Andrzej Wiśniewski

Logika I

Materiały do wykładu dla studentów kognitywistyki

Wykłady 12 i 13. Dowód i dowodzenie w KRP. Tezy KRP

Pojęcia: formuły zdaniowej języka Klasycznego Rachunku Predykatów (dalej: *KRP*) oraz aksjomatu *KRP* zostały scharakteryzowane na poprzednich wykładach. Mówiąc dalej o formułach zdaniowych, będziemy mieli na myśli formuły zdaniowe języka *KRP*. Zbiór wszystkich aksjomatów KRP oznaczymy przez ***Arp***.

Pojęcie *dowodu* formuły zdaniowej *A* w oparciu o zbiór aksjomatów *KRP* rozumiemy podobnie jak w przypadku *KRZ*.

Definicja 12.1. Dowodem formuły zdaniowej *A* w oparciu o zbiór aksjomatów *KRP nazywamy skończony ciąg formuł zdaniowych, którego ostatnim wyrazem jest formuła A, taki, że dowolna formuła zdaniowa będąca wyrazem tego ciągu:*

(1) *jest aksjomatem KRP, lub*

(2) *powstaje z jakiegoś wcześniejszego wyrazu rozważanego ciągu poprzez zastosowanie:*

- *reguły podstawiania* RP, *lub*
- *reguły opuszczania dużego kwantyfikatora* O∀, *lub*
- *reguły dołączania dużego kwantyfikatora* D∀, *lub*
- *reguły opuszczania małego kwantyfikatora* O∃, *lub*
- *reguły dołączania małego kwantyfikatora* D∃, *lub*

(3) *powstaje z jakichś wcześniejszych wyrazów tego ciągu poprzez zastosowania reguły odrywania* RO.

Definicja dowodu w *KRP* w wersji dla purystów prezentuje się następująco:

Definicja 12.1*. Dowodem formuły zdaniowej *A* w oparciu o ***Arp*** *nazywamy każdy skończony ciąg formuł* D_1, D_2, ..., D_n *taki, że* $D_n = A$ *oraz dla każdego wskaźnika* $k \leq n$ *spełniony jest przynajmniej jeden z następujących warunków:*

(1) $D_k \in$ ***Arp***;

(2) *istnieją*: *wskaźnik* $i < k$, *term* τ *oraz wskaźnik j takie, że* τ *jest podstawialny za* x_j *do* D_i *oraz* D_k *ma postać* $D_i\,[x_j/\tau]$;

(3) *istnieją*: *wskaźnik* $i < k$, *formuły zdaniowe B i C oraz wskaźnik j takie, że* D_i *ma postać* $B \to \forall x_j\, C$, *natomiast* D_k *ma postać* $B \to C$;

(4) *istnieją*: *wskaźnik* $i < k$, *formuły zdaniowe B i C oraz wskaźnik j takie, że* x_j *nie jest wolna w B, oraz* D_i *ma postać* $B \to C$, *natomiast* D_k *ma postać* $B \to \forall x_j\, C$;

(5) *istnieją*: *wskaźnik* $i < k$, *formuły zdaniowe B i C oraz wskaźnik j takie, że* D_i *ma postać* $\exists x_j\, B \to \forall x_j\, C$, *natomiast* D_k *ma postać* $B \to C$;

(6) *istnieją*: *wskaźnik* $i < k$, *formuły zdaniowe B i C oraz wskaźnik j takie, że* x_j *nie jest wolna w C, oraz* D_i *ma postać* $B \to C$, *natomiast* D_k *ma postać* $\exists x_j\, B \to C$;

(7) *istnieją wskaźniki* $i, j < k$ *takie, że* D_i *ma postać* $D_j \to D_k$.

Definicja 12.2. Tezą *KRP nazywamy formułę zdaniową, która jest aksjomatem KRP lub posiada przynajmniej jeden dowód w oparciu o aksjomaty KRP.*

Komentarz: Podobnie jak w przypadku *KRZ*, wystarczyłoby powiedzieć, że tezą *KRP* jest formuła zdaniowa, która posiada przynajmniej jeden dowód w oparciu o aksjomaty *KRP*. Powód jest następujący: niech A będzie dowolnym aksjomatem *KRP*. Ciąg jednoelementowy <A> jest, zgodnie z definicją 12.1*, dowodem formuły A w oparciu o ***Arp***, jako że $A = A$ oraz $A \in$ ***Arp***. Taki „dowód” nie jest rzecz jasna żadnym *uzasadnieniem* aksjomatu; po prostu definicja dowodu została tak zbudowana, aby pojęcie tezy dało się zdefiniować prosto: teza to formuła zdaniowa, która ma przynajmniej jeden dowód w oparciu o aksjomaty. Ponieważ jednak powyższe zależności nie są od razu widoczne, zdefiniowaliśmy tu pojęcie tezy w sposób nieco redundantny.

Przykład 12.1. Oto dowód tezy:

$$(*)\quad \forall x_1 P_1^{\ 1}(x_1) \rightarrow \exists x_1 P_1^{\ 1}(x_1)$$

1. $\forall x_1 P_1^{\ 1}(x_1) \rightarrow \forall x_1 P_1^{\ 1}(x_1)$ [Ax.]
2. $\forall x_1 P_1^{\ 1}(x_1) \rightarrow P_1^{\ 1}(x_1)$ [1 O$\forall$]
3. $\exists x_1 P_1^{\ 1}(x_1) \rightarrow \exists x_1 P_1^{\ 1}(x_1)$ [Ax.]
4. $P_1^{\ 1}(x_1) \rightarrow \exists x_1 P_1^{\ 1}(x_1)$ [3 O$\exists$]
5. $(\forall x_1 P_1^{\ 1}(x_1) \rightarrow P_1^{\ 1}(x_1)) \rightarrow ((P_1^{\ 1}(x_1) \rightarrow \exists x_1 P_1^{\ 1}(x_1)) \rightarrow$
   $(\forall x_1 P_1^{\ 1}(x_1) \rightarrow \exists x_1 P_1^{\ 1}(x_1)))$ [Ax.]
6. $(P_1^{\ 1}(x_1) \rightarrow \exists x_1 P_1^{\ 1}(x_1)) \rightarrow (\forall x_1 P_1^{\ 1}(x_1) \rightarrow \exists x_1 P_1^{\ 1}(x_1))$ [5,2 RO]
7. $\forall x_1 P_1^{\ 1}(x_1) \rightarrow \exists x_1 P_1^{\ 1}(x_1)$ [6,4 RO]

Komentarz: Dowodem jest ciąg formuł zdaniowych; numery po lewej i komentarze po prawej to *informacja dowodowa*, która ułatwia nam życie, ale do samego dowodu nie należy. „Ax." oznacza, że dana formuła jest aksjomatem *KRP*.

Przykład 12.2. Dowód tezy:

(**) $\forall x_2\,(P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2)) \rightarrow \exists x_2\,(P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2))$

1. $\forall x_2\,(P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2)) \rightarrow \forall x_2\,(P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2))$ [Ax.]
2. $\forall x_2\,(P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2)) \rightarrow P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2)$ [1 O∀]
3. $\exists x_2\,(P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2)) \rightarrow \exists x_2\,(P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2))$ [Ax.]
4. $P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2) \rightarrow \exists x_2\,(P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2))$ [3 O∃]
5. $(\forall x_2\,(P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2)) \rightarrow P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2)) \rightarrow$
   $((P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2) \rightarrow \exists x_2\,(P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2))) \rightarrow$
   $(\forall x_2\,(P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2)) \rightarrow \exists x_2\,(P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2))))$ [Ax.]
6. $(P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2)) \rightarrow \exists x_2\,(P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2)) \rightarrow$
   $(\forall x_2\,(P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2)) \rightarrow \exists x_2\,(P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2)))$ [5,2 RO]
7. $\forall x_2\,(P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2)) \rightarrow \exists x_2\,(P_7^2(x_2, a_{18}) \wedge P_6^1(x_2))$ [6,4 RO]

Komentarz: Kolory zostały użyte w celu uwidocznienia struktury dowodu; same formuły zdaniowe oczywiście „kolorowe” nie są.

Tezy (*) oraz (**) podpadają pod następujący *schemat metajęzykowy*:

(***) $\forall xA \to \exists xA$

gdzie x reprezentuje dowolną zmienną indywiduową[1], a A – dowolną formułę zdaniową. Ponadto dowody tez (*) oraz (**) mają *wspólny schemat*:

1. $\forall xA \to \forall xA$	[Ax.]
2. $\forall xA \to A$	[1 O$\forall$]
3. $\exists xA \to \exists xA$	[Ax.]
4. $A \to \exists xA$	[3 O$\exists$]
5. $(\forall xA \to A) \to ((A \to \exists xA) \to (\forall xA \to \exists xA))$	[Ax.]
6. $(A \to \exists xA) \to (\forall xA \to \exists xA)$	[5,2 RO]
7. $\forall xA \to \exists xA$	[6,4 RO]

[1] Litery x używam tutaj zatem jako metazmiennej, której wartością może być jakakolwiek konkretna zmienna indywiduowa. Na poprzednim wykładzie litera x występowała w innej roli: jako skrót napisu x_1.

Wyrażenie (***) nie jest tezą *KRP*, lecz *schematem tez*, inaczej: *metatezą*. Podobnie powyższy ciąg wyrażeń metajęzykowych nie jest dowodem, lecz *schematem dowodu*. W praktyce wygodniej jest operować metatezami (każda z nich jest „przepisem" budowania nieskończenie wielu tez) oraz podawać schematy dowodów (każdy taki schemat jest „przepisem", zgodnie z którym możemy zbudować dowód tezy podpadającej pod odpowiednią metatezę).

Schematy dowodów, których ostatnim wyrazem jest dana metateza, będziemy nazywać po prostu dowodami tej metatezy.

Podobnie jak w przypadku *KRZ*, w dowodach (i schematach dowodów) w *KRP* możemy używać w charakterze przesłanek nie tylko aksjomatów *KRP* (względnie schematów aksjomatów), lecz również uprzednio udowodnionych tez (metatez). Powód jest prosty: każdy dowód, w którym korzystamy z tez uprzednio udowodnionych można „przedłużyć" w taki sposób, aby jedynymi przesłankami były aksjomaty.

Przykład 12.3. Poniżej podane zostały dowody dwóch metatez:

(i) $\forall xA \to A$.

1. $\forall xA \to \forall xA$	[Ax.]
2. $\forall xA \to A$	[1 O$\forall$]

(ii) $A \to \exists xA$

1. $\exists xA \to \exists xA$	[Ax.]
2. $A \to \exists xA$	[1 O$\exists$]

Za dowód metatezy (***) możemy teraz uznać następujący ciąg formuł metajęzykowych:

1. $\forall xA \to A$	[(i)]
2. $A \to \exists xA$	[(ii)]
3. $(\forall xA \to A) \to ((A \to \exists xA) \to (\forall xA \to \exists xA))$	[Ax.]
4. $(A \to \exists xA) \to (\forall xA \to \exists xA)$	[3,1 RO]
5. $\forall xA \to \exists xA$	[4,2 RO]

Ponieważ *KRP* jest “nadbudowany” nad *KRZ*, w dowodach w *KRP* możemy stosować analogiczne wtórne reguły inferencyjne, jak w przypadku *KRZ*.

Przykład 12.4. Przypomnijmy regułę wtórną opartą na prawie sylogizmu hipotetycznego:

$$\text{RSH:}\quad \frac{A \rightarrow B \qquad B \rightarrow C}{A \rightarrow C}$$

Dowód metatezy (***) możemy poprowadzić następująco:

1. $\forall xA \rightarrow A$	[(i)]
2. $A \rightarrow \exists xA$	[(ii)]
3. $\forall xA \rightarrow \exists xA$	[1, 2 RSH]

W *KRP* mamy ponadto *swoiste* wtórne reguły inferencyjne. Przykładem jest reguła generalizacji:

RGEN: $$\frac{A}{\forall x_i\, A}$$

Dlaczego **RGEN** jest regułą wtórną? Załóżmy, że w dowodzie „doszliśmy” do formuły *A*. Dalej możemy poprowadzić dowód następująco:

$A \to ((B \to B) \to A)$	[Ax.], *wybieramy B takie, że* x_i *nie jest w nim wolna*.
$(B \to B) \to A$	*Na mocy* RO, *bo mamy już A.*
$(B \to B) \to \forall x_i\, A$	*Na mocy* D$\forall$, *bo* x_i *nie jest wolna w B*.
$B \to B$	[Ax]
$\forall x_i\, A$	*Na mocy* RO.

Zamiast wykonywać powyższe, standardowe kroki, możemy zatem zastosować **RGEN** i „od razu” otrzymać $\forall x_i\, A$.

Uwaga: Nie należy stosować **RGEN** jako schematu wnioskowania dedukcyjnego – konsekwencje mogą być bolesne :)

Budując dowody metatez, możemy korzystać zarówno z metatez uprzednio udowodnionych, jak i z ich tzw. *pseudpodstawień*. Oto przykład:

1. $\neg A \rightarrow \exists x \neg A$
2. $(\neg A \rightarrow \exists x \neg A) \rightarrow (\neg \exists x \neg A \rightarrow A)$ [Ax.]
3. $\neg \exists x \neg A \rightarrow A$ [2,1 RO]
4. $\neg \exists x \neg A \rightarrow \forall x A$ [3 D$\forall$]

Poprzednio udowodniliśmy metatezę:

(ii) $A \rightarrow \exists \mathrm{x} A$

Znaczy to, że dowolna formuła zdaniowa o powyższym schemacie jest tezą *KRP*. A jeśli tak, to również dowolna formuła zdaniowa, której „składniki" mają postać $\neg A$. Z tego właśnie powodu możemy użyć wyrażenia (1) jako przesłanki w dowodzie metatezy:

$$\neg \exists x \neg A \rightarrow \forall x A$$

Uzbrojeni w powyższe wyjaśnienia, mogą teraz Państwo przystąpić albo do rozszyfrowywania notatek z wykładu, albo do studiowania odpowiedniego rozdziału podręcznika Tadeusza Batoga pt. „Podstawy logiki”.

Patrząc z czysto syntaktycznego punktu widzenia, znak równości/ identyczności = jest predykatem dwuargumentowym: w połączeniu z dwiema nazwami tworzy on wyrażenie o kategorii zdania.

W języku *KRP* dysponujemy nieskończoną ilością predykatów dwuargumentowych i nic nie stoi na przeszkodzie, aby uznać, ze jeden z nich – np. P_1^2 – reprezentuje właśnie predykat =.

W *KRP* o predykacie = zakładamy to samo, co o innych predykatach dwuargumentowych – czyli niewiele. Z drugiej strony, jest przedmiotem kontrowersji, czy równość/ identyczność jest stałą logiczną, czy też nie.

Jakkolwiek rozstrzygniemy tę kontrowersję, warto wiedzieć, że obok Klasycznego Rachunku Predykatów istnieje również Klasyczny Rachunek Predykatów z Identycznością (dalej: $KRP_=$).

Przypomnijmy, że język *KRP*$_=$ budujemy prawie tak samo, jak język *KRP*; w języku *KRP*$_=$ mamy jednak, obok „standardowych" formuł atomowych języka *KRP*, *również* formuły atomowe postaci:

$$\tau_1 = \tau_2$$

gdzie τ_1, τ_2 są termami.

Różnica między *KRP* a *KRP*$_=$ polega na tym, że w *KRP*$_=$ oprócz wszystkich aksjomatów *KRP* występują również dodatkowe aksjomaty, charakteryzujące predykat =. Aksjomaty te zwiemy *aksjomatami identyczności*.

Aksjomaty identyczności można formułować na kilka sposobów. My przyjmiemy tutaj, że aksjomaty identyczności to formuły zdaniowe języka *KRP*$_=$ podpadające pod następujące schematy:[2]

---

[2] Znaków *x*, *y*, *z*, z_1, ... używam tutaj jako metazmiennych, reprezentujących zmienne indywiduowe.

(i) $x = x$

(ii) $x = y \rightarrow y = x$

(iii) $x = y \wedge y = z \rightarrow x = z$

(iv) $x = y \rightarrow (F_k^n(z_1,\ldots, z_{i-1}, x, z_{i+1},\ldots, z_n) = F_k^n(z_1,\ldots, z_{i-1}, y, z_{i+1},\ldots, z_n))$

(v) $x = y \rightarrow (P_k^n(z_1,\ldots, z_{i-1}, x, z_{i+1},\ldots, z_n) \leftrightarrow P_k^n(z_1,\ldots, z_{i-1}, y, z_{i+1},\ldots, z_n))$

Komentarz: Napis $F_k^n(z_1,\ldots, z_{i-1}, x, z_{i+1},\ldots, z_n)$ oznacza dowolny term, zbudowany z symbolu funkcyjnego F_k^n (gdzie $n \geq 1$, $k \geq 1$) oraz n zmiennych indywiduowych, którego i-tą zmienną ($1 \leq i \leq n$) jest to samo x, o którym mowa w poprzedniku implikacji (iv). Podobnie czytamy napis $F_k^n(z_1,\ldots, z_{i-1}, y, z_{i+1},\ldots, z_n)$ – z tym, że teraz i-tą zmienną jest y występujące w poprzedniku implikacji (iv). Tak więc wzór (iv) wyznacza w istocie nieskończenie wiele schematów aksjomatów.

Podobnie jest w przypadku wzoru (v). Różnica polega na tym, że w (v) mówimy o predykatach n-argumentowych ($n \geq 1$) oraz o formułach atomowych.

Zbiór wszystkich aksjomatów identyczności oznaczymy symbolem ***Id***.

Każda teza *KRP* jest tezą $KRZ_{=}$, ale nie na odwrót. Niżej podaję dwa przykłady dowodów tez specyficznych dla $KRP_{=}$.

Przykład 12.5. Dowód tezy $\exists x_1(x_1 = a_1 \wedge P_1^1(x_1)) \rightarrow P_1^1(a_1)$

1. $x_1 = x_2 \rightarrow (P_1^1(x_1) \leftrightarrow P_1^1(x_2))$ [Ax.]
2. $(P_1^1(x_1) \leftrightarrow P_1^1(x_2)) \rightarrow (P_1^1(x_1) \rightarrow P_1^1(x_2))$ [Ax.]
3. $x_1 = x_2 \rightarrow (P_1^1(x_1) \rightarrow P_1^1(x_2))$ [1,2 RSH]
4. $x_1 = x_2 \wedge P_1^1(x_1) \rightarrow P_1^1(x_2)$ [3 RIMP]
5. $x_1 = a_1 \wedge P_1^1(x_1) \rightarrow P_1^1(a_1)$ [4 RP: x_2 / a_1]
6. $\exists x_1 (x_1 = a_1 \wedge P_1^1(x_1)) \rightarrow P_1^1(a_1)$ [5 D$\exists$]

Przykład 12.6. Dowód tezy $P_1^1(a_1) \rightarrow \forall x_1\, (x_1 = a_1 \rightarrow P_1^1(x_1))$.

1. $x_1 = x_2 \rightarrow (P_1^1(x_1) \leftrightarrow P_1^1(x_2))$ [Ax.]
2. $(P_1^1(x_1) \leftrightarrow P_1^1(x_2)) \rightarrow (P_1^1(x_2) \rightarrow P_1^1(x_1))$ [Ax.]
3. $x_1 = x_2 \rightarrow (P_1^1(x_2) \rightarrow P_1^1(x_1))$ [1,2 RSH]
4. $P_1^1(x_2) \rightarrow (x_1 = x_2 \rightarrow P_1^1(x_1))$ [3 RKO]
5. $P_1^1(a_1) \rightarrow (x_1 = a_1 \rightarrow P_1^1(x_1))$ [4 RP: x_2 / a_1]
6. $P_1^1(a_1) \rightarrow \forall x_1(x_1 = a_1 \rightarrow P_1^1(x_1))$ [5 D$\forall$]

Dodatek:

A oto lista rozważanych metatez *KRP* (w przyjętej na tym wykładzie notacji[3]; w nawiasach kwadratowych podaje standardowe nazwy – o ile takie istnieją):

1. $\forall xA \to A$

2. $\forall xA \to A[x/\tau]$, *o ile term* τ *jest podstawialny za x do A*

[*Dictum de omni*]

3. $A \to \exists xA$

4. $A[x/\tau] \to \exists xA$, *o ile term* τ *jest podstawialny za x do A*

[*Dictum de singulo*]

---

[3] Liter *x*, *y* używam tutaj jako metazmiennych, reprezentujących zmienne indywiduowe.

5. $\forall xA \rightarrow \exists xA$

6. $\forall xA \leftrightarrow \forall yA[x/y]$, *o ile zmienna y nie jest wolna w A oraz y jest podstawialna za x do A*.

7. $\exists xA \leftrightarrow \exists yA[x/y]$, *o ile zmienna y nie jest wolna w A oraz y jest podstawialna za x do A*.

[(**6**) i (**7**) to *prawa przemianowywania zmiennych związanych*]

8. $\forall xA \leftrightarrow A$*, o ile A nie zawiera x jako zmiennej wolnej.*

9. $\exists xA \leftrightarrow A$*, o ile A nie zawiera x jako zmiennej wolnej.*

10. $\forall x \forall y A \leftrightarrow \forall y \forall x A$

11. $\exists x \exists y A \leftrightarrow \exists y \exists x A$

12. $\exists x \forall y A \rightarrow \forall y \exists x A$

[(**10**), (**11**) i (**12**) to *prawa przestawiania kwantyfikatorów*]

13. $\forall x \forall y A \rightarrow \forall x A[y/x]$, *o ile x jest podstawialna za y do A.*

[*Prawo łączenia dużych kwantyfikatorów*]

14. $\exists x A[x/y] \rightarrow \exists x \exists y\, A$

[*Prawo rozdrabniania małych kwantyfikatorów*]

15. $\neg \forall x A \leftrightarrow \exists x \neg A$

16. $\neg \exists x A \leftrightarrow \forall x \neg A$

[(**15**) i (**16**) to *prawa De Morgana*]

17. $\forall xA \leftrightarrow \neg\exists x\neg A$

18. $\exists xA \leftrightarrow \neg\forall x\neg A$

19. $\forall x(A \rightarrow B) \wedge A \rightarrow B$

20. $\forall x(A \rightarrow B) \wedge A[x/\tau] \rightarrow B[x/\tau]$, *o ile term* τ *jest podstawialny za x do A i do B*.

21. $\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall xA \rightarrow B)$

22. $\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall xA \rightarrow \forall xB)$

[*Prawo rozkładania dużego kwantyfikatora*]

23. $\forall x(A \to B) \land A \to \exists xB$

24. $\forall x(A \to B) \to (A \to \exists xB)$

25. $\forall x(A \to B) \to (\exists xA \to \exists xB)$

[*Prawo rozkładania małego kwantyfikatora*]

26. $\forall x(A \to B) \leftrightarrow (\exists xA \to B)$, *o ile x nie jest wolna w B*.

27. $\forall x(A \to B) \leftrightarrow (A \to \forall xB)$, *o ile x nie jest wolna w A*.

28. $\exists x(A \to B) \leftrightarrow (\forall xA \to B)$, *o ile x nie jest wolna w B*.

29. $\exists x(A \to B) \leftrightarrow (A \to \exists xB)$, *o ile x nie jest wolna w A*.

30. $\forall x(A \wedge B) \leftrightarrow \forall xA \wedge \forall xB$

[*Prawo rozdzielności dużego kwantyfikatora względem koniunkcji*]

31. $\exists x(A \vee B) \leftrightarrow \exists xA \vee \exists xB$

[*Prawo rozdzielności małego kwantyfikatora względem alternatywy*]

32. $\forall xA \vee \forall xB \to \forall x(A \vee B)$

33. $\exists x(A \wedge B) \to \exists xA \wedge \exists xB$

34. $\forall x(A \wedge B) \leftrightarrow \forall xA \wedge B$, *o ile x nie jest wolna w B.*

35. $\forall x(A \wedge B) \leftrightarrow A \wedge \forall x\, B$, *o ile x nie jest wolna w A.*

36. $\forall x(A \vee B) \leftrightarrow \forall xA \vee B$, *o ile x nie jest wolna w B.*

37. $\forall x(A \vee B) \leftrightarrow A \vee \forall x\, B$, *o ile x nie jest wolna w A.*

38. $\exists x(A \wedge B) \leftrightarrow \exists xA \wedge B$, *o ile x nie jest wolna w B.*

39. $\exists x(A \wedge B) \leftrightarrow A \wedge \exists xB$, *o ile x nie jest wolna w A.*

40. $\exists x(A \vee B) \leftrightarrow \exists xA \vee B$, *o ile x nie jest wolna w B.*

41. $\exists x(A \vee B) \leftrightarrow A \vee \exists x\, B$, *o ile x nie jest wolna w A.*

42. $\forall x(A \leftrightarrow B) \rightarrow \forall x(A \rightarrow B) \wedge \forall x(B \rightarrow A)$

43. $\forall x(A \leftrightarrow B) \rightarrow (\forall xA \leftrightarrow \forall xB)$

44. $\forall x(A \leftrightarrow B) \rightarrow (\exists xA \leftrightarrow \exists xB)$