

*Andrzej Wiśniewski*  
*Logika I*

*Materiały do wykładu dla studentów kognitywistyki*

*Wykład 11b. System aksjomatyczny  
Klasycznego Rachunku Predykatów.  
Aksjomaty i reguły inferencyjne*

Istnieje wiele systemów aksjomatycznych Klasycznego Rachunku Predykatów. Przedstawimy tutaj jeden z nich, stosunkowo przyjazny dla użytkownika.

W tej prezentacji podaję tylko odpowiednie definicje; przykłady zostaną przedstawione na wykładzie.

Stosuję tutaj terminologię i notację z poprzedniego wykładu.

**Aksjomatem *KRP*** jest każda formuła zdaniowa języka *KRP*, którą można otrzymać z jakiejś tautologii Klasycznego Rachunku Zdań poprzez konsekwentne zastąpienie wszystkich występujących w niej zmiennych zdaniowych formułami zdaniowymi języka *KRP*.

**Uwaga:** „Konsekwentność” polega tutaj na tym, że pozycje jednakowych zmiennych zdaniowych pozostają pozycjami jednakowych formuł zdaniowych języka *KRP*. Innymi słowy, wszędzie tam, gdzie występowała dana zmienna zdaniowa, pojawi się ta sama formuła zdaniowa języka *KRP*.

**Komentarz:** Aksjomatów *KRP* jest nieskończenie wiele, co więcej, każda tautologia jest „przepisem” na wyprodukowanie nieskończenie wielu aksjomatów. Takie postawienie sprawy skraca dowody w *KRP*. Gdy interesuje nas elegancja, możemy postąpić inaczej: przyjąć, że aksjomaty *KRP* powstają wyłącznie z aksjomatów *KRZ*. Wtedy aksjomatów *KRP* będzie nadal nieskończenie wiele, ale za to będziemy mieli skończenie wiele *schematów* aksjomatów. Ceną za elegancję jest jednak wydłużenie dowodów.

## Reguły inferencyjne

Prezentowany system aksjomatyczny *KRP* ma sześć **pierwotnych reguł inferencyjnych**:

Reguła opuszczania dużego kwantyfikatora ( $O\forall$ ):

$$\frac{A \rightarrow \forall x_i B}{A \rightarrow B}$$

Reguła dołączania dużego kwantyfikatora ( $D\forall$ ):

$$\frac{A \rightarrow B}{A \rightarrow \forall x_i B} \quad \text{o ile } x_i \text{ nie jest wolne w } A$$

**Komentarz:** Reguła  $D\forall$  posiada *warunek stosowalności*. Gdyby ten warunek zignorować, moglibyśmy przejść od prawdy do fałszu – a tego nie chcemy :)

## Reguły inferencyjne

Reguła opuszczania małego kwantyfikatora (O $\exists$ ):

$$\frac{\exists x_j A \rightarrow B}{A \rightarrow B}$$

Reguła dołączania małego kwantyfikatora (D $\exists$ ):

$$\frac{A \rightarrow B}{\exists x_j A \rightarrow B} \quad \text{o ile } x_j \text{ nie jest wolne w } B$$

Reguła odrywania (RO):

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B}$$

## Podstawianie

Kolejna reguła inferencyjna to reguła podstawiania. Tym razem jednak podstawiamy **termy za zmienne indywidualowe w formułach zdaniowych** (a nie – jak w przypadku *KRZ* – formuły za zmienne zdaniowe w formułach).

Aby wprowadzić regułę podstawiania, musimy uprzednio określić *operację* podstawiania.

W kroku wstępnym określamy **operację podstawiania termu za zmienną indywidualową do termu**:

$$(i) \quad x_j[x_i/\tau] = \begin{cases} \tau, & \text{gdy } i = j \\ x_j, & \text{gdy } i \neq j \end{cases}$$

$$(ii) \quad a_j[x_i/\tau] = a_j$$

$$(iii) \quad F_k^n(\tau_1, \dots, \tau_n)[x_i/\tau] = F_k^n(\tau_1[x_i/\tau], \dots, \tau_n[x_i/\tau])$$

## Podstawianie

Korzystając z powyższego pojęcia, zdefiniujemy **operację podstawiania termu za zmienną indywidualową do formuły zdaniowej**. **Wynik** podstawienia termu  $\tau$  za zmienną  $x_i$  do formuły zdaniowej  $A$  oznaczamy przez  $A[x_i/\tau]$ .

- (i)  $P_k^n(\tau_1, \dots, \tau_n) [x_i/\tau] = P_k^n(\tau_1[x_i/\tau], \dots, \tau_n[x_i/\tau])$
- (ii) jeżeli  $A$  ma postać  $\neg B$ , to  $A[x_i/\tau] = \neg B[x_i/\tau]$
- (iii) jeżeli  $A$  ma postać  $(B \otimes C)$ , gdzie  $\otimes$  jest jednym ze spójników:  $\rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow$ , to  $A[x_i/\tau] = (B[x_i/\tau] \otimes C[x_i/\tau])$
- (iv) jeżeli  $A$  ma postać  $\forall x_j B$ , to:

$$A[x_i/\tau] = \begin{cases} \forall x_j B, & \text{gdy } i = j, \\ \forall x_j B[x_i/\tau], & \text{gdy } i \neq j. \end{cases}$$

## Podstawianie

(v) jeżeli  $A$  ma postać  $\exists x_j B$ , to:

$$A[x_i/\tau] = \begin{cases} \exists x_j B, & \text{gdy } i = j, \\ \exists x_j B[x_i/\tau], & \text{gdy } i \neq j. \end{cases}$$

**Komentarz:** Warunki dla formuł z kwantyfikatorami pokazują, że podstawianie za zmienną związaną nie modyfikuje formuły, do której podstawiamy.

Reguła podstawiania opatrzona jest warunkiem stosowalności. Jest to warunek *bezkolizyjnej podstawialności* termu za zmienną do formuły zdaniowej. Idea jest następująca: term  $\tau$  jest bezkolizyjnie podstawialny za zmienną  $x_i$  do formuły zdaniowej  $A$  wtw w wyniku podstawienia na żadnym miejscu, na którym  $x_i$  jest wolna w  $A$ , nie pojawi się zmienna związana. Mówiąc bardziej ściśle:



## Podstawialność. Reguła podstawiania

Mówimy, że term  $\tau$  jest **bezkolizyjnie podstawialny** za zmienną  $x_i$  do formuły zdaniowej  $A$  wtw zmienna  $x_i$  nie występuje w  $A$  jako wolna w zasięgu żadnego kwantyfikatora wiążącego którąś ze zmiennych występujących w termie  $\tau$ .

Reguła podstawiania (RP):

$$\frac{A}{A[x_i / \tau]} \quad \text{o ile } \tau \text{ jest bezkolizyjnie podstawialny za } x_i \text{ do } A$$

Podobnie jak poprzednio, warunek stosowalności nakładamy z powodów semantycznych.

**Uwaga:** Bezkolizyjną podstawialność zwykle określa się krótko mianem podstawialności.

## Literatura:

Omawiany system aksjomatyczny *KRP* został przedstawiony w podręczniku Tadeusza Batoga: *Podstawy logiki* (Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 1986). Nasza prezentacja różni się kilkoma szczegółami, głównie notacyjnymi.