

**Logika I**  
**Kognitywistyka I rok**  
**Zakres egzaminu**  
**rok akademicki 2017/2018**

**I. Pojęcia:**

Na egzaminie obowiązują wszystkie definicje wprowadzone na wykładach; mogą je Państwo znaleźć w prezentacjach dostępnych w sieci. Proszę o potraktowanie tego punktu poważnie – materiał pojęciowy jest dość obszerny.

Mogą się zdarzyć pytania, na które należy odpowiedzieć podając definicję, mogą również wystąpić pytania, w odpowiedzi na które należy zastosować definicję lub kilka definicji. Oto przykłady pytań tego drugiego rodzaju:

1) Czy term  $F_1^2(x_1, a_2)$  jest podstawialny za zmienną  $x_2$  do formuły zdaniowej

$$\forall x_1 P_2^2(x_1, x_2) \rightarrow P_1^2(x_2, a_1)?$$

Proszę uzasadnić odpowiedź odwołując się do definicji.

2) Czy podane niżej sformułowanie jest błędne?

*Formuła  $A$  wynika logicznie na gruncie KRZ ze zbioru formuł  $X$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wartościowanie  $\mathbf{v}$ , przy którym wszystkie formuły ze zbioru  $X$  przyjmują wartość  $\mathbf{1}$  oraz formuła  $A$  przyjmuje przy tym wartościowaniu wartość  $\mathbf{1}$ .*

*Jeśli sądzi Pan/Pani, że powyższe sformułowanie jest błędne, proszę zlokalizować błąd i podać poprawną definicję rozważanej relacji.*

3) Niech  $A$  oraz  $B$  będą formułami języka KRZ. Które z następujących stwierdzeń jest prawdziwe:

- a) *jeśli implikacja postaci  $A \rightarrow B$  jest prawdziwa, to formuła  $B$  wynika na gruncie KRZ z formuły  $A$ ,*
- b) *jeśli formuła  $B$  wynika na gruncie KRZ z formuły  $A$ , to implikacja o postaci  $A \rightarrow B$  jest tezą KRZ.*

4) Czy zagadnienie wyrażane przez pytanie:

- *czy formuła  $\neg p$  przyjmuje wartość  $\mathbf{1}$  przy każdym wartościowaniu, przy którym wartość  $\mathbf{1}$  przyjmują formuły:  $p \rightarrow q, \neg q$ ?*

*można rozstrzygnąć korzystając, między innymi, z metody tabel analitycznych dla KRZ?*

*Jeśli uważasz, że tak, uzasadnij, dlaczego tak jest i zbuduj odpowiednią tabelę.  
Jeśli uważasz, że nie, uzasadnij swoją odpowiedź.*

5) Niech  $X$  i  $Y$  będą zbiorami formuł zdaniowych języka pierwszego rzędu takimi, że dla każdej formuły  $B$  należącej do zbioru  $Y$  istnieje co najmniej jedna derywacja tej formuły w oparciu o zbiór  $X$ . Przypuśćmy, że  $A$  jest formułą zdaniową taką, że  $A \in \mathbf{Cn}(Y)$ . Czy w tej sytuacji  $A \in \mathbf{Cn}(X)$ ?

*Proszę uzasadnić odpowiedź*

6) Niech  $X$  będzie zbiorem formuł zdaniowych języka pierwszego rzędu  $\mathbf{J}$ . Załóżmy, że  $X$  jest (syntaktycznie) sprzeczny. Czy wówczas  $X$  jest zupełny z uwagi na język  $\mathbf{J}$ ? Proszę uzasadnić odpowiedź.

7) Poniższe sformułowanie jest błędne:

*Zbiór formuł zdaniowych  $X$  języka pierwszego rzędu jest sprzeczny wtedy, i tylko wtedy, gdy istnieje taka formuła  $A$  tego języka, że zarówno formuła  $A$ , jak i jej negacja,  $\neg A$ , należą do zbioru  $X$ .*

*Proszę zlokalizować błąd i podać sformułowanie poprawne.*

Są to rzecz jasna tylko przykłady. Powyższe zadania mogą, ale nie muszą wystąpić na egzaminie.

## II. Klasyczny Rachunek Zdań:

Pytania: „Co to jest formuła języka KRZ?”, „Co to jest funkcja prawdziwościowa?”, „Co to jest tautologia KRZ?”, *etc.* należą do grupy zagadnień „Pojęcia” – i zgodnie z wyżej powiedzianym mogą się zdarzyć.

Należy znać co najmniej następujące prawa/ tautologie KRZ: *prawo tożsamości, prawa symplifikacji, prawa addycji, prawa podwójnej negacji, prawo eksportacji, prawo importacji, prawo komutacji, prawa sylogizmu hipotetycznego, prawo koniunkcji, modus ponendo ponens, modus tollendo tollens, prawo Duns Scotusa, prawo sprzeczności, prawo wyłączonego środka.*

Ponadto należy znać wszystkie aksjomaty przedstawionego na wykładzie systemu aksjomatycznego KRZ (niektóre z nich znajdują się na podanej wyżej liście) oraz (pierwotne) *reguły inferencyjne* tego systemu.

Proszę o dokonanie wyboru 4 dowodów też w systemie aksjomatycznym KRZ – przy czym dowody te powinny mieć co najmniej 4 wiersze – i o nauczenie się tych dowodów.

Bardzo prawdopodobne jest wystąpienie pytań typu:

8) *Czy formuła ... jest tautologią KRZ? Odpowiadając, zastosuj:*

- *metodę zerojedynkową*
- *metodę tablic analitycznych*
- *metodę rezolucji*

(przy czym rzecz jasna w pytaniu będzie mowa tylko o jednej z tych metod).

Mogą się również zdarzyć pytania typu:

9) *Czy formuła ... wynika logicznie na gruncie KRZ ze zbioru formuł ... ? Odpowiadając, odwołaj się do twierdzenia mówiącego o związku między tautologicznością a wynikaniem logicznym na gruncie KRZ (podpowiadam: jest to Twierdzenie 4.3) oraz użyj metody ... .*

oraz mogą się pojawić pytania odmienne od wyżej przedstawionych :)

## III. Klasyczny Rachunek Predykatów:

Charakterystyka języka KRP należy do grupy zagadnień „Pojęcia” i oczywiście obowiązuje.

Ponadto należy wiedzieć, czym są *aksjomaty* przedstawionego na wykładzie systemu aksjomatycznego KRP (w tym KRP z identycznością!) oraz znać *reguły inferencyjne* tego systemu – co najmniej reguły pierwotne.

Należy znać *schematy* co najmniej następujących *praw KRP* (podaję je zgodnie z numeracją z wykładu; w podręczniku Batoga „Podstawy logiki” numeracja jest taka sama): 1, 2 (*dictum de omni*), 3, 4 (*dictum de singulo*), 5, 8, 9, 10 i 11 oraz 12 (*prawa przestawiania kwantyfikatorów*), 15 i 16 (*prawa de Morgana*), 17, 18, 19, 20, 22 (*prawo rozkładania dużego kwantyfikatora*), 25, 30 (*prawo rozdzielnosci dużego kwantyfikatora względem koniunkcji*), 31 (*prawo rozdzielnosci małego kwantyfikatora względem alternatywy*), 32, 33, 42, 43, 44 (*prawa ekstensjonalności*).

#### IV. Metalogika: pojęcia, twierdzenia metalogiczne i ich dowody

O definicjach pojęć metalogicznych powiem tylko jedno: trzeba je znać oraz – co ważniejsze – umieć zastosować. Przykładowo, gdy zostaną Państwo poproszeni o podanie definicji pojęcia terminu czy formuły zdaniowej, przy czym rozważany język będzie (w określony w zadaniu sposób) "uboższy" od języka *KRP*, powinni Państwo umieć to zrobić,

Należy też znać wszystkie twierdzenia metalogiczne, o których była mowa na wykładzie (twierdzenia te znajdują Państwo w prezentacjach dostępnych w sieci).

Na egzaminie mogę poprosić o podanie dowodów następujących twierdzeń:

(a) Twierdzenie 4.1. *Niech  $A$  będzie formułą, natomiast  $\nu$  i  $\nu^*$  będą wartościowaniami takimi, że:*

$$(\$) \quad \text{dla dowolnej zmiennej zdaniowej z występującej w formule } A, \\ \nu(z) = \nu^*(z).$$

Wówczas  $\nu(A) = \nu^*(A)$ .

(b) Twierdzenie 4.2.  *$A \vDash_{KRZ} B$  wtw formuła  $A \rightarrow B$  jest tautologią KRZ.*

(c) Twierdzenie 4.3.  *$\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \vDash_{KRZ} B$  wtw formuła  $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B$  jest tautologią KRZ.*

(d) Twierdzenie 5.1. *Jeśli formuła  $A$  posiada dowód (metodą tabel analitycznych, tj. jeśli istnieje tabela analityczna dla  $A$  taka, że każda gałąź tej tabeli jest zamknięta), to formuła  $A$  jest tautologią KRZ.*

(e) Twierdzenie 6.1. (semantyczne twierdzenie o odrywaniu): *Jeżeli formuła postaci  $A \rightarrow B$  jest tautologią KRZ oraz formuła  $A$  jest tautologią KRZ, to formuła  $B$  jest tautologią KRZ.*

(f) Twierdzenie 7.1. *Każda teza KRZ jest tautologią KRZ.*

a także dowodu wniosku 4.2.

Komentarz: Dowody twierdzeń 4.1, 4.2, 4.3 i 6.1 oraz wniosku 4.2 zostały przedstawione na wykładzie, ale nie znajdują ich Państwo w prezentacjach. Jeśli nie mają Państwo (dobrych) notatek, wyjścia są dwa: albo sięgnąć do podręczników, albo samodzielnie „zrobić” dowody.

AW