

Andrzej Wiśniewski
Logika I
Materiały do wykładu dla studentów kognitywistyki

Wykłady 14 i 15. Elementy metalogiki

Ogólne pojęcie konsekwencji

Niech \mathbf{J} będzie językiem sformalizowanym.

Oznaczmy przez \mathbf{FORM}_J zbiór wszystkich poprawnie zbudowanych formuł języka \mathbf{J} . Funkcję $\mathbf{C}: 2^{\mathbf{FORM}_J} \rightarrow 2^{\mathbf{FORM}_J}$ (tj. funkcję, której argumentami i wartościami są zbiory poprawnie zbudowanych formuł języka \mathbf{J}) nazywamy **operacją konsekwencji** w języku \mathbf{J} wtw dla dowolnych podzbiorów X, Y zbioru \mathbf{FORM}_J spełnione są następujące warunki:

- (I) $X \subseteq \mathbf{C}(X)$,
- (II) $\mathbf{C}(\mathbf{C}(X)) \subseteq \mathbf{C}(X)$,
- (III) jeżeli $X \subseteq Y$, to $\mathbf{C}(X) \subseteq \mathbf{C}(Y)$.

Gdy ponadto dla dowolnego $A \in \mathbf{FORM}_J$ spełniony jest warunek:

- (IV) $A \in \mathbf{C}(X)$ wtw istnieje skończony podzbiór Z zbioru X taki, że $A \in \mathbf{C}(Z)$,

to \mathbf{C} nazywamy **finitystyczną operacją konsekwencji** w \mathbf{J} .

Ogólne pojęcie konsekwencji

Powstaje pytanie: jak wyznaczyć operację konsekwencji w danym języku sformalizowanym?

Jednym ze sposobów jest skorzystanie z pojęcia **derywacji** (inaczej: **wyprowadzenia**) formuły ze zbioru formuł, oczywiście derywacji/ wyprowadzenia z uwagi na zadany zbiór reguł inferencyjnych.

Zilustrujemy to na przykładzie języków pierwszego rzędu (pojęcie to zostało zdefiniowane na wykładzie 11a).

W dalszych rozważaniach zakładamy, że \mathcal{J} jest dowolnym ale ustalonym językiem pierwszego rzędu.

Stosowane rachunki predykatów

Zanim jednak pójdziemy dalej, zauważmy rzecz następującą: w każdym języku \mathbf{J} pierwszego rzędu „uboższym” od języka KRP (tj. takim, że występują w nim tylko niektóre, ale nie wszystkie, stałe indywidualowe/ symbole funkcyjne/ predykaty języka KRP) możemy wyrazić odpowiedni „fragment” klasycznego rachunku predykatów, $KRP_{\mathbf{J}}$. Konstrukcja jest następująca:

(a) za aksjomaty $KRP_{\mathbf{J}}$ bierzemy te wszystkie formuły zdaniowe języka \mathbf{J} , które można otrzymać z jakichś tautologii KRZ poprzez konsekwentne zastąpienie wszystkich występujących w nich zmiennych zdaniowych formułami zdaniowymi języka \mathbf{J} ,

(b) wprowadzamy reguły inferencyjne $O\forall$, $D\forall$, $O\exists$, $D\exists$, RO , RP , zakładając, że operują one na formułach zdaniowych języka \mathbf{J} ,

(c) dalej postępujemy analogicznie jak w przypadku KRP .

Zbudowany w powyższy sposób rachunek $KRP_{\mathbf{J}}$ nazywamy **stosowanym rachunkiem predykatów 1-go rzędu**.

W podobny sposób budujemy stosowane rachunki predykatów (1-go rzędu) z identycznością.

Dla kontrastu, KRP i $KRP_{=}$ nazywamy **czystymi** rachunkami predykatów.

Terminologia: Mówiąc dalej o formułach zdaniowych, będziemy mieli na myśli formuły zdaniowe naszego (dowolnego ale ustalonego) języka pierwszego rzędu \mathcal{J} .

Potrzebne nam pojęcie derywacji jest uogólnieniem wprowadzonego na poprzednim wykładzie pojęcia dowodu. Różnica polega na tym, że tym razem nie żądamy, aby przesłanki były aksjomatami klasycznego rachunku predykatów.

Definicja 14.1. Derywacją formuły zdaniowej A w oparciu o zbiór formuł zdaniowych X nazywamy skończony ciąg formuł zdaniowych, którego ostatnim wyrazem jest formuła A , taki, że dowolna formuła zdaniowa będąca wyrazem tego ciągu:

- (1) należy do zbioru X , lub
- (2) powstaje z jakiegoś wcześniejszego wyrazu rozważanego ciągu poprzez zastosowanie:
 - reguły podstawiania RP, lub
 - reguły opuszczania dużego kwantyfikatora $O\forall$, lub
 - reguły dołączania dużego kwantyfikatora $D\forall$, lub
 - reguły opuszczania małego kwantyfikatora $O\exists$, lub
 - reguły dołączania małego kwantyfikatora $D\exists$, lub
- (3) powstaje z jakichś wcześniejszych wyrazów tego ciągu poprzez zastosowania reguły odrywania RO.

Wersję dla purystów można otrzymać z definicji 12.1* :)

Derywacje i konsekwencje

Dalej, z powodów stylistycznych, zamiast „derywacja A w oparciu o X ” będę czasem mówił „**wyprowadzenie** A z X ”.

Oznaczmy symbolem $\mathbf{Cn}(X)$ zbiór **wszystkich** formuł zdaniowych, dla których istnieje przynajmniej jedna derywacja ze zbioru X (tj. zbiór tych wszystkich formuł zdaniowych, które można wyprowadzić, korzystając z reguł inferencyjnych *KRP*, ze zbioru „przesłanek” X).

Definicja 14.2. $A \in \mathbf{Cn}(X)$ wtw istnieje przynajmniej jedna derywacja A w oparciu o X .

Można łatwo udowodnić:

Twierdzenie 14.1:

- (I) $X \subseteq \mathbf{Cn}(X)$,
- (II) $\mathbf{Cn}(\mathbf{Cn}(X)) \subseteq \mathbf{Cn}(X)$,
- (III) jeżeli $X \subseteq Y$, to $\mathbf{Cn}(X) \subseteq \mathbf{Cn}(Y)$.

Gdy porównamy treść twierdzenia 14.1 z definicją (ogólnego) pojęcia konsekwencji, usprawiedliwionym staje się nazwanie zbioru $\mathbf{Cn}(X)$ **zbiorem wszystkich konsekwencji zbioru formuł zdaniowych X** .

Derywacje i konsekwencje

Terminologia: Napis „ $A \in \mathbf{Cn}(X)$ ” czytamy „ A jest **jedną z** konsekwencji X ”; „jedną z”, albowiem ze zbioru X można zawsze wyprowadzić wiele formuł zdaniowych. W praktyce frazę „jedną z” zwykle opuszczamy, trzeba jednak pamiętać, że jest ona zawsze domyślnie obecna. Gdy rozumiemy napis „ $A \in \mathbf{Cn}(X)$ ” jako „ A jest jedyną konsekwencją X ”, popełniamy błąd !

Zachodzi następujące twierdzenie o finitystyczności:

Twierdzenie 14.2. $A \in \mathbf{Cn}(X)$ wtw istnieje skończony podzbiór Z zbioru X taki, że $A \in \mathbf{Cn}(Z)$.

Powód jest prosty: każda derywacja jest skończonym ciągiem formuł zdaniowych, a zatem korzystamy w niej ze skończonej ilości elementów zbioru X – to właśnie będzie zbiór Z . Z drugiej strony, na mocy twierdzenia 14.1, skoro $Z \subseteq X$ oraz $A \in \mathbf{Cn}(Z)$, to $A \in \mathbf{Cn}(X)$.

Derywacje i konsekwencje logiczne

Dygresja 14.1. Zauważmy, że zbiór wszystkich tez KRP jest równy zbiorowi $\mathbf{Cn}(\mathbf{Arp})$.

Gdy mamy derywację formuły zdaniowej A w oparciu o zbiór formuł zdaniowych X , to jedynymi „przesłankami” tej derywacji mogą być formuły zdaniowe należące do zbioru X . Zliberalizujmy teraz ten warunek, dopuszczając, że przesłankami mogą ponadto być aksjomaty klasycznego rachunku predykatów (czystego lub stosowanego, w zależności od tego, czym jest \mathbf{J}). Zbiór tych aksjomatów oznaczmy przez \mathbf{Arp} . Wprowadźmy następującą definicję:

Definicja 14.3. $A \in \mathbf{Cn}_L(X)$ wtw $A \in \mathbf{Cn}(X \cup \mathbf{Arp})$

Można udowodnić:

Twierdzenie 14.3:

- (I) $X \subseteq \mathbf{Cn}_L(X)$,
- (II) $\mathbf{Cn}_L(\mathbf{Cn}_L(X)) \subseteq \mathbf{Cn}_L(X)$,
- (III) jeżeli $X \subseteq Y$, to $\mathbf{Cn}_L(X) \subseteq \mathbf{Cn}_L(Y)$.

Derywacje i konsekwencje logiczne

Napis „ $A \in \mathbf{Cn}_L(X)$ ” czytamy „ A jest jedną z konsekwencji logicznych zbioru X ”. Pojęcie definiowane przez definicję 14.3 to pojęcie **konsekwencji logicznej na gruncie logiki pierwszego rzędu**.

Zachodzi twierdzenie o finitystyczności konsekwencji logicznej:

Twierdzenie 14.4. $A \in \mathbf{Cn}_L(X)$ wtw istnieje skończony podzbiór Z zbioru X taki, że $A \in \mathbf{Cn}_L(Z)$.

Oznaczmy przez **Trp** zbiór wszystkich tez klasycznego rachunku predykatów (czystego lub stosowanego, w zależności od tego, jaki język rozważamy). Prawdziwe jest:

Twierdzenie 14.5. $A \in \mathbf{Cn}_L(X)$ wtw $A \in \mathbf{Cn}(X \cup \mathbf{Trp})$.

Twierdzenie 14.5 głosi w istocie, że A można wyprowadzić z przesłanek będących elementami zbioru X i/ lub aksjomatami klasycznego rachunku predykatów wtw A można wyprowadzić z przesłanek będących elementami zbioru X i/ lub tezami (niekoniecznie aksjomatami) rachunku predykatów.

Twierdzenie o dedukcji

Zachodzi również następujące *twierdzenie o dedukcji*.

Twierdzenie 14.6. *Jeżeli A jest zdaniem oraz $B \in \mathbf{Cn}_L(X \cup \{A\})$, to formuła zdaniowa $A \rightarrow B$ należy do zbioru $\mathbf{Cn}_L(X)$.*

Komentarz: Zostanie podany na wykładzie :)

Odnotujmy również następujące twierdzenie, nieco paradoksalne na pierwszy rzut oka (symbolem \emptyset oznaczamy zbiór pusty).

Twierdzenie 14.7. *$A \in \mathbf{Trp}$ wtw $A \in \mathbf{Cn}_L(\emptyset)$.*

„Paradoks” znika, gdy uświadomimy sobie, że $\mathbf{Cn}_L(\emptyset) = \mathbf{Cn}(\emptyset \cup \mathbf{Arp}) = \mathbf{Cn}(\mathbf{Arp})$.

Wnioskiem z twierdzenia 14.6 jest:

Twierdzenie 14.8. *Jeżeli A jest zdaniem oraz $B \in \mathbf{Cn}_L(\{A\})$, to formuła zdaniowa $A \rightarrow B$ jest tezą klasycznego rachunku predykatów.*

Twierdzenie 14.8 stanowi podstawę pewnych, nazwijmy to tak, dywagacji filozoficznych, o czym na wykładzie.

Teorie pierwszego rzędu (systemy dedukcyjne)

Definicja 14.4. Zbiór formuł zdaniowych T danego języka pierwszego rzędu nazywamy teorią pierwszego rzędu (lub systemem dedukcyjnym) wtw T spełnia następujący warunek:

$$(*) \mathbf{Cn}_L(T) \subseteq T.$$

Dalej zamiast „teoria pierwszego rzędu” będę mówił krótko „teoria”.

Warunek (*) może się wydawać paradoksalny: żąda on, aby wszystkie formuły zdaniowe, które można wyprowadzić ze zbioru T przy pomocy (reguł inferencyjnych i praw/ tez) logiki już znajdowały się w T . Tym niemniej, jak zobaczymy, powyższa definicja dość dobrze eksplikuje to, co w naukach formalnych rozumiemy pod pojęciem teorii.

Spostrzeżenie 15.1: \mathbf{Trp} jest teorią.

Istotnie, $\mathbf{Trp} = \mathbf{Cn}_L(\emptyset)$, a zgodnie z twierdzeniem 14.3, $\mathbf{Cn}_L(\mathbf{Cn}_L(\emptyset)) \subseteq \mathbf{Cn}_L(\emptyset)$, czyli $\mathbf{Cn}_L(\mathbf{Trp}) \subseteq \mathbf{Trp}$.

Widzimy zatem, że zbiór wszystkich tez klasycznego rachunku predykatów (czystego lub stosowanego) jest teorią w sensie Definicji 14.4.

Teorie pierwszego rzędu (systemy dedukcyjne)

Spostrzeżenie 14.2: Dla dowolnego zbioru formuł zdaniowych X , zbiór $\mathbf{Cn}_L(X)$ jest teorią.

Istotnie, na mocy twierdzenia 14.3 zachodzi: $\mathbf{Cn}_L(\mathbf{Cn}_L(X)) \subseteq \mathbf{Cn}_L(X)$.

Powyższe spostrzeżenie dostarcza nam klucza do zrozumienia, czym są **systemy (teorie) aksjomatyczne**. W systemach takich przyjmuje się – z różnych powodów (o czym na wykładzie :) – pewne formuły zdaniowe bez dowodu, jako **aksjomaty**, a następnie wyprowadza się z nich twierdzenia pochodne. Rzecz jasna, nie jest tak, że wszystkie twierdzenia, które można wyprowadzić z aksjomatów, są w danym momencie czasu *znane*. Jednakże dla tego, aby jakaś formuła zdaniowa była twierdzeniem teorii aksjomatycznej, potrzeba i wystarcza, aby *istniała* jej derywacja w oparciu o aksjomaty i ewentualnie tezy logiki (oczywiście derywacja, w której stosujemy reguł inferencyjne dostarczone przez logikę) – derywacja ta *nie musi być znana*. Innymi słowy, **teorię aksjomatyczną można określić jako zbiór wszystkich konsekwencji logicznych przyjętych aksjomatów**. Zbiór taki jest, zgodnie z wyżej powiedzianym, teorią w sensie **Definicji 14.4** (lub jej analogonu, gdy korzystamy z języka rzędu innego niż pierwszy lub/i logiki innej niż klasyczny rachunek predykatów).

Przykład: arytmetyka Peano

Przykład 14.1: Język arytmetyki Peano został określony na wykładzie 11a. Aksjomatami (pozalogicznymi)¹ arytmetyki Peano są wszystkie formuły zdaniowe jej języka podpadające pod schematy:

$$(1) \quad x = x$$

$$(2) \quad x = y \rightarrow y = x$$

$$(3) \quad x = y \wedge y = z \rightarrow x = z$$

$$(4) \quad x = y \rightarrow \mathbf{S}(x) = \mathbf{S}(y)$$

Aksjomaty identyczności

$$(5) \quad x = y \rightarrow x + z = y + z$$

$$(6) \quad x = y \rightarrow z + x = z + y$$

$$(7) \quad x = y \rightarrow x \cdot z = y \cdot z$$

$$(8) \quad x = y \rightarrow z \cdot x = z \cdot y$$

¹ Aksjomaty logiczne to aksjomaty stosowanego rachunku predykatów zbudowanego w języku arytmetyki Peano. Aksjomaty tego rodzaju występują w każdej teorii. Mówiąc dalej o aksjomatach teorii nie będącej logiką, będziemy mieli na myśli aksjomaty pozalogiczne, tj. aksjomaty nie będące tezami logiki (stosowanej) zbudowanej w języku tej teorii.

Przykład: arytmetyka Peano

$$(9) \quad \mathbf{S}(x) = \mathbf{S}(y) \rightarrow x = y$$

$$(10) \quad \neg(\mathbf{0} = \mathbf{S}(x))$$

$$(11) \quad x + \mathbf{0} = x$$

$$(12) \quad x + \mathbf{S}(y) = \mathbf{S}(x + y)$$

$$(13) \quad x \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

$$(14) \quad x \cdot \mathbf{S}(y) = (x \cdot y) + x$$

$$(15) \quad A[x / \mathbf{0}] \wedge \forall x(A(x) \rightarrow A[x / \mathbf{S}(x)]) \rightarrow \forall xA$$

Komentarz: Wzory powyższe nie są, ściśle rzecz biorąc, aksjomatami, lecz schematami aksjomatów. Pierwsze czternaście schematów możemy zastąpić konkretnymi formułami, np. kładąc x_1, x_2 zamiast (metazmiennych) x i y ; (15) musi pozostać schematem (jest to schemat tzw. *aksjomatu indukcji*).

Przykład: arytmetyka Peano

Zbiór wszystkich aksjomatów (pozalogicznych) arytmetyki Peano oznaczymy symbolem \mathbf{Ax}_{PA} , natomiast samą arytmetykę Peano oznaczymy przez \mathbf{PA} . Możemy teraz przyjąć:

$$\mathbf{PA} = \mathbf{Cn}_L(\mathbf{Ax}_{PA})$$

Jest oczywiste, że \mathbf{PA} jest teorią w sensie **Definicji 14.4**.

Terminologia: Gdy mamy do czynienia z teorią aksjomatyczną posiadającą aksjomaty pozalogiczne, to derywacje w oparciu o aksjomaty pozalogiczne tej teorii i ewentualnie tezy logiki nazywamy zwykle **dowodami w oparciu o aksjomaty**, natomiast formuły mające co najmniej jeden dowód/ derywację w oparciu o aksjomaty i ewentualnie tezy logiki – **twierdzeniami** tej **teorii**.

Dygresja 14.2: W praktyce, w dowodach kolejnych twierdzeń wykorzystujemy również, w charakterze przesłanek, twierdzenia uprzednio udowodnione.

Dygresja 14.3: Istnieją teorie w sensie **Definicji 14.4**, które nie dadzą się przedstawić jako zbiór wszystkich konsekwencji logicznych jakiegoś efektywnie wyróżnionego *podzbioru właściwego* zbioru wszystkich formuł zdaniowych języka tych teorii, tj. teorie, które nie są efektywnie aksjomatyzowalne.

Sprzeczność i niesprzeczność

Definicja 14.5. Zbiór formuł zdaniowych X jest **sprzeczny** wtw istnieje taka formuła zdaniowa A , że do zbioru $\mathbf{Cn}_L(X)$ należy zarówno formuła A , jak i jej negacja, $\neg A$.

Gdy takiej formuły nie ma, mówimy, że zbiór X jest **niesprzeczny**.

Bezpośrednią wnioskami z Definicji 14.4 i 14.5 jest:

Twierdzenie 14.9. Teoria T jest sprzeczna wtw istnieje formuła zdaniowa A taka, że zarówno A , jak i jej negacja, $\neg A$, należą do teorii T .

Sprzeczność zbioru formuł zdaniowych/ teorii jest własnością niepożądaną: ze sprzecznego zbioru formuł zdaniowych można – korzystając z aksjomatu klasycznego rachunku predykatów powstającego z prawa Dunsca Scotusa, tj. aksjomatu o schemacie $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ – wyprowadzić **każdą** formułę zdaniową, a więc stanowczo za dużo. Innymi słowy, każda formuła zdaniowa jest konsekwencją logiczną sprzecznego zbioru formuł zdaniowych i stąd taki zbiór formuł zdaniowych **jest bezużyteczny informacyjnie**.

Sprzeczność i niesprzeczność

Z drugiej strony, zachodzi:

Twierdzenie 14.10. *Zbiór formuł zdaniowych X jest niesprzeczny wtw istnieje formuła zdaniowa A taka, że $A \notin \mathbf{Cn}_L(X)$.*

Zagadnienia niesprzeczności teorii matematycznych i logicznych należą do „gorących” zagadnień metamatematycznych. Istnieją różne techniki dowodzenia niesprzeczności teorii; znane są też różne wyniki dotyczące „mocy” środków potrzebnych dla wykazania niesprzeczności poszczególnych teorii matematycznych. Porozmawiamy o tym przy innej okazji.

Definicja 14.6. Zbiór formuł zdaniowych X języka pierwszego rzędu \mathcal{J} jest **zupełny z uwagi na język \mathcal{J}** wtw dla każdego zdania A języka \mathcal{J} : zdanie A jest elementem zbioru $\mathbf{Cn}_L(X)$ lub negacja zdania A , $\neg A$, jest elementem zbioru $\mathbf{Cn}_L(X)$.

Intuicja leżąca u podstaw pojęcia zupełności jest następująca. Zdania A oraz $\neg A$ są *możliwymi rozstrzygnięciami* problemu wyrażanego przez pytanie „Czy A ?”. Zbiór X jest zupełny wówczas, gdy ze zbioru X (i ewentualnie też logiki) da się wyprowadzić – przy pomocy reguł inferencyjnych logiki – rozstrzygnięcie pozytywne, A , lub rozstrzygnięcie negatywne, $\neg A$, problemu „Czy A ?”, przy czym jest tak dla *każdego* problemu postaci „Czy A ?”, gdzie A jest zdaniem rozważanego języka. Zupełność jest zatem pewną pożądaną cechą zbiorów formuł zdaniowych i teorii.

Zupełność

Dla teorii zagadnienie zupełności redukuje się do zagadnienia istnienia w teorii rozwiązań wszystkich problemów powyższego rodzaju. Zachodzi:

Twierdzenie 14.11. *Niech T będzie teorią sformułowaną w języku pierwszego rzędu \mathcal{J} . Teoria T jest zupełna z uwagi na język \mathcal{J} wtw dla każdego zdania A języka \mathcal{J} : zdanie A jest elementem teorii T lub negacja zdania A , tj. zdanie postaci $\neg A$, jest elementem teorii T .*

Mówiąc ogólnie, teoria zupełna dostarcza nam rozstrzygnięć wszystkich problemów, które dadzą się sformułować w jej języku.

Każda teoria sprzeczna jest, z trywialnych powodów, zupełna. Interesującym zagadnieniem metamatematycznym jest, *które niesprzeczne teorie matematyczne są zupełne, a które nie*. Wiadomo na ten temat dość dużo.

Zupełność

Najważniejszy jest tutaj jednak pewien *wynik negatywny*, zwany twierdzeniem Gödla:

Jeżeli mamy teorię (pierwszego rzędu) która jest: (a) niesprzeczna, (b) efektywnie aksjomatyzowalna, (c) da się w niej wyinterpretować arytmetykę Peano, to teoria ta jest niezupełna, tj. istnieje takie zdanie A języka tej teorii, że ani A , ani jego negacja, $\neg A$, nie mają dowodu w oparciu o aksjomaty rozważanej teorii.

Sformułowanie powyższe nie jest ściśle (i nie pokrywa się dokładnie z tym, co udowodnił sam Kurt Gödel), tym niemniej na pierwszym roku musi wystarczyć :)

Niektórzy powiadają, że wynik Gödla wskazuje na zasadnicze ograniczenia metod formalnych, które muszą znaleźć swoje odzwierciedlenie w badaniach/ projektach z zakresu *Artificial Intelligence*. Do kwestii tej wrócimy w przyszłym roku.

Literatura:

Dowody przedstawionych tutaj twierdzeń metalogicznych można znaleźć np. w podręczniku Tadeusza Batoga pt. „Podstawy logiki”. Studiując te dowody, należy pamiętać, że to, co nazwaliśmy tutaj derywacją formuły w oparciu o zbiór formuł, jest w podręczniku Batoga nazywane dowodem formuły w oparciu o zbiór formuł.

W sprawie twierdzenia Gödla i zagadnień pokrewnych polecam książkę Romana Murawskiego pt. „Funkcje rekurencyjne i elementy metamatematyki. Problemy zupełności, rozstrzygalności, twierdzenia Gödla”, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2000.