Andrzej Wiśniewski

Logika I

Materiały do wykładu dla studentów kognitywistyki

Wykład 10. Twierdzenie o pełności systemu aksjomatycznego KRZ

Tezy KRZ

Pewien system aksjomatyczny *KRZ* został przedstawiony na wykładzie 7; mówiąc dalej o systemie aksjomatycznym *KRZ*, będę miał na myśli właśnie ten system (chociaż istnieją i inne). Podobnie mówiąc o aksjomatach *KRZ*, będę miał na myśli aksjomaty tego systemu. Przypomnijmy teraz pojęcie *tezy KRZ*.

Formułę A nazywamy tezą *KRZ wtw formuła A jest aksjomatem KRZ lub formuła A ma co najmniej jeden dowód w oparciu o aksjomaty KRZ*.

Dla spostrzegawczych: Ciąg jednowyrazowy <*A*>, gdzie *A* jest aksjomatem, ma wszelkie znamiona dowodu formuły *A* w oparciu o aksjomaty. Tak więc w definicji tezy wystarczyłoby sformułowanie „ma co najmniej jeden dowód w oparciu o aksjomaty”.

Do zbioru wszystkich tez *KRZ* należą zatem aksjomaty *KRZ* oraz te formuły, które nie są co prawda aksjomatami, ale mają co najmniej jeden dowód w oparciu o aksjomaty. Mówiąc ogólnie, tezy *KRZ* to *prawa KRZ rozumiane syntaktycznie*.

Tautologie KRZ. Zagadnienie pełności systemu aksjomatycznego KRZ

Przypomnijmy teraz pojęcie *tautologii KRZ*.

Formuła A jest tautologią *KRZ wtw dla każdego wartościowania* ***v*** *zachodzi* ***v***(*A*) = **1**.

Tautologie *KRZ* to *prawa KRZ rozumiane semantycznie*.

Na wykładzie 7 udowodniliśmy:

Twierdzenie 7.1. *Każda teza KRZ jest tautologią KRZ.*

Powstaje jednak następujące pytanie:

Czy każda tautologia KRZ jest tezą KRZ?

Pytanie to wyraża *zagadnienie pełności* systemu aksjomatycznego *KRZ*. Odpowiedź na to pytanie jest twierdząca. Pokażemy dalej, że prawdziwe jest:

Twierdzenie 10.1. (o pełności systemu aksjomatycznego *KRZ*):

Każda tautologia KRZ jest tezą KRZ.

Komentarz: Twierdzenie powyższe głosi w istocie, że każda tautologia *KRZ* jest aksjomatem lub ma dowód w oparciu o aksjomaty. Zauważmy, że orzeka ono o nieskończenie wielu formułach, albowiem tautologii *KRZ* jest (przeliczalnie) nieskończenie wiele. Jeśli tak, to twierdzenia o pełności nie można udowodnić „konstruktywnie”, poprzez podanie dowodów tych wszystkich tautologii, które nie są aksjomatami.

W dowodzie Twierdzenia 10.1 skorzystamy z:

Twierdzenie 10.2. (syntaktyczne twierdzenie o odrywaniu): *Jeżeli formuła postaci $A \to B$ jest tezą KRZ oraz formuła A jest tezą KRZ, to formuła B jest tezą KRZ.*

Twierdzenie 10.3. (syntaktyczne twierdzenie o podstawianiu): *Jeżeli formuła A jest tezą KRZ, to formuła o postaci $A[p_i / B]$ jest tezą KRZ*.

Lemat 10.1. *Jeżeli C jest alternatywą elementarną, w której występują: zmienna p_{i_j} oraz jej negacja, $\neg p_{i_j}$, to istnieje formuła o postaci*:

(i) $(p_{i_j} \vee \neg p_{i_j}) \vee D$

taka, że formuła o postaci:

(ii) $(p_{i_j} \vee \neg p_{i_j}) \vee D \to C$

jest tezą KRZ.

Ponadto w dowodzie Twierdzenia 10.1 skorzystamy z kilku dalszych uprzednio ustalonych faktów.

Dowód (twierdzenia o pełności systemu aksjomatycznego *KRZ*):

Niech A będzie dowolną ale ustaloną tautologią *KRZ*. Ponieważ zachodzi:

> Twierdzenie 9.7. *Każda tautologia KRZ jest inferencyjnie równoważna pewnej formule o koniunkcyjnej postaci normalnej, takiej, że w każdej wchodzącej w jej skład alternatywie elementarnej co najmniej jedna zmienna zdaniowa występuje zarówno ze znakiem negacji, jak i bez tego znaku.*

zatem istnieje formuła B taka, że:

(i) A jest inferencyjnie równoważna formule B, tj. formuła o postaci $A \leftrightarrow B$ jest tezą *KRZ*;

(ii) B ma postać:

$$(*) \quad C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_n,$$

gdzie $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ($n \geq 1$) są alternatywami elementarnymi, przy czym dla każdego C_k ($1 \leq k \leq n$) istnieje zmienna, p_{i_k}, taka, że p_{i_k} oraz $\neg p_{i_k}$ występują w C_k.

Pokażemy teraz, że formuła B jest tezą KRZ.

Rozważmy alternatywę elementarną C_k, gdzie $1 \leq k \leq n$. Na mocy Lematu 10.1. istnieje formuła o postaci (gdzie p_{i_k} oraz $\neg p_{i_k}$ występują w C_k):

(1) $(p_{i_k} \vee \neg p_{i_k}) \vee D_k \to C_k$

która jest tezą KRZ. Jednocześnie wiemy, że tezą KRZ jest:

(2) $p \vee \neg p$,

Stosując RP do tezy (2) – i podstawiając p_{i_k} za p – otrzymujemy:

(3) $p_{i_k} \vee \neg p_{i_k}$.

Tezą KRZ jest również:

(4) $p \to p \vee q$.

Poprzez podstawienia: $p \,/\, p_{i_k} \vee \neg p_{i_k}$, $q \,/\, D_k$ otrzymujemy:

(5) $p_{i_k} \vee \neg p_{i_k} \to (p_{i_k} \vee \neg p_{i_k}) \vee D_k$.

Na mocy syntaktycznego twierdzenia o postawianiu formuły (3) i (5) są tezami *KRZ*.

Stosując RO do (5) i (3) dostajemy:

(6) $(p_{i_k} \vee \neg p_{i_k}) \vee D_k$.

Na mocy syntaktycznego twierdzenia o odrywaniu formuła (6) jest tezą *KRZ*. Z kolei formułę C_k możemy otrzymać przez odrywanie z formuł:

(1) $(p_{i_k} \vee \neg p_{i_k}) \vee D_k \rightarrow C_k$

(6) $(p_{i_k} \vee \neg p_{i_k}) \vee D_k$

będących tezami *KRZ*. Tak więc – znów na mocy syntaktycznego twierdzenia o odrywaniu – również formuła C_k jest tezą *KRZ*. Skoro jednak $1 \leq k \leq n$, to każda z formuł $C_1, C_2, ..., C_n$ jest tezą *KRZ*.

Tezą *KRZ* jest:

(7) $p \to (q \to p \wedge q)$

Podstawiając w (7): p / C_1, q / C_2 i dwukrotnie odrywając (jako że C_1 i C_2 są tezami *KRZ*), dostaniemy:

(8) $C_1 \wedge C_2$.

Podstawiając w (7): $p / C_1 \wedge C_2$, q / C_3 oraz dwukrotnie odrywając, dostaniemy:

(9) $C_1 \wedge C_2 \wedge C_3$.

Postępując analogicznie, w skończonej liczbie kroków dojdziemy do:

(*) $C_1 \wedge C_2 \wedge ... \wedge C_n$.

Na mocy syntaktycznych twierdzeń o podstawianiu i odrywaniu formuła (*) jest tezą *KRZ*. Z drugiej strony, formuła (*) to nic innego jak formuła *B*, której na mocy warunku (i) (zob. s. 6) jest inferencyjnie równoważna wyjściowa formuła *A*.

Skoro formuła *A* jest inferencyjnie równoważna formule *B*, to tezą *KRZ* jest:

(10) $A \leftrightarrow B.$

Jednocześnie tezą *KRZ* jest:

(11) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p).$

Podstawiając w (11): *p* / *A*, *q* / *B*, dostaniemy formułę o postaci:

(12) $(A \leftrightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A).$

Na mocy syntaktycznego twierdzenia o podstawianiu formuła postaci (12) jest tezą *KRZ.* Z kolei, na mocy syntaktycznego twierdzenia o odrywaniu, formuła postaci:

(13) $B \rightarrow A$

jest również tezą *KRZ*. Wykazaliśmy jednak wcześniej, że formuła *B* jest tezą *KRZ*. Zatem, znów na mocy syntaktycznego twierdzenia o odrywaniu, także „wyjściowa” formuła/ tautologia *A* jest tezą *KRZ*. ■

Bezpośrednią konsekwencją twierdzeń 7.1 i 10.1 jest:

Twierdzenie 10.4. *Formuła jest tautologią KRZ wtw formuła ta jest tezą KRZ.*

Twierdzenie 10.4. implikuje, że zbiór wszystkich tautologii *KRZ* jest identyczny ze zbiorem wszystkich tez *KRZ*. Innymi słowy, semantyczne i syntaktyczne pojęcia prawa *KRZ* mają ten sam zakres (chociaż oczywiście różną treść).

Udowodnimy na koniec:

Twierdzenie 10.5. (o niesprzeczności systemu aksjomatycznego *KRZ*).

Nie istnieje taka formuła A, że zarówno A, jak i $\neg A$ są tezami KRZ.

Dowód: Przyjmijmy, że taka formuła A istnieje. Na mocy Twierdzenia 10.1 zarówno A, jak i $\neg A$ są wówczas tautologiami *KRZ*. Skoro A jest tautologią, to dla jakiegoś (dowolnego ale ustalonego) wartościowania $\boldsymbol{v}$ mamy $\boldsymbol{v}(A) = \mathbf{1}$. Zatem $\boldsymbol{v}(\neg A) = \mathbf{0}$, czyli $\neg A$ nie jest tautologią. Otrzymujemy sprzeczność. ■

Literatura:

Podany tutaj dowód twierdzenia o pełności systemy aksjomatycznego *KRZ* jest wariantem dowodu przedstawionego w podręczniku: Tadeusz Batóg, *Podstawy logiki*, Poznań 1996.