*Andrzej Wiśniewski*

*Logika I*

*Materiały do wykładu dla studentów kognitywistyki*

# *Wykłady 12 i 13. Dowód i dowodzenie w KRP. Tezy KRP*

Pojęcia: formuły zdaniowej języka Klasycznego Rachunku Predykatów (dalej: *KRP*) oraz aksjomatu *KRP* zostały scharakteryzowane na poprzednich wykładach. Mówiąc dalej o formułach zdaniowych, będziemy mieli na myśli formuły zdaniowe języka *KRP*. Zbiór wszystkich aksjomatów KRP oznaczymy przez ***Arp***.

Pojęcie *dowodu* formuły zdaniowej *A* w oparciu o zbiór aksjomatów *KRP* rozumiemy podobnie jak w przypadku *KRZ*.

UWAGA: Mówiąc dalej o podstawialności/podstawianiu, będę miał zawsze na myśli bezkolizyjną podstawialność/bezkolizyjne podstawienie.

Definicja 12.1. Dowodem formuły zdaniowej *A* w oparciu o zbiór aksjomatów *KRP nazywamy skończony ciąg formuł zdaniowych, którego ostatnim wyrazem jest formuła A, taki, że dowolna formuła zdaniowa będąca wyrazem tego ciągu:*

(1) *jest aksjomatem KRP, lub*

(2) *powstaje z jakiegoś wcześniejszego wyrazu rozważanego ciągu poprzez zastosowanie:*

- *reguły podstawiania* RP*, lub*
- *reguły opuszczania dużego kwantyfikatora* O∀*, lub*
- *reguły dołączania dużego kwantyfikatora* D∀*, lub*
- *reguły opuszczania małego kwantyfikatora* O∃*, lub*
- *reguły dołączania małego kwantyfikatora* D∃*, lub*

(3) *powstaje z jakichś wcześniejszych wyrazów tego ciągu poprzez zastosowania reguły odrywania* RO.

Definicja dowodu w *KRP* w wersji dla purystów prezentuje się następująco:

## Pojęcie dowodu w KRP

**Definicja 12.1***. Dowodem formuły zdaniowej *A* w oparciu o ***Arp*** *nazywamy każdy skończony ciąg formuł $D_1, D_2, \ldots, D_n$ taki, że $D_n = A$ oraz dla każdego wskaźnika $k \leq n$ spełniony jest przynajmniej jeden z następujących warunków:*

(1) $D_k \in$ ***Arp***;

(2) *istnieją*: *wskaźnik $i < k$*, *term $\tau$ oraz wskaźnik $j$ takie, że $\tau$ jest podstawialny za $x_j$ do $D_i$ oraz $D_k$ ma postać $D_i\,[x_j/\tau]$*;

(3) *istnieją*: *wskaźnik $i < k$*, *formuły zdaniowe $B$ i $C$ oraz wskaźnik $j$ takie, że $D_i$ ma postać $B \to \forall x_j\, C$*, *natomiast $D_k$ ma postać $B \to C$*;

(4) *istnieją*: *wskaźnik $i < k$*, *formuły zdaniowe $B$ i $C$ oraz wskaźnik $j$ takie, że $x_j$ nie jest wolna w $B$, oraz $D_i$ ma postać $B \to C$*, *natomiast $D_k$ ma postać $B \to \forall x_j\, C$*;

(5) *istnieją*: *wskaźnik $i < k$*, *formuły zdaniowe $B$ i $C$ oraz wskaźnik $j$ takie, że $D_i$ ma postać $\exists x_j\, B \to \forall x_j\, C$*, *natomiast $D_k$ ma postać $B \to C$*;

(6) *istnieją*: *wskaźnik $i < k$*, *formuły zdaniowe $B$ i $C$ oraz wskaźnik $j$ takie, że $x_j$ nie jest wolna w $C$, oraz $D_i$ ma postać $B \to C$*, *natomiast $D_k$ ma postać $\exists x_j\, B \to C$*;

(7) *istnieją wskaźniki $i, j < k$ takie, że $D_i$ ma postać $D_j \to D_k$*.

Definicja 12.2. Tezą *KRP nazywamy formułę zdaniową, która jest aksjomatem KRP lub posiada przynajmniej jeden dowód w oparciu o aksjomaty KRP.*

Komentarz: Podobnie jak w przypadku *KRZ*, wystarczyłoby powiedzieć, że tezą *KRP* jest formuła zdaniowa, która posiada przynajmniej jeden dowód w oparciu o aksjomaty *KRP*. Powód jest następujący: niech *A* będzie dowolnym aksjomatem *KRP*. Ciąg jednoelementowy <*A*> jest, zgodnie z definicją 12.1*, dowodem formuły *A* w oparciu o ***Arp***, jako że $A = A$ oraz $A \in$ ***Arp***. Taki „dowód" nie jest rzecz jasna żadnym *uzasadnieniem* aksjomatu; po prostu definicja dowodu została tak zbudowana, aby pojęcie tezy dało się zdefiniować prosto: teza to formuła zdaniowa, która ma przynajmniej jeden dowód w oparciu o aksjomaty. Ponieważ jednak powyższe zależności nie są od razu widoczne, zdefiniowaliśmy tu pojęcie tezy w sposób nieco redundantny.

Przykład 12.1. Oto dowód tezy:

(*) $\forall x_1 P_1^{\,1}(x_1) \rightarrow \exists x_1 P_1^{\,1}(x_1)$

1. $\forall x_1 P_1^{\,1}(x_1) \rightarrow \forall x_1 P_1^{\,1}(x_1)$ [Ax.]
2. $\forall x_1 P_1^{\,1}(x_1) \rightarrow P_1^{\,1}(x_1)$ [1 O$\forall$]
3. $\exists x_1 P_1^{\,1}(x_1) \rightarrow \exists x_1 P_1^{\,1}(x_1)$ [Ax.]
4. $P_1^{\,1}(x_1) \rightarrow \exists x_1 P_1^{\,1}(x_1)$ [3 O$\exists$]
5. $(\forall x_1 P_1^{\,1}(x_1) \rightarrow P_1^{\,1}(x_1)) \rightarrow ((P_1^{\,1}(x_1) \rightarrow \exists x_1 P_1^{\,1}(x_1)) \rightarrow$ $(\forall x_1 P_1^{\,1}(x_1) \rightarrow \exists x_1 P_1^{\,1}(x_1)))$ [Ax.]
6. $(P_1^{\,1}(x_1) \rightarrow \exists x_1 P_1^{\,1}(x_1)) \rightarrow (\forall x_1 P_1^{\,1}(x_1) \rightarrow \exists x_1 P_1^{\,1}(x_1))$ [5,2 RO]
7. $\forall x_1 P_1^{\,1}(x_1) \rightarrow \exists x_1 P_1^{\,1}(x_1)$ [6,4 RO]

**Komentarz**: Dowodem jest ciąg formuł zdaniowych; numery po lewej i komentarze po prawej to *informacja dowodowa*, która ułatwia nam życie, ale do samego dowodu nie należy. „Ax.” oznacza, że dana formuła jest aksjomatem *KRP*.

**Przykład 12.2**. Dowód tezy:

(**) $\forall x_2\,(P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2)) \rightarrow \exists x_2\,(P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2))$

1. $\forall x_2\,(P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2)) \rightarrow \forall x_2\,(P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2))$ [Ax.]
2. $\forall x_2\,(P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2)) \rightarrow P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2)$ [1 O∀]
3. $\exists x_2\,(P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2)) \rightarrow \exists x_2\,(P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2))$ [Ax.]
4. $P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2) \rightarrow \exists x_2\,(P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2))$ [3 O∃]
5. $(\forall x_2\,(P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2)) \rightarrow P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2)) \rightarrow$
   $((P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2) \rightarrow \exists x_2\,(P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2))) \rightarrow$
   $(\forall x_2\,(P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2)) \rightarrow \exists x_2\,(P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2))))$ [Ax.]
6. $(P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2)) \rightarrow \exists x_2\,(P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2)) \rightarrow$
   $(\forall x_2\,(P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2)) \rightarrow \exists x_2\,(P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2)))$ [5,2 RO]
7. $\forall x_2\,(P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2)) \rightarrow \exists x_2\,(P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2))$ [6,4 RO]

Komentarz: Kolory zostały użyte w celu uwidocznienia struktury dowodu; same formuły zdaniowe oczywiście „kolorowe” nie są.

Tezy (*) oraz (**) podpadają pod następujący *schemat metajęzykowy*:

(***) $\forall xA \to \exists xA$

gdzie $x$ reprezentuje dowolną zmienną indywiduową[1], a $A$ – dowolną formułę zdaniową. Ponadto dowody tez (*) oraz (**) mają *wspólny schemat*:

| | |
|---|---|
| 1. $\forall xA \to \forall xA$ | [Ax.] |
| 2. $\forall xA \to A$ | [1 O$\forall$] |
| 3. $\exists xA \to \exists xA$ | [Ax.] |
| 4. $A \to \exists xA$ | [3 O$\exists$] |
| 5. $(\forall xA \to A) \to ((A \to \exists xA) \to (\forall xA \to \exists xA))$ | [Ax.] |
| 6. $(A \to \exists xA) \to (\forall xA \to \exists xA)$ | [5,2 RO] |
| 7. $\forall xA \to \exists xA$ | [6,4 RO] |

[1] Litery $x$ używam tutaj zatem jako metazmiennej, której wartością może być jakakolwiek konkretna zmienna indywiduowa. Na poprzednim wykładzie litera $x$ występowała w innej roli: jako skrót napisu $x_1$.

Wyrażenie (***) nie jest tezą *KRP*, lecz *schematem tez*, inaczej: *metatezą*. Podobnie powyższy ciąg wyrażeń metajęzykowych nie jest dowodem, lecz *schematem dowodu*. W praktyce wygodniej jest operować metatezami (każda z nich jest „przepisem" budowania nieskończenie wielu tez) oraz podawać schematy dowodów (każdy taki schemat jest „przepisem", zgodnie z którym możemy zbudować dowód tezy podpadającej pod odpowiednią metatezę).

Schematy dowodów, których ostatnim wyrazem jest dana metateza, będziemy nazywać po prostu dowodami tej metatezy.

Podobnie jak w przypadku *KRZ*, w dowodach (i schematach dowodów) w *KRP* możemy używać w charakterze przesłanek nie tylko aksjomatów *KRP* (względnie schematów aksjomatów), lecz również uprzednio udowodnionych tez (metatez). Powód jest prosty: każdy dowód, w którym korzystamy z tez uprzednio udowodnionych można „przedłużyć" w taki sposób, aby jedynymi przesłankami były aksjomaty.

Przykład 12.3. Poniżej podane zostały dowody dwóch metatez:

(i) $\forall xA \to A$.

1. $\forall xA \to \forall xA$ [Ax.]
2. $\forall xA \to A$ [1 O$\forall$]

(ii) $A \to \exists xA$

1. $\exists xA \to \exists xA$ [Ax.]
2. $A \to \exists xA$ [1 O$\exists$]

Za dowód metatezy (***) możemy teraz uznać następujący ciąg formuł metajęzykowych:

1. $\forall xA \to A$ [(i)]
2. $A \to \exists xA$ [(ii)]
3. $(\forall xA \to A) \to ((A \to \exists xA) \to (\forall xA \to \exists xA))$ [Ax.]
4. $(A \to \exists xA) \to (\forall xA \to \exists xA)$ [3,1 RO]
5. $\forall xA \to \exists xA$ [4,2 RO]

Ponieważ *KRP* jest "nadbudowany" nad *KRZ*, w dowodach w *KRP* możemy stosować analogiczne wtórne reguły inferencyjne, jak w przypadku *KRZ*.

Przykład 12.4. Przypomnijmy regułę wtórną opartą na prawie sylogizmu hipotetycznego:

$$\text{RSH:}\quad \frac{A \to B \qquad B \to C}{A \to C}$$

Dowód metatezy (***) możemy poprowadzić następująco:

| | |
|---|---|
| 1. $\forall xA \to A$ | [(i)] |
| 2. $A \to \exists xA$ | [(ii)] |
| 3. $\forall xA \to \exists xA$ | [1, 2 RSH] |

W *KRP* mamy ponadto *swoiste* wtórne reguły inferencyjne. Przykładem jest reguła generalizacji:

**RGEN**: $$\frac{A}{\forall x_i\, A}$$

Dlaczego **RGEN** jest regułą wtórną? Załóżmy, że w dowodzie „doszliśmy" do formuły *A*. Dalej możemy poprowadzić dowód następująco:

| | |
|---|---|
| $A \to ((B \to B) \to A)$ | [Ax.], *wybieramy B takie, że* $x_i$ *nie jest w nim wolna*. |
| $(B \to B) \to A$ | *Na mocy* RO, *bo mamy już A.* |
| $(B \to B) \to \forall x_i A$ | *Na mocy* D$\forall$, *bo* $x_i$ *nie jest wolna w B*. |
| $B \to B$ | [Ax] |
| $\forall x_i\, A$ | *Na mocy* RO. |

Zamiast wykonywać powyższe, standardowe kroki, możemy zatem zastosować **RGEN** i „od razu" otrzymać $\forall x_i\, A$.

Uwaga: Nie należy stosować **RGEN** jako schematu wnioskowania dedukcyjnego – konsekwencje mogą być bolesne :)

Budując dowody metatez, możemy korzystać zarówno z metatez uprzednio udowodnionych, jak i z ich tzw. *pseudpodstawień*. Oto przykład:

1. $\neg A \rightarrow \exists x \neg A$
2. $(\neg A \rightarrow \exists x \neg A) \rightarrow (\neg \exists x \neg A \rightarrow A)$ [Ax.]
3. $\neg \exists x \neg A \rightarrow A$ [2,1 RO]
4. $\neg \exists x \neg A \rightarrow \forall x A$ [3 D$\forall$]

Poprzednio udowodniliśmy metatezę:

(ii) $A \rightarrow \exists \mathrm{x} A$

Znaczy to, że dowolna formuła zdaniowa o powyższym schemacie jest tezą *KRP*. A jeśli tak, to również dowolna formuła zdaniowa, której „składniki" mają postać $\neg A$. Z tego właśnie powodu możemy użyć wyrażenia (1) jako przesłanki w dowodzie metatezy:

$$\neg \exists x \neg A \rightarrow \forall x A$$

Uzbrojeni w powyższe wyjaśnienia, mogą teraz Państwo przystąpić albo do rozszyfrowywania notatek z wykładu, albo do studiowania odpowiedniego rozdziału podręcznika Tadeusza Batoga pt. „Podstawy logiki”.

Patrząc z czysto syntaktycznego punktu widzenia, znak równości/ identyczności = jest predykatem dwuargumentowym: w połączeniu z dwiema nazwami tworzy on wyrażenie o kategorii zdania.

W języku *KRP* dysponujemy nieskończoną ilością predykatów dwuargumentowych i nic nie stoi na przeszkodzie, aby uznać, ze jeden z nich – np. $P_1^2$ – reprezentuje właśnie predykat =.

W *KRP* o predykacie = zakładamy to samo, co o innych predykatach dwuargumentowych – czyli niewiele. Z drugiej strony, jest przedmiotem kontrowersji, czy równość/ identyczność jest stałą logiczną, czy też nie.

Jakkolwiek rozstrzygniemy tę kontrowersję, warto wiedzieć, że obok Klasycznego Rachunku Predykatów istnieje również Klasyczny Rachunek Predykatów z Identycznością (dalej: $KRP_=$).

Przypomnijmy, że język *KRP*$_=$ budujemy prawie tak samo, jak język *KRP*; w języku *KRP*$_=$ mamy jednak, obok „standardowych" formuł atomowych języka *KRP*, *również* formuły atomowe postaci:

$$\tau_1 = \tau_2$$

gdzie $\tau_1$, $\tau_2$ są termami.

Różnica między *KRP* a *KRP*$_=$ polega na tym, że w *KRP*$_=$ oprócz wszystkich aksjomatów *KRP* występują również dodatkowe aksjomaty, charakteryzujące predykat =. Aksjomaty te zwiemy *aksjomatami identyczności*.

Aksjomaty identyczności można formułować na kilka sposobów. My przyjmiemy tutaj, że aksjomaty identyczności to formuły zdaniowe języka *KRP*$_=$ podpadające pod następujące schematy:[2]

[2] Znaków *x*, *y*, *z*, $z_1$, .... używam tutaj jako metazmiennych, reprezentujących zmienne indywiduowe.

(i) $x = x$

(ii) $x = y \rightarrow y = x$

(iii) $x = y \wedge y = z \rightarrow x = z$

(iv) $x = y \rightarrow (F_k^n(z_1,\ldots, z_{i-1}, x, z_{i+1},\ldots, z_n) = F_k^n(z_1,\ldots, z_{i-1}, y, z_{i+1},\ldots, z_n))$

(v) $x = y \rightarrow (P_k^n(z_1,\ldots, z_{i-1}, x, z_{i+1},\ldots, z_n) \leftrightarrow P_k^n(z_1,\ldots, z_{i-1}, y, z_{i+1},\ldots, z_n))$

Komentarz: Napis $F_k^n(z_1,\ldots, z_{i-1}, x, z_{i+1},\ldots, z_n)$ oznacza dowolny term, zbudowany z symbolu funkcyjnego $F_k^n$ (gdzie $n \geq 1$, $k \geq 1$) oraz $n$ zmiennych indywiduowych, którego $i$-tą zmienną ($1 \leq i \leq n$) jest to samo $x$, o którym mowa w poprzedniku implikacji (iv). Podobnie czytamy napis $F_k^n(z_1,\ldots, z_{i-1}, y, z_{i+1},\ldots, z_n)$ – z tym, że teraz $i$-tą zmienną jest $y$ występujące w poprzedniku implikacji (iv). Tak więc wzór (iv) wyznacza w istocie nieskończenie wiele schematów aksjomatów.

Podobnie jest w przypadku wzoru (v). Różnica polega na tym, że w (v) mówimy o predykatach $n$-argumentowych ($n \geq 1$) oraz o formułach atomowych.

Zbiór wszystkich aksjomatów identyczności oznaczymy symbolem ***Id***.

Każda teza *KRP* jest tezą *KRZ*$_=$, ale nie na odwrót. Niżej podaję dwa przykłady dowodów tez specyficznych dla *KRP*$_=$.

Przykład 12.5. Dowód tezy $\exists x_1(x_1 = a_1 \wedge P_1^1(x_1)) \rightarrow P_1^1(a_1)$

| | |
|---|---|
| 1. $x_1 = x_2 \rightarrow (P_1^1(x_1) \leftrightarrow P_1^1(x_2))$ | [Ax.] |
| 2. $(P_1^1(x_1) \leftrightarrow P_1^1(x_2)) \rightarrow (P_1^1(x_1) \rightarrow P_1^1(x_2))$ | [Ax.] |
| 3. $x_1 = x_2 \rightarrow (P_1^1(x_1) \rightarrow P_1^1(x_2))$ | [1,2 RSH] |
| 4. $x_1 = x_2 \wedge P_1^1(x_1) \rightarrow P_1^1(x_2)$ | [3 RIMP] |
| 5. $x_1 = a_1 \wedge P_1^1(x_1) \rightarrow P_1^1(a_1)$ | [4 RP: $x_2 / a_1$] |
| 6. $\exists x_1 (x_1 = a_1 \wedge P_1^1(x_1)) \rightarrow P_1^1(a_1)$ | [5 D$\exists$] |

Przykład 12.6. Dowód tezy $P_1^1(a_1) \rightarrow \forall x_1\ (x_1 = a_1 \rightarrow P_1^1(x_1))$.

| | |
|---|---|
| 1. $x_1 = x_2 \rightarrow (P_1^1(x_1) \leftrightarrow P_1^1(x_2))$ | [Ax.] |
| 2. $(P_1^1(x_1) \leftrightarrow P_1^1(x_2)) \rightarrow (P_1^1(x_2) \rightarrow P_1^1(x_1))$ | [Ax.] |
| 3. $x_1 = x_2 \rightarrow (P_1^1(x_2) \rightarrow P_1^1(x_1))$ | [1,2 RSH] |
| 4. $P_1^1(x_2) \rightarrow (x_1 = x_2 \rightarrow P_1^1(x_1))$ | [3 RKO] |
| 5. $P_1^1(a_1) \rightarrow (x_1 = a_1 \rightarrow P_1^1(x_1))$ | [4 RP: $x_2 / a_1$] |
| 6. $P_1^1(a_1) \rightarrow \forall x_1(x_1 = a_1 \rightarrow P_1^1(x_1))$ | [5 D$\forall$] |

**Dodatek:**

A oto lista rozważanych metatez *KRP* (w przyjętej na tym wykładzie notacji[3]; w nawiasach kwadratowych podaje standardowe nazwy – o ile takie istnieją):

**1.** $\forall xA \to A$

**2.** $\forall xA \to A[x/\tau]$, *o ile term* $\tau$ *jest podstawialny za x do A*

[*Dictum de omni*]

**3.** $A \to \exists xA$

4. $A[x/\tau] \to \exists xA$, *o ile term* $\tau$ *jest podstawialny za x do A*

[*Dictum de singulo*]

---

[3] Liter *x*, *y* używam tutaj jako metazmiennych, reprezentujących zmienne indywiduowe.

**5.** $\forall xA \rightarrow \exists xA$

**6.** $\forall xA \leftrightarrow \forall yA[x/y]$, *o ile zmienna y nie jest wolna w A oraz y jest podstawialna za x do A*.

**7.** $\exists xA \leftrightarrow \exists yA[x/y]$, *o ile zmienna y nie jest wolna w A oraz y jest podstawialna za x do A*.

[(**6**) i (**7**) to *prawa przemianowywania zmiennych związanych*]

**8.** $\forall xA \leftrightarrow A$, *o ile A nie zawiera x jako zmiennej wolnej.*

**9.** $\exists xA \leftrightarrow A$, *o ile A nie zawiera x jako zmiennej wolnej.*

**10.** $\forall x \forall y A \leftrightarrow \forall y \forall x A$

**11.** $\exists x \exists y A \leftrightarrow \exists y \exists x A$

**12.** $\exists x \forall y A \rightarrow \forall y \exists x A$

[(**10**), (**11**) i (**12**) to *prawa przestawiania kwantyfikatorów*]

**13.** $\forall x \forall y A \rightarrow \forall x A[y/x]$, *o ile x jest podstawialna za y do A.*

[*Prawo łączenia dużych kwantyfikatorów*]

**14.** $\exists x A[x/y] \rightarrow \exists x \exists y\, A$

[*Prawo rozdrabniania małych kwantyfikatorów*]

**15.** $\neg \forall x A \leftrightarrow \exists x \neg A$

**16.** $\neg \exists x A \leftrightarrow \forall x \neg A$

[(**15**) i (**16**) to *prawa De Morgana*]

**17.** $\forall xA \leftrightarrow \neg\exists x\neg A$

**18.** $\exists xA \leftrightarrow \neg\forall x\neg A$

**19.** $\forall x(A \to B) \wedge A \to B$

**20.** $\forall x(A \to B) \wedge A[x/\tau] \to B[x/\tau]$, *o ile term* $\tau$ *jest podstawialny za x do A i do B*.

**21.** $\forall x(A \to B) \to (\forall xA \to B)$

**22.** $\forall x(A \to B) \to (\forall xA \to \forall xB)$

[*Prawo rozkładania dużego kwantyfikatora*]

**23.** $\forall x(A \to B) \wedge A \to \exists xB$

**24.** $\forall x(A \to B) \to (A \to \exists xB)$

**25.** $\forall x(A \to B) \to (\exists xA \to \exists xB)$

[*Prawo rozkładania małego kwantyfikatora*]

**26.** $\forall x(A \to B) \leftrightarrow (\exists xA \to B)$, *o ile x nie jest wolna w B*.

**27.** $\forall x(A \to B) \leftrightarrow (A \to \forall xB)$, *o ile x nie jest wolna w A*.

**28.** $\exists x(A \to B) \leftrightarrow (\forall xA \to B)$, *o ile x nie jest wolna w B*.

**29.** $\exists x(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow \exists xB)$, *o ile x nie jest wolna w A*.

**30.** $\forall x(A \wedge B) \leftrightarrow \forall xA \wedge \forall xB$

[*Prawo rozdzielności dużego kwantyfikatora względem koniunkcji*]

**31**. $\exists x(A \vee B) \leftrightarrow \exists xA \vee \exists xB$

[*Prawo rozdzielności małego kwantyfikatora względem alternatywy*]

**32.** $\forall xA \vee \forall xB \rightarrow \forall x(A \vee B)$

**33**. $\exists x(A \wedge B) \rightarrow \exists xA \wedge \exists xB$

**34.** $\forall x(A \wedge B) \leftrightarrow \forall xA \wedge B$, *o ile x nie jest wolna w B.*

**35.** $\forall x(A \wedge B) \leftrightarrow A \wedge \forall x\, B$, *o ile x nie jest wolna w A.*

**36.** $\forall x(A \vee B) \leftrightarrow \forall xA \vee B$, *o ile x nie jest wolna w B.*

**37.** $\forall x(A \vee B) \leftrightarrow A \vee \forall x\, B$, *o ile x nie jest wolna w A.*

**38.** $\exists x(A \wedge B) \leftrightarrow \exists xA \wedge B$, *o ile x nie jest wolna w B.*

**39.** $\exists x(A \wedge B) \leftrightarrow A \wedge \exists xB$, *o ile x nie jest wolna w A.*

**40.** $\exists x(A \vee B) \leftrightarrow \exists xA \vee B$, *o ile x nie jest wolna w B.*

**41.** $\exists x(A \vee B) \leftrightarrow A \vee \exists x\, B$, *o ile x nie jest wolna w A.*

**42.** $\forall x(A \leftrightarrow B) \rightarrow \forall x(A \rightarrow B) \wedge \forall x(B \rightarrow A)$

**43.** $\forall x(A \leftrightarrow B) \rightarrow (\forall xA \leftrightarrow \forall xB)$

**44.** $\forall x(A \leftrightarrow B) \rightarrow (\exists xA \leftrightarrow \exists xB)$