej stronie formuł oraz to, co zostało zapisane w nawiasach kwadratowych po prawej stronie formuł, nie należą do dowodu, lecz stanowią *informację dowodową*, która informuje *nas*, jaka reguła została zastosowana i do czego, oraz z jakich aksjomatów korzystamy. Opatrzenie dowodu informacją dowodową nie jest obligatoryjne. Dalej z powodów czysto wizualnych zamiast nawiasów kwadratowych stosujemy czasami ramki.

Terminologia. Mówiąc o formułach, będę tu miał na myśli formuły języka *KRZ*. Mówiąc o aksjomatach, mam na myśli aksjomaty *KRZ* podane przed chwilą.

Dowodem formuły *A* w oparciu o zbiór aksjomatów *nazywamy skończony ciąg formuł, którego ostatnim wyrazem jest formuła A, taki, że dowolna formuła będąca jego wyrazem:*

(1) *jest aksjomatem, lub*

(2) *powstaje z jakiegoś wcześniejszego wyrazu tego ciągu poprzez zastosowanie reguły podstawiania, lub*

(3) *powstaje z jakichś wcześniejszych wyrazów tego ciągu poprzez zastosowanie reguły odrywania.*

Komentarz. Czasami wprowadza się ogólniejsze pojęcie „dowodu formuły *A* w oparciu o zbiór formuł *X*", gdzie *X* nie musi być zbiorem aksjomatów. My w takim przypadku będziemy mówić o *derywacji* (lub *wyprowadzeniu*) formuły *A* ze zbioru formuł *X*.

W podanej definicji odwołaliśmy się do reguł podstawiania i odrywania, ponieważ są one pierwotnymi regułami inferencyjnymi prezentowanego systemu aksjomatycznego *KRZ*. Gdy rozważamy system aksjomatyczny o innych regułach, musimy w definicji dowodu odwołać się do tych reguł.

Wersja dla purystów. Precyzyjna definicja pojęcia dowodu - dla przedstawionego tu systemu aksjomatycznego *KRZ* - wygląda następująco (symbolem ***Arz*** oznaczamy zbiór aksjomatów):

Dowodem formuły *A* w oparciu o ***Arz*** nazywamy każdy skończony ciąg formuł $D_1, D_2, \ldots, D_n$ taki, że $D_n = A$ oraz dla każdego wskaźnika $k \leq n$ spełniony jest przynajmniej jeden z następujących warunków:

(1) $D_k \in$ ***Arz***;

(2) istnieją: wskaźnik $j < k$, formuła B oraz wskaźnik i takie, że D_k ma postać $D_j[p_i/B]$;

(3) istnieją takie i, j, że $i < k$, $j < k$ oraz D_j ma postać $D_i \rightarrow D_k$.

Podobnie definiujemy pojęcie derywacji/wyprowadzenia formuły *A* ze zbioru formuł *X* (wystarczy wstawić *X* za ***Arz***).

Formułę nazywamy tezą KRZ wtw jest ona aksjomatem KRZ lub ma co najmniej jeden dowód w oparciu o aksjomaty KRZ.

Dla spostrzegawczych: Ciąg jednowyrazowy <*A*>, gdzie *A* jest aksjomatem, ma wszelkie znamiona dowodu formuły *A* w oparciu o aksjomaty. Tak więc w definicji tezy wystarczyłoby sformułowanie „ma co najmniej jeden dowód w oparciu o aksjomaty".

Można łatwo udowodnić:

Twierdzenie 7.1.

Każda teza KRZ jest tautologią KRZ.

Szkic dowodu:

Aksjomaty zostały tak dobrane, że każdy z nich jest tautologią *KRZ*.

Zgodnie z semantycznymi twierdzeniami o podstawianiu i odrywaniu, stosując RO czy RP do przesłanek będących tautologiami *KRZ* otrzymujemy wnioski będące tautologiami *KRZ*.

Gdy budujemy dowód w oparciu o aksjomaty *KRZ*, przesłanki są aksjomatami *KRZ*, a stosowane reguły to właśnie RO i RP.

Teza 2. $p \leftrightarrow \neg\neg p$

1.	$p \rightarrow \neg\neg p$	[Ax. 5]
2.	$\neg\neg p \rightarrow p$	[Ax. 4]
3.	$(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow (p \leftrightarrow q))$	[Ax. 14]
4.	$(p \rightarrow \neg\neg p) \rightarrow ((\neg\neg p \rightarrow p) \rightarrow (p \leftrightarrow \neg\neg p))$	[3 RP: q / $\neg\neg p$]
5.	$(\neg\neg p \rightarrow p) \rightarrow (p \leftrightarrow \neg\neg p)$	[4,1 RO]
6.	$p \leftrightarrow \neg\neg p$	[5,2 RO]

Teza 3. $p \leftrightarrow p$ *Prawo tożsamości w mocnej postaci*

1. $p \rightarrow p$ [Teza 1]
2. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow (p \leftrightarrow q))$ [Ax. 14]
3. $(p \rightarrow p) \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow (p \leftrightarrow p))$ [2 RP: q / p]
4. $(p \rightarrow p) \rightarrow (p \leftrightarrow p)$ [3,1 RO]
5. $p \leftrightarrow p$ [4,1 RO]

Komentarz: Powyższy ciąg formuł nie jest, ściśle rzecz biorąc, dowodem w oparciu o aksjomaty, ponieważ że w charakterze przesłanki użyliśmy tezy uprzednio udowodnionej. Jednakże każdy taki ciąg można łatwo przekształcić w dowód; w tym celu wystarczy „uzupełnić" ciąg o dowód tezy, z której korzystamy; przykładowo, dowód tezy $p \leftrightarrow p$ (w oparciu o aksjomaty) otrzymujemy poprzez wstawienie do powyższego ciągu dowodu formuły $p \rightarrow p$ (podanego wcześniej) zamiast tej formuły.

Derywacje, w których przesłankami są tezy uprzednio udowodnione, będziemy również nazywać dowodami w oparciu o aksjomaty.

Terminologia: Zamiast „dowód w oparciu o aksjomaty" mówimy dalej krótko „dowód".

Teza 4. $p \wedge q \to q \wedge p$

1. $(p \to q) \to ((p \to r) \to (p \to q \wedge r))$ [Ax. 8]
2. $(p \wedge q \to q) \to ((p \wedge q \to r) \to (p \wedge q \to q \wedge r))$ [1 RP: p / $p \wedge q$]
3. $p \wedge q \to q$ [Ax. 7]
4. $(p \wedge q \to r) \to (p \wedge q \to q \wedge r)$ [2,3 RO]
5. $(p \wedge q \to p) \to (p \wedge q \to q \wedge p)$ [4 RP: r / p]
6. $p \wedge q \to p$ [Ax. 6]
7. $p \wedge q \to q \wedge p$ [5,6 RO]

Teza 5. $q \wedge p \rightarrow p \wedge q$

1. $p \wedge q \rightarrow q \wedge p$	[Teza 4]
2. $r \wedge q \rightarrow q \wedge r$	[1 RP: p / r]
3. $r \wedge p \rightarrow p \wedge r$	[2 RP: q / p]
4. $q \wedge p \rightarrow p \wedge q$	[4 RP: r / p]

Uwaga: Zamiast przemianowywać zmienne i następnie kolejno podstawiać, można dokonać *jednoczesnego podstawienia*.

1. $p \wedge q \rightarrow q \wedge p$	[Teza 4]
2. $q \wedge p \rightarrow p \wedge q$	[1 RP: p / q, q / p]

To, co dostaniemy poprzez jednoczesne podstawienie, dostalibyśmy również poprzez stosowanie, krok po kroku, „kanonicznej" reguły podstawiania RP przy odpowiednim przemianowywaniu zmiennych. Z tego powodu będziemy dalej używać terminu „dowód" także wówczas, gdy dokonane zostały podstawienia jednoczesne.

Teza 6. $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$ *Prawo przemienności koniunkcji*

1. $p \wedge q \rightarrow q \wedge p$ [Teza 4]
2. $q \wedge p \rightarrow p \wedge q$ [Teza 5]
3. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow (p \leftrightarrow q))$ [Ax. 14]
4. $(p \wedge q \rightarrow q \wedge p) \rightarrow ((q \wedge p \rightarrow p \wedge q) \rightarrow (p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p))$
   [3 RP: p / $p \wedge q$, q / $q \wedge p$]
5. $(q \wedge p \rightarrow p \wedge q) \rightarrow (p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p)$ [4,1 RO]
6. $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$ [5,2 RO]

Komentarz: Zauważmy, że w dowodach tez 2, 3 i 6 w podobny sposób przechodziliśmy od przesłanek postaci $A \rightarrow B$ oraz $B \rightarrow A$ do wniosku postaci $A \leftrightarrow B$; po prostu dokonywaliśmy odpowiednich podstawień w aksjomacie 14, a następnie dwukrotnie stosowaliśmy regułę RO.

Teza 7. $\neg p \rightarrow \neg(p \wedge q)$

1. $p \wedge q \rightarrow p$ [Ax. 6]
2. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ [Ax. 3]
3. $(p \wedge q \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg(p \wedge q))$ [2 RP: p / $p \wedge q$, q / p]
4. $\neg p \rightarrow \neg(p \wedge q)$ [3,1 RO]

Teza 8. $\neg q \rightarrow \neg(p \wedge q)$

1. $p \wedge q \rightarrow q$ [Ax. 7]
2. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ [Ax. 3]
3. $(p \wedge q \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg(p \wedge q))$ [2 RP: p / $p \wedge q$]
4. $\neg q \rightarrow \neg(p \wedge q)$ [3,1 RO]

Teza 9. $\neg p \vee \neg q \to \neg(p \wedge q)$

1. $\neg p \to \neg(p \wedge q)$ [Teza 7]
2. $\neg q \to \neg(p \wedge q)$ [Teza 8]
3. $(p \to r) \to ((q \to r) \to (p \vee q \to r))$ [Ax. 11]
4. $(\neg p \to \neg(p \wedge q)) \to ((\neg q \to \neg(p \wedge q)) \to (\neg p \vee \neg q \to \neg(p \wedge q)))$
   [3 RP: $p / \neg p$, $q / \neg q$, $r / \neg(p \wedge q)$]
5. $(\neg q \to \neg(p \wedge q)) \to (\neg p \vee \neg q \to \neg(p \wedge q))$ [4,1 RO]
6. $\neg p \vee \neg q \to \neg(p \wedge q)$ [5,2 RO]

Uwaga: W przedstawionych dalej dowodach za zmienne podstawiamy dość „długie” formuły. Aby ułatwić śledzenie toku rozumowania, oznaczam jednakowym kolorem zmienną, za którą podstawiamy oraz formułę podstawianą. Rzecz jasna, ani zmienne, ani formuły „same w sobie” kolorowe nie są :)

Teza 10. $(q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$

1. $p \to (q \to p)$ Ax.1
2. $((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))) \to ((q \to r) \to ((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))))$

   1 RP: p / $((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$, q / $(q \to r)$
3. $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ Ax. 2
4. $((q \to r) \to ((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$ 2,3 RO
5. $((q \to r) \to ((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))) \to (((q \to r) \to (p \to (q \to r))) \to ((q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))))$

   3 RP: p / $(q \to r)$, q / $(p \to (q \to r))$, r / $((p \to q) \to (p \to r))$
6. $((q \to r) \to (p \to (q \to r))) \to ((q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$ 5,4 RO
7. $(q \to r) \to (p \to (q \to r))$ 1 RP: p / $(q \to r)$, q / p
8. $(q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ 6, 7 RO

Teza 11. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ *Prawo sylogizmu hipotetycznego*

1. $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ Ax. 2
2. $((q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))) \to (((q \to r) \to (p \to q)) \to ((q \to r) \to (p \to r)))$

2 RP: $p \,/\, (q \to r)$, $q \,/\, (p \to q)$, $r \,/\, (p \to r)$

3. $(q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ Teza 10
4. $((q \to r) \to (p \to q)) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ 2,3 RO
5. $(((q \to r) \to (p \to q)) \to ((q \to r) \to (p \to r))) \to (((p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to q))) \to ((p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))))$

3 RP: $q \,/\, ((q \to r) \to (p \to q))$, $r \,/\, ((q \to r) \to (p \to r))$, $p \,/\, (p \to q)$

6. $((p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to q))) \to ((p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)))$

5,4 RO

7. $p \to (q \to p)$ Ax.1
8. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to q))$ 7 RP: $p \,/\, (p \to q)$, $q \,/\, (q \to r)$
9. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ 6,8 RO

Reguła wtórna oparta na prawie sylogizmu hipotetycznego

Ponieważ formuła #: $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ jest tezą, to gdy w jakimkolwiek dowodzie (innej) formuły pojawią się formuły o schematach:

(i) $A \to B$

(ii) $B \to C$

możemy od tych formuł przejść do formuły o schemacie:

(iii) $A \to C$

Jest tak dlatego, że w dowodzie możemy zawsze skorzystać z odpowiedniego podstawienia formuły # i potem dwukrotnie zastosować RO.

Następująca reguła inferencyjna

RSH:

$$\frac{\begin{array}{c} A \to B \\ B \to C \end{array}}{A \to C}$$

jest przykładem tzw. *wtórnej reguły inferencyjnej* (w rozważanym systemie aksjomatycznym *KRZ*). RO oraz RP są *regułami pierwotnymi*.

Teza 12. $(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$ ***Prawo komutacji***

1. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ Teza 11
2. $(q \to (p \to q)) \to (((p \to q) \to (p \to r)) \to (q \to (p \to r)))$
   1 RP: p / q, $q / (p \to q)$, $r / (p \to r)$
3. $p \to (q \to p)$ Ax. 1
4. $q \to (p \to q)$ 3 RP: p / q, q / p
5. $((p \to q) \to (p \to r)) \to (q \to (p \to r))$ 2,4 RO
6. $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ Ax. 2
7. $(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$ 6, 5 RSH

Komentarz: Kolorem żółtym wyróżniliśmy formułę, z uwagi na którą istnieje możliwość zastosowania reguły wtórnej.

Komentarz: Zastosowaliśmy regułę wtórną RSH. Stosując wyłącznie reguły pierwotne RO i RP, również otrzymalibyśmy formułę dowodzoną:

7*. $((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))) \to ((((p \to q) \to (p \to r)) \to (q \to (p \to r)) \to ((p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))))$

1 RP: p / $(p \to (q \to r))$, q / $((p \to q) \to (p \to r))$, r / $(q \to (p \to r))$

8*. $(((p \to q) \to (p \to r)) \to (q \to (p \to r)) \to ((p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r)))$ 7*, 6 RO

7. $(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$ 8*, 5 RO

Komentarz: Ponieważ zastosowanie reguły wtórnej jest w istocie wprowadzeniem pewnego skrótu, „dowód”, w którym stosujemy taką regułę, jest skrótową postacią „standardowego” dowodu.

Teza 13. $p \to (q \to p \wedge q)$ *Prawo koniunkcji*

1. $(p \to q) \to ((p \to r) \to (p \to q \wedge r))$ Ax. 8
2. $(q \to p) \to ((q \to q) \to (q \to p \wedge q))$ 1 RP: p / q, q / p, r / q
3. $p \to (q \to p)$ Ax. 1
4. $p \to ((q \to q) \to (q \to p \wedge q))$ 3,2 RSH
5. $(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$ Teza 12
6. $(p \to ((q \to q) \to (q \to p \wedge q))) \to ((q \to q) \to (p \to (q \to p \wedge q)))$
   5 RP: $q / (q \to q)$, $r / (q \to p \wedge q)$
7. $(q \to q) \to (p \to (q \to p \wedge q))$ 6, 4 RO
8. $p \to p$ Teza 1
9. $q \to q$ 8 RP: p / q
10. $p \to (q \to p \wedge q)$ 7, 9 RO

Reguła wtórna oparta na prawie komutacji

Ponieważ formuła ##: $(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$ jest tezą, to możemy wprowadzić następującą regułę wtórną

RKO:

$$\frac{A \to (B \to C)}{B \to (A \to C)}$$

Wyprowadzenie prawa koniunkcji $p \to (q \to p \wedge q)$ z zastosowaniem RKO:

1. $(p \to q) \to ((p \to r) \to (p \to q \wedge r))$	Ax. 8
2. $(q \to p) \to ((q \to q) \to (q \to p \wedge q))$	1 RP: p / q, q / p, r / q
3. $p \to (q \to p)$	Ax. 1
4. $p \to ((q \to q) \to (q \to p \wedge q))$	3,2 RSH
5. $(q \to q) \to (p \to (q \to p \wedge q))$	4 RKO
6. $p \to p$	Teza 1
7. $q \to q$	6 RP: p / q
8. $p \to (q \to p \wedge q)$	5, 7 RO

Teza 14. $(p \to (q \to r)) \to (p \wedge q \to r)$ *Prawo importacji*

1. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$	Teza 11
2. $(p \wedge q \to q) \to ((q \to r) \to (p \wedge q \to r))$	1 RP: $p \,/\, p \wedge q$
3. $p \wedge q \to q$	Ax. 7
4. $(q \to r) \to (p \wedge q \to r)$	2,3 RO
5. $(q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$	Teza 10
6. $((q \to r) \to (p \wedge q \to r)) \to ((p \to (q \to r)) \to (p \to (p \wedge q \to r)))$	5 RP: $q \,/\, (q \to r)$, $r \,/\, (p \wedge q \to r)$
7. $(p \to (q \to r)) \to (p \to (p \wedge q \to r))$	6, 4 RO
8. $(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$	Teza 12
9. $(p \to (p \wedge q \to r)) \to (p \wedge q \to (p \to r))$	8 RP: $q \,/\, p \wedge q$

10. $(p \to (q \to r)) \to (p \wedge q \to (p \to r))$ 7,9 RSH

11. $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ Ax. 2

12. $(p \wedge q \to (p \to r)) \to ((p \wedge q \to p) \to (p \wedge q \to r))$

11 RP: $p / p \wedge q$, q / p

13. $(p \to (q \to r)) \to ((p \wedge q \to p) \to (p \wedge q \to r))$ 10,12 RSH

14. $(p \wedge q \to p) \to ((p \to (q \to r)) \to (p \wedge q \to r))$ 13 RKO

15. $p \wedge q \to p$ Ax. 6

16. $(p \to (q \to r)) \to (p \wedge q \to r)$ 14,15 RO

Reguła wtórna oparta na prawie importacji

$$\text{RIMP:} \quad \frac{A \to (B \to C)}{A \wedge B \to C}$$

Teza 15. $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$ *Prawo sylogizmu hipotetycznego w postaci koniunkcyjnej*

1. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ Teza 11
2. $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$ 1 RIMP

Teza 16. $(p \to q) \wedge p \to q$ *Modus ponendo ponens*

1. $p \to p$ Teza 1
2. $(p \to q) \to (p \to q)$ 1 RP: $p / (p \to q)$
3. $(p \to q) \wedge p \to q$ 2 RIMP

Teza 17. $(p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$ *Modus tollendo tollens*

1. $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$ Ax. 3
2. $(p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$ 1 RIMP

Dowody

Teza 18. $(p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$ *Prawo eksportacji*

1. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$	Teza 11
2. $(q \rightarrow p \wedge q) \rightarrow ((p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow r))$	1 RP: $p / q,\ q / p \wedge q$
3. $p \rightarrow (q \rightarrow p \wedge q)$	Teza 13
4. $p \rightarrow ((p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow r))$	3,2 RSH
5. $(p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$	4 RKO

Reguła wtórna oparta na prawie eksportacji

$$\text{REXP:}\quad \frac{A \wedge B \rightarrow C}{A \rightarrow (B \rightarrow C)}$$

Teza 19. $(\neg p \to q) \to (\neg q \to p)$

1. $(q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$	Teza 10
2. $(\neg\neg p \to p) \to ((\neg q \to \neg\neg p) \to (\neg q \to p))$	1 RP: $q / \neg\neg p$, r / p, $p / \neg q$
3. $\neg\neg p \to p$	Ax. 4
4. $(\neg q \to \neg\neg p) \to (\neg q \to p)$	2, 3 RO
5. $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$	Ax. 3
6. $(\neg p \to q) \to (\neg q \to \neg\neg p)$	5 RP: $p / \neg p$
7. $(\neg p \to q) \to (\neg q \to p)$	6, 4 RSH

Teza 20. $(\neg q \to p) \to (\neg p \to q)$

1. $(\neg p \to q) \to (\neg q \to p)$	Teza 19
2. $(\neg q \to p) \to (\neg p \to q)$	1 RP: p / q, q / p

Teza 21. $p \to (\neg p \to q)$ *Prawo Dunsa Scotusa*

1. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ — Teza 11
2. $(p \to (\neg q \to p)) \to (((\neg q \to p) \to (\neg p \to q)) \to (p \to (\neg p \to q)))$ — 1 RP: $q / (\neg q \to p)$, $r / (\neg p \to q)$
3. $p \to (q \to p)$ — Ax. 1
4. $p \to (\neg q \to p)$ — 3 RP: $q / \neg q$
5. $((\neg q \to p) \to (\neg p \to q)) \to (p \to (\neg p \to q))$ — 2,4 RO
6. $(\neg q \to p) \to (\neg p \to q)$ — Teza 20
7. $p \to (\neg p \to q)$ — 5, 6 RO

Teza 22. $p \wedge \neg p \to q$

1. $p \to (\neg p \to q)$ — Teza 21
2. $p \wedge \neg p \to q$ — 1 RIMP

Teza 23. $\neg(p \wedge \neg p)$ *Prawo sprzeczności*

1. $p \wedge \neg p \rightarrow q$	Teza 22
2. $p \wedge \neg p \rightarrow \neg(p \rightarrow p)$	1 RP: q / $\neg(p \rightarrow p)$
3. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$	Ax. 3
4. $(p \wedge \neg p \rightarrow \neg(p \rightarrow p)) \rightarrow (\neg\neg(p \rightarrow p) \rightarrow \neg(p \wedge \neg p))$	3 RP: p / $p \wedge \neg p$, q / $\neg(p \rightarrow p)$
5. $\neg\neg(p \rightarrow p) \rightarrow \neg(p \wedge \neg p)$	4,2 RO
6. $p \rightarrow \neg\neg p$	Ax. 5
7. $(p \rightarrow p) \rightarrow \neg\neg(p \rightarrow p)$	6 RP p / $(p \rightarrow p)$
8. $(p \rightarrow p) \rightarrow \neg(p \wedge \neg p)$	7,5 RSH
9. $p \rightarrow p$	Teza 1
10. $\neg(p \wedge \neg p)$	8,9 RO

Teza 24. $\neg(p \vee q) \to \neg p \wedge \neg q$

1. $p \to p \vee q$	Ax. 9
2. $q \to p \vee q$	Ax. 10
3. $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$	Ax. 3
4. $(p \to p \vee q) \to (\neg(p \vee q) \to \neg p)$	3 RP: $q \,/\, p \vee q$
5. $(q \to p \vee q) \to (\neg(p \vee q) \to \neg q)$	3 RP: $p \,/\, q,\ q \,/\, p \vee q$
7. $\neg(p \vee q) \to \neg p$	4,1 RO
8. $\neg(p \vee q) \to \neg q$	5,2 RO
9. $(p \to q) \to ((p \to r) \to (p \to q \wedge r))$	Ax. 8
10. $(\neg(p \vee q) \to \neg p) \to ((\neg(p \vee q) \to \neg q) \to (\neg(p \vee q) \to \neg p \wedge \neg q))$	9 RP: p / $\neg(p \vee q),\ q \,/\, \neg p,\ r \,/\, \neg q$
11. $(\neg(p \vee q) \to \neg q) \to (\neg(p \vee q) \to \neg p \wedge \neg q)$	10,7 RO
12. $\neg(p \vee q) \to \neg p \wedge \neg q$	11,8 RO

Teza 25. $p \vee \neg p$ *Prawo wyłączonego środka*

1. $(\neg p \to q) \to (\neg q \to p)$	Teza 19
2. $(\neg(p \vee q) \to \neg p \wedge \neg q) \to (\neg(\neg p \wedge \neg q) \to p \vee q)$	1 RP: p / $(p \vee q)$, q / $\neg p \wedge \neg q$
3. $\neg(p \vee q) \to \neg p \wedge \neg q$	Teza 24
4. $\neg(\neg p \wedge \neg q) \to p \vee q$	2,3 RO
5. $\neg(\neg p \wedge \neg\neg p) \to p \vee \neg p$	4 RP: q / $\neg p$
6. $\neg(p \wedge \neg p)$	Teza 23
7. $\neg(\neg p \wedge \neg\neg p)$	6 RP: p / $\neg p$
8. $p \vee \neg p$	5,7 RO

Literatura:

Prezentowana tu wersja systemu aksjomatycznego *KRZ* jest szczegółowo przedstawiona w podręczniku:

[1] Tadeusz Batóg: *Podstawy logiki*, Wydawnictwo Naukowe UAM.

gdzie znajdą Państwo m.in. dowody dalszych tez. Nasz sposób prezentacji różni się kilkoma drobnymi szczegółami (głównie notacyjnymi i graficznymi) od zawartego w powyższym podręczniku.

Na koniec załączam skrótowe informacje o pewnych innych systemach aksjomatycznych *KRZ.*

System Hilberta-Bernaysa

Aksjomaty:

1. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$
2. $p \to (q \to p)$
3. $(p \to (p \to q)) \to (p \to q)$
4. $p \to \neg\neg p$
5. $\neg\neg p \to p$
6. $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$
7. $(p \wedge q) \to p$
8. $(p \wedge q) \to q$
9. $(p \to q) \to ((p \to r) \to (p \to q \wedge r))$
10. $p \to p \vee q$
11. $q \to p \vee q$
12. $(p \to r) \to ((q \to r) \to (p \vee q \to r))$
13. $(p \leftrightarrow q) \to (p \to q)$
14. $(p \leftrightarrow q) \to (q \to p)$
15. $(p \to q) \to ((q \to p) \to (p \leftrightarrow q))$

Reguły inferencyjne: RO, RP

Fregego:

1. $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$
2. $p \to (q \to p)$
3. $p \to \neg\neg p$
4. $\neg\neg p \to p$
5. $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$
6. $(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$

Reguły inferencyjne: RO, RP

Łukasiewicza:

1. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$
2. $(\neg p \to p) \to p$
3. $p \to (\neg p \to q)$

Reguły inferencyjne: RO, RP

Gdy aksjomatyka jest implikacyjno-negacyjna i pragniemy mieć możliwość dowodzenia formuł, w których występują pozostałe spójniki, musimy wprowadzić dodatkową regułę lub reguły.

Reguła zastępowania (wersja "dla humanistów"): *Z formuły C można wyprowadzić formułę powstającą z C w ten sposób, że jakąś formułę występującą na danym miejscu w formule C zastąpimy na tym miejscu formułą odpowiadającą jej na mocy następujących równości definicyjnych:*

$$(A \vee B) =_{\mathbf{df}} (\neg A \to B)$$
$$(A \wedge B) =_{\mathbf{df}} (\neg(A \to \neg B))$$
$$(A \leftrightarrow B) =_{\mathbf{df}} (\neg((A \to B) \to \neg(B \to A)))$$

Reguły zastępowania (wersja „dla logików"):

$$\frac{C[p_i \,/\, (\neg A \to B)]}{C[p_i \,/\, (A \vee B)]} \qquad \frac{C[p_i \,/\, \neg(A \to \neg B)]}{C[p_i \,/\, (A \wedge B)]} \qquad \frac{C[p_i \,/\, (A \leftrightarrow B)]}{C[p_i \,/\, (\neg((A \to B) \to \neg(B \to A)))]}$$

Wprowadzenie reguły (reguł) zastępowania pociąga konieczność modyfikacji pojęcia dowodu.