Andrzej Wiśniewski

Logika I

Materiały do wykładu dla studentów kognitywistyki

Wykład 11b. System aksjomatyczny Klasycznego Rachunku Predykatów. Aksjomaty i reguły inferencyjne

Istnieje wiele systemów aksjomatycznych Klasycznego Rachunku Predykatów. Przedstawimy tutaj jeden z nich, stosunkowo przyjazny dla użytkownika.

W tej prezentacji podaję tylko odpowiednie definicje; przykłady zostaną przedstawione na wykładzie.

Stosuję tutaj terminologię i notację z poprzedniego wykładu.

Aksjomatem *KRP* *jest każda formuła zdaniowa języka KRP, którą można otrzymać z jakiejś tautologii Klasycznego Rachunku Zdań poprzez konsekwentne zastąpienie wszystkich występujących w niej zmiennych zdaniowych formułami zdaniowymi języka KRP.*

Uwaga: „Konsekwentność” polega tutaj na tym, że pozycje jednakowych zmiennych zdaniowych pozostają pozycjami jednakowych formuł zdaniowych języka *KRP*. Innymi słowy, wszędzie tam, gdzie występowała dana zmienna zdaniowa, pojawi się ta sama formuła zdaniowa języka *KRP*.

Komentarz: Aksjomatów *KRP* jest nieskończenie wiele, co więcej, każda tautologia jest „przepisem” na wyprodukowanie nieskończenie wielu aksjomatów. Takie postawienie sprawy skraca dowody w *KRP*. Gdy interesuje nas elegancja, możemy postąpić inaczej: przyjąć, że aksjomaty *KRP* powstają wyłącznie z aksjomatów *KRZ*. Wtedy aksjomatów *KRP* będzie nadal nieskończenie wiele, ale za to będziemy mieli skończenie wiele *schematów* aksjomatów. Ceną za elegancję jest jednak wydłużenie dowodów.

Prezentowany system aksjomatyczny *KRP* ma sześć pierwotnych reguł inferencyjnych:

Reguła opuszczania dużego kwantyfikatora (O∀):

$$\frac{A \rightarrow \forall x_i\, B}{A \rightarrow B}$$

Reguła dołączania dużego kwantyfikatora (D∀):

$$\frac{A \rightarrow B}{A \rightarrow \forall x_i\, B} \quad \textit{o ile } x_i \textit{ nie jest wolne w } A$$

Komentarz: Reguła D∀ posiada *warunek stosowalności*. Gdyby ten warunek zi-gnorować, moglibyśmy przejść od prawdy do fałszu – a tego nie chcemy :)

Reguła opuszczania małego kwantyfikatora (O∃):

$$\frac{\exists x_i\, A \rightarrow B}{A \rightarrow B}$$

Reguła dołączania małego kwantyfikatora (D∃):

$$\frac{A \rightarrow B}{\exists x_i\, A \rightarrow B} \quad \textit{o ile } x_i \textit{ nie jest wolne w } B$$

Reguła odrywania (RO):

$$\frac{\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ A \end{array}}{B}$$

Kolejna reguła inferencyjna to reguła podstawiania. Tym razem jednak podstawiamy termy za zmienne indywiduowe w formułach zdaniowych (a nie – jak w przypadku *KRZ* – formuły za zmienne zdaniowe w formułach).

Aby wprowadzić regułę podstawiania, musimy uprzednio określić *operację* podstawiania.

W kroku wstępnym określamy operację podstawiania termu za zmienną indywiduową *do termu*:

(i) $$x_j[x_i/\tau] = \begin{cases} \tau, \text{ gdy } i = j \\ x_j, \text{ gdy } i \neq j \end{cases}$$

(ii) $a_j[x_i/\tau] = a_j$

(iii) $F_k^n(\tau_1, ..., \tau_n)[x_i/\tau] = F_k^n(\tau_1[x_i/\tau], ..., \tau_n[x_i/\tau])$

Korzystając z powyższego pojęcia, zdefiniujemy operację podstawiania termu za zmienną indywiduową *do formuły zdaniowej*. ***Wynik*** podstawienia termu τ za zmienną x_i do formuły zdaniowej A oznaczamy przez $A[x_i /\tau]$.

(i) $P_k^n(\tau_1, \ldots, \tau_n)\,[x_i /\tau] = P_k^n(\tau_1[x_i /\tau], \ldots, \tau_n\,[x_i /\tau])$

(ii) *jeżeli A ma postać* $\neg B$, to $A[x_i /\tau] = \neg B[x_i /\tau]$

(iii) *jeżeli A ma postać* $(B \otimes C)$, gdzie $\otimes$ *jest jednym ze spójników*: $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$, *to* $A[x_i /\tau] = (B[x_i /\tau] \otimes C[x_i /\tau])$

(iv) *jeżeli A ma postać* $\forall x_j\, B$, *to*:

$$A[x_i /\tau] = \begin{cases} \forall x_j\, B, \text{ gdy } i = j, \\ \forall x_j\, B[x_i /\tau], \text{ gdy } i \neq j. \end{cases}$$

(v) *jeżeli A ma postać* $\exists x_j B$, *to*:

$$A[x_i/\tau] = \begin{cases} \exists x_j B, \textit{ gdy } i = j, \\ \\ \exists x_j B[x_i/\tau], \textit{ gdy } i \neq j. \end{cases}$$

Komentarz: Warunki dla formuł z kwantyfikatorami pokazują, że podstawianie za zmienną związaną nie modyfikuje formuły, do której podstawiamy.

Reguła podstawiania opatrzona jest warunkiem stosowalności. Jest to warunek *podstawialności* termu za zmienną do formuły zdaniowej. Idea jest następująca: term τ jest podstawialny za zmienną x_i do formuły zdaniowej A wtw w wyniku podstawienia na żadnym miejscu, na którym x_i jest wolna w A, nie pojawi się zmienna związana. Mówiąc bardziej ściśle:

Mówimy, że term τ jest podstawialny *za zmienną x_i do formuły zdaniowej A wtw zmienna x_i nie występuje w A jako wolna w zasięgu żadnego kwantyfikatora wiążącego którąś ze zmiennych występujących w termie τ.*

Reguła podstawiania (RP):

$$\frac{A}{A[x_i/\tau]} \quad \text{o ile } \tau \text{ jest podstawialny za } x_i \text{ do } A$$

Podobnie jak poprzednio, warunek stosowalności nakładamy z powodów semantycznych.

Literatura:

Omawiany system aksjomatyczny *KRP* został przedstawiony w podręczniku Tadeusza Batoga: *Podstawy logiki* (Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 1986). Nasza prezentacja różni się kilkoma szczegółami, głównie notacyjnymi.