Andrzej Wiśniewski

Logika II

Materiały do wykładu dla studentów kognitywistyki

2019/2020

Elementy metalogiki

Niech ***J*** będzie językiem sformalizowanym.

Oznaczmy przez $\boldsymbol{FORM_J}$ zbiór wszystkich poprawnie zbudowanych formuł języka ***J***. Funkcję ***C***: $2^{\boldsymbol{FORM_J}} \mapsto 2^{\boldsymbol{FORM_J}}$ (tj. funkcję, której argumentami i wartościami są zbiory poprawnie zbudowanych formuł języka ***J***) nazywamy operacją konsekwencji w języku ***J*** wtw dla dowolnych podzbiorów X, Y zbioru $\boldsymbol{FORM_J}$ spełnione są następujące warunki:

(I) $X \subseteq \boldsymbol{C}(X)$,

(II) $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{C}(X)) \subseteq \boldsymbol{C}(X)$,

(III) *jeżeli* $X \subseteq Y$, to $\boldsymbol{C}(X) \subseteq \boldsymbol{C}(Y)$.

Gdy ponadto dla dowolnego $A \in \boldsymbol{FORM_J}$ spełniony jest warunek:

(IV) $A \in \boldsymbol{C}(X)$ *wtw istnieje skończony podzbiór* Z *zbioru* X *taki, że* $A \in \boldsymbol{C}(Z)$,

to ***C*** nazywamy finitystyczną operacją konsekwencji w ***J***.

Powstaje pytanie: jak wyznaczyć operację konsekwencji w danym języku sformalizowanym?

Jednym ze sposobów jest skorzystanie z pojęcia derywacji (inaczej: wyprowadzenia) formuły ze zbioru formuł, oczywiście derywacji/ wyprowadzenia z uwagi na zadany zbiór reguł inferencyjnych.

Zilustrujemy to na przykładzie języków pierwszego rzędu (pojęcie to zostało zdefiniowane na wykładzie 11a kursu "Logika I").

W dalszych rozważaniach zakładamy, że ***J*** jest dowolnym ale ustalonym językiem pierwszego rzędu.

Zanim jednak pójdziemy dalej, zauważmy rzecz następującą: w każdym języku ***J*** pierwszego rzędu „uboższym” od języka *KRP* (tj. takim, że występują w nim tylko niektóre, ale nie wszystkie, stałe indywiduowe/ symbole funkcyjne/ predykaty języka *KRP*) możemy wyrazić odpowiedni „fragment” klasycznego rachunku predykatów, $KRP_{\boldsymbol{J}}$. Konstrukcja jest następująca:

(a) za aksjomaty $KRP_{\boldsymbol{J}}$ bierzemy te wszystkie formuły zdaniowe języka ***J***, które można otrzymać z jakichś tautologii *KRZ* poprzez konsekwentne zastąpienie wszystkich występujących w nich zmiennych zdaniowych formułami zdaniowymi języka ***J***,

(b) wprowadzamy reguły inferencyjne O∀, D∀, O∃, D∃, RO, RP, zakładając, że operują one na formułach zdaniowych języka ***J***,

(c) dalej postępujemy analogicznie jak w przypadku *KRP*.

Zbudowany w powyższy sposób rachunek $KRP_{\boldsymbol{J}}$ nazywamy stosowanym rachunkiem predykatów 1-go rzędu.

W podobne sposób budujemy stosowane rachunki predykatów (1-go rzędu) z identycznością.

Dla kontrastu, *KRP* i $KRP_{=}$ nazywamy czystymi rachunkami predykatów.

Terminologia: Mówiąc dalej o formułach zdaniowych, będziemy mieli na myśli formuły zdaniowe naszego (dowolnego ale ustalonego) języka pierwszego rzędu ***J***.

Potrzebne nam pojęcie derywacji jest uogólnieniem wprowadzonego na poprzednim wykładzie pojęcia dowodu. Różnica polega na tym, że tym razem nie żądamy, aby przesłanki były aksjomatami klasycznego rachunku predykatów.

Definicja 1.1. Derywacją formuły zdaniowej *A* w oparciu o zbiór formuł zdaniowych *X nazywamy skończony ciąg formuł zdaniowych, którego ostatnim wyrazem jest formuła A, taki, że dowolna formuła zdaniowa będąca wyrazem tego ciągu:*

(1) *należy do zbioru X, lub*

(2) *powstaje z jakiegoś wcześniejszego wyrazu rozważanego ciągu poprzez zastosowanie:*

- *reguły podstawiania* RP, *lub*
- *reguły opuszczania dużego kwantyfikatora* O∀, *lub*
- *reguły dołączania dużego kwantyfikatora* D∀, *lub*
- *reguły opuszczania małego kwantyfikatora* O∃, *lub*
- *reguły dołączania małego kwantyfikatora* D∃, *lub*

(3) *powstaje z jakichś wcześniejszych wyrazów tego ciągu poprzez zastosowania reguły odrywania* RO.

Wersję dla purystów można otrzymać z definicji 12.1* wykładu "Logika I" :)

Dalej, z powodów stylistycznych, zamiast „derywacja A w oparciu o X" będę czasem mówił „wyprowadzenie A z X".

Oznaczmy symbolem $\mathbf{Cn}(X)$ zbiór **wszystkich** formuł zdaniowych, dla których istnieje przynajmniej jedna derywacja ze zbioru X (tj. zbiór tych wszystkich formuł zdaniowych, które można wyprowadzić, korzystając z reguł inferencyjnych *KRP*, ze zbioru „przesłanek" X).

Definicja 1.2. $A \in \mathbf{Cn}(X)$ *wtw istnieje przynajmniej jedna derywacja A w oparciu o X*.

Można łatwo udowodnić:

Twierdzenie 1.1:

(I) $X \subseteq \mathbf{Cn}(X)$,

(II) $\mathbf{Cn}(\mathbf{Cn}(X)) \subseteq \mathbf{Cn}(X)$,

(III) *jeżeli* $X \subseteq Y$, *to* $\mathbf{Cn}(X) \subseteq \mathbf{Cn}(Y)$.

Gdy porównamy treść twierdzenia 1.1 z definicją (ogólnego) pojęcia konsekwencji, usprawiedliwionym staje się nazwanie zbioru $\mathbf{Cn}(X)$ zbiorem wszystkich konsekwencji zbioru formuł zdaniowych X.

Terminologia: Napis „$A \in \mathbf{Cn}(X)$" czytamy „*A jest **jedną z** konsekwencji X*"; „jedną z", albowiem ze zbioru X można zawsze wyprowadzić wiele formuł zdaniowych. W praktyce frazę „jedną z" zwykle opuszczamy, trzeba jednak pamiętać, że jest ona zawsze domyślnie obecna. Gdy rozumiemy napis „$A \in \mathbf{Cn}(X)$" jako „A jest jedyną konsekwencją X", popełniamy błąd !

Zachodzi następujące twierdzenie o finitystyczności:

Twierdzenie 1.2. *$A \in \mathbf{Cn}(X)$ wtw istnieje skończony podzbiór Z zbioru X taki, że $A \in \mathbf{Cn}(Z)$.*

Powód jest prosty: każda derywacja jest skończonym ciągiem formuł zdaniowych, a zatem korzystamy w niej ze skończonej ilości elementów zbioru X – to właśnie będzie zbiór Z. Z drugiej strony, na mocy twierdzenia 1.1, skoro $Z \subseteq X$ oraz $A \in \mathbf{Cn}(Z)$, to $A \in \mathbf{Cn}(X)$.

Dygresja 1.1. Zauważmy, że zbiór wszystkich tez *KRP* jest równy zbiorowi **Cn**(***Arp***).

Gdy mamy derywację formuły zdaniowej *A* w oparciu o zbiór formuł zdaniowych *X*, to jedynymi „przesłankami" tej derywacji mogą być formuły zdaniowe należące do zbioru *X*. Zliberalizujmy teraz ten warunek, dopuszczając, że przesłankami mogą ponadto być aksjomaty klasycznego rachunku predykatów (czystego lub stosowanego, w zależności od tego, czym jest ***J***). Zbiór tych aksjomatów oznaczmy przez **Arp**. Wprowadźmy następującą definicję:

Definicja 1.3. $A \in \mathbf{Cn_L}(X)$ *wtw* $A \in \mathbf{Cn}(X \cup \mathbf{Arp})$

Można udowodnić:

Twierdzenie 1.3:

(I) $X \subseteq \mathbf{Cn_L}(X)$,

(II) $\mathbf{Cn_L}(\mathbf{Cn_L}(X)) \subseteq \mathbf{Cn_L}(X)$,

(III) *jeżeli* $X \subseteq Y$, *to* $\mathbf{Cn_L}(X) \subseteq \mathbf{Cn_L}(Y)$.

Napis „$A \in \mathbf{Cn_L}(X)$" czytamy „A jest jedną z konsekwencji logicznych zbioru X". Pojęcie definiowane przez definicję 1.3 to pojęcie konsekwencji logicznej na gruncie logiki pierwszego rzędu.

Zachodzi twierdzenie o finitystyczności konsekwencji logicznej:

Twierdzenie 1.4. *$A \in \mathbf{Cn_L}(X)$ wtw istnieje skończony podzbiór Z zbioru X taki, że $A \in \mathbf{Cn_L}(Z)$.*

Oznaczmy przez **Trp** zbiór wszystkich tez klasycznego rachunku predykatów (czystego lub stosowanego, w zależności od tego, jaki język rozważamy). Prawdziwe jest:

Twierdzenie 1.5. *$A \in \mathbf{Cn_L}(X)$ wtw $A \in \mathbf{Cn}(X \cup \mathbf{Trp})$.*

Dowód podaję w "Dodatku" umieszczonym na końcu tej prezentacji.

Twierdzenie 14.5 głosi w istocie, że A można wyprowadzić z przesłanek będących elementami zbioru X i/ lub aksjomatami klasycznego rachunku predykatów wtw A można wyprowadzić z przesłanek będących elementami zbioru X i/ lub tezami (niekoniecznie aksjomatami) rachunku predykatów.

Zachodzi również następujące *twierdzenie o dedukcji*.

Twierdzenie 1.6. *Jeżeli A jest zdaniem oraz $B \in \mathbf{Cn_L}(X \cup \{A\})$*, to formuła zdaniowa $A \rightarrow B$ należy do zbioru $\mathbf{Cn_L}(X)$.

Dowód można znaleźć, przykładowo, w podręczniku Tadeusza Batoga "Podstawy logiki" na str. 148-153.

Odnotujmy również następujące twierdzenie, nieco paradoksalne na pierwszy rzut oka (symbolem $\varnothing$ oznaczamy zbiór pusty).

Twierdzenie 1.7. $A \in \mathbf{Trp}$ *wtw* $A \in \mathbf{Cn_L}(\varnothing)$.

„Paradoks” znika, gdy uświadomimy sobie, że $\mathbf{Cn_L}(\varnothing) = \mathbf{Cn}(\varnothing \cup \mathbf{Arp}) = \mathbf{Cn}(\mathbf{Arp})$.

Wnioskiem z twierdzenia 1.6 jest:

Twierdzenie 1.8. *Jeżeli A jest zdaniem oraz $B \in \mathbf{Cn_L}(\{A\})$, to formuła zdaniowa $A \rightarrow B$ jest tezą klasycznego rachunku predykatów*.

Twierdzenie 1.8 stanowi podstawę pewnych, nazwijmy to tak, dywagacji filozoficznych, o czym na wykładzie.

Definicja 1.5. *Zbiór formuł zdaniowych X jest* sprzeczny wtw *istnieje taka formuła zdaniowa A*, *że do zbioru* $\mathbf{Cn_L}(X)$ *należy zarówno formuła A*, *jak i jej negacja*, $\neg A$.

Gdy takiej formuły nie ma, mówimy, że zbiór X jest niesprzeczny.

Sprzeczność zbioru formuł zdaniowych/ teorii jest własnością niepożądaną: ze sprzecznego zbioru formuł zdaniowych można – korzystając z aksjomatu klasycznego rachunku predykatów powstającego z prawa Dunsa Scotusa, tj. aksjomatu o schemacie $A \to (\neg A \to B)$ – wyprowadzić każdą formułę zdaniową, a więc stanowczo za dużo. Innymi słowy, każda formuła zdaniowa jest konsekwencją logiczną sprzecznego zbioru formuł zdaniowych i stąd taki zbiór formuł zdaniowych jest bezużyteczny informacyjnie.

Formułę B wyprowadzamy z formuł A i $\neg A$ w oparciu o odpowiedni aksjomat postaci $A \to (\neg A \to B)$ następująco:

A

$A \to (\neg A \to B)$

$\neg A$

$\neg A \to B$

B

Uwaga: Aby zbiór był sprzeczny, nie muszą do niego *należeć* formuła i jej negacja! Czasami sprzeczność bywa "ukryta" w tym sensie, że formuła i jej negacja należą do zbioru konsekwencji logicznych tego zbioru, nie należąc jednak do samego tego zbioru.

Przykład 1.1: Niech B i C będą (dowolnymi ale ustalonymi) formułami zdaniowymi języka ***J***. Rozważmy następujący zbiór X:

$$\{B \rightarrow A, C \rightarrow \neg A, B \wedge C\}$$

Jest oczywiste, że formuła A należy do $\mathbf{Cn_L}(X)$. Oto schemat odpowiedniej derywacji:

$B \wedge C \rightarrow B$

$B \wedge C$

B

$B \rightarrow A$

A

Podobnie formuła $\neg A$ należy do $\mathbf{Cn_L}(X)$, albowiem:

$B \wedge C \rightarrow C$

$B \wedge C$

C

$C \rightarrow \neg A$

$\neg A$

Formuły A oraz $\neg A$ *nie należą* do zbioru X, lecz - w podanym przykładzie - *występują* (jako podformuły) w formułach należących do tego zbioru.

Zdarza się również sytuacja "mieszana": A należy do rozważanego - sprzecznego! - zbioru, natomiast $\neg A$, ściśle rzecz biorąc, do niego nie należy, ale $\neg A$ należy do zbioru jego konsekwencji logicznych (i podobnie dla $\neg A$ oraz A):

Przykład 1.2: Niech $X = \{B, B \to \neg A, A\}$. Formuła A należy do X (a tym samym do $\mathbf{Cn_L}(X)$, ponieważ $X \subseteq \mathbf{Cn_L}(X)$), natomiast formuła $\neg A$ należy *tylko* do $\mathbf{Cn_L}(X)$. Oto schemat odpowiedniej derywacji:

B

$B \to \neg A$

$\neg A$

Tak więc, mówiąc humanistycznie, obok zbiorów jawnie sprzecznych istnieją również zbiory "ukrycie" sprzeczne. :)

Zachodzi:

Twierdzenie 1.9. *Zbiór formuł zdaniowych X jest niesprzeczny wtw istnieje formuła zdaniowa B taka, że* $B \notin \mathbf{Cn_L}(X)$.

Dowód:

($\Rightarrow$) Wystarczy pokazać, że gdy dla każda formuła zdaniowa należy do zbioru $\mathbf{Cn_L}(X)$, to zbiór X jest sprzeczny.

Weźmy dowolną formułę A oraz jej negację, $\neg A$. Na mocy założenia każda formuła zdaniowa należy do $\mathbf{Cn_L}(X)$, tak więc $A \in \mathbf{Cn_L}(X)$ oraz '$\neg A$' $\in \mathbf{Cn_L}(X)$. Tak więc zbiór X jest sprzeczny.

($\Leftarrow$) Wystarczy pokazać, że gdy zbiór X jest sprzeczny, to dla każdej formuły zdaniowej B mamy $B \in \mathbf{Cn_L}(X)$.

Gdy X jest sprzeczny, to istnieje taka formuła zdaniowa, A, że $A \in \mathbf{Cn_L}(X)$ oraz '$\neg A$' $\in \mathbf{Cn_L}(X)$. Każda formuła zdaniowa o schemacie $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ – gdzie B jest dowolną formułą zdaniową! – jest aksjomatem KRP (bo formuła $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ jest tezą KRZ). Fomułę zdaniową B możemy wyprowadzić ze zbioru $\{A, \neg A\} \cup \mathbf{Arp}$ następująco:

$A \to (\neg A \to B)$

A

$(\neg A \to B)$

$\neg A$

B

Zatem $B \in \mathbf{Cn_L}(\{A, \neg A\})$. Skoro jednak $\{A, \neg A\} \subseteq \mathbf{Cn_L}(X)$, to $\mathbf{Cn_L}(\{A, \neg A\}) \subseteq \mathbf{Cn_L}(\mathbf{Cn_L}(X))$. Jednakże $\mathbf{Cn_L}(\mathbf{Cn_L}(X)) \subseteq \mathbf{Cn_L}(X)$. Tak więc $B \in \mathbf{Cn_L}(X)$. Czego należało dowieść.

Bezpośrednim następstwem twierdzenia 1.9 jest

Wniosek 1.1: *Zbiór formuł zdaniowych jest sprzeczny wtw każda formuła zdaniowa jest konsekwencją logiczną tego zbioru.*

"Jest konsekwencją logiczną" znaczy tu: "należy do zbioru wszystkich konsekwencji logicznych".

Definicja 1.6. *Zbiór formuł zdaniowych X języka pierwszego rzędu* **J** *jest* zupełny z uwagi na język **J** *wtw dla każdego zdania A języka* **J**: *zdanie A jest elementem zbioru* $\mathbf{Cn_L}(X)$ *lub negacja zdania A*, $\neg A$, *jest elementem zbioru* $\mathbf{Cn_L}(X)$.

Intuicja leżąca u podstaw pojęcia zupełności jest następująca. Zdania *A* oraz $\neg A$ są *możliwymi rozstrzygnięciami* problemu wyrażanego przez pytanie „Czy *A*?". Zbiór *X* jest zupełny wówczas, gdy ze zbioru *X* (i ewentualnie tez logiki) da się wyprowadzić – przy pomocy reguł inferencyjnych logiki – rozstrzygnięcie pozytywne, *A*, lub rozstrzygnięcie negatywne, $\neg A$, problemu „Czy *A*?", przy czym jest tak dla *każdego* problemu postaci „Czy *A*?", gdzie *A* jest zdaniem rozważanego języka. Zupełność jest zatem pewną pożądaną cechą zbiorów formuł zdaniowych, w szczególności tych, które są teoriami.

Definicja 1.7. *Zbiór formuł zdaniowych X danego języka pierwszego rzędu nazywamy* teorią pierwszego rzędu (*lub* systemem dedukcyjnym) *wtw X spełnia następujący warunek*:

$$(*)\quad \mathbf{Cn_L}(X) \subseteq X.$$

Dalej zamiast „teoria pierwszego rzędu" będę mówił krótko „teoria".

Warunek (*) może się wydawać paradoksalny: żąda on, aby wszystkie formuły zdaniowe, które można wyprowadzić ze zbioru *X* przy pomocy (reguł inferencyjnych i praw/ tez) logiki już znajdowały się w *X*. Tym niemniej, jak zobaczymy, powyższa definicja dość dobrze eksplikuje to, co w naukach formalnych rozumiemy pod pojęciem teorii.

Wniosek 1.2: *X jest teorią wtw* $X = \mathbf{Cn_L}(X)$.

Dlaczego tak jest? Na mocy definicji teorii mamy $\mathbf{Cn_L}(X) \subseteq X$, natomiast dla każdego zbioru formuł zdaniowych *X* jest tak, że $X \subseteq \mathbf{Cn_L}(X)$.

Wniosek 1.3: **Trp** *jest teorią*.

Istotnie, **Trp** = $\mathbf{Cn}_{\mathbf{L}}(\varnothing)$, a zgodnie z twierdzeniem 1.3, $\mathbf{Cn}_{\mathbf{L}}(\mathbf{Cn}_{\mathbf{L}}(\varnothing)) \subseteq \mathbf{Cn}_{\mathbf{L}}(\varnothing)$, czyli $\mathbf{Cn}_{\mathbf{L}}(\mathbf{Trp}) \subseteq \mathbf{Trp}$.

Widzimy zatem, że zbiór wszystkich tez klasycznego rachunku predykatów (czystego lub stosowanego) jest teorią w sensie Definicji 1.7.

Wniosek 1.4: *Dla dowolnego zbioru formuł zdaniowych X, zbiór* $\mathbf{Cn}_{\mathbf{L}}(X)$ *jest teorią*.

Jest tak, ponieważ na mocy twierdzenia 1.3 zachodzi:

$$\mathbf{Cn}_{\mathbf{L}}(\mathbf{Cn}_{\mathbf{L}}(X)) \subseteq \mathbf{Cn}_{\mathbf{L}}(X).$$

Wniosek 1.4 dostarcza nam klucza do zrozumienia, czym są systemy (teorie) aksjomatyczne. W systemach takich przyjmuje się – z różnych powodów (o czym na wykładzie :) – pewne formuły zdaniowe bez dowodu, jako aksjomaty, a następnie wyprowadza się z nich twierdzenia pochodne. Rzecz jasna, nie jest tak, że wszystkie twierdzenia, które można wyprowadzić z aksjomatów, są w danym momencie czasu *znane*. Jednakże dla tego, aby jakaś formuła zdaniowa była twierdzeniem teorii aksjomatycznej, potrzeba i wystarcza, aby *istniała* jej derywacja w oparciu o aksjomaty i ewentualnie tezy logiki (oczywiście derywacja, w której stosujemy reguł inferencyjne dostarczane przez logikę) – derywacja ta *nie musi być znana*. Innymi słowy, teorię aksjomatyczną można określić jako zbiór wszystkich konsekwencji logicznych przyjętych aksjomatów. Zbiór taki jest, zgodnie z wyżej powiedzianym, teorią w sensie Definicji 1.7 (lub jej analogonu, gdy korzystamy z języka rzędu innego niż pierwszy lub/i logiki innej niż klasyczny rachunek predykatów).

Przykład 1.3: Język arytmetyki Peano został określony na wykładzie 11a kursu "Logika I".

Aksjomatami (pozalogicznymi)[1] arytmetyki Peano są wszystkie formuły zdaniowe jej języka podpadające pod schematy:

(1)	$x = x$	
(2)	$x = y \rightarrow y = x$	
(3)	$x = y \wedge y = z \rightarrow x = z$	
(4)	$x = y \rightarrow \mathbf{S}(x) = \mathbf{S}(y)$	*Aksjomaty identyczności*
(5)	$x = y \rightarrow x + z = y + z$	
(6)	$x = y \rightarrow z + x = z + y$	
(7)	$x = y \rightarrow x \cdot z = y \cdot z$	
(8)	$x = y \rightarrow z \cdot x = z \cdot y$	

[1] Aksjomaty logiczne to aksjomaty stosowanego rachunku predykatów zbudowanego w języku arytmetyki Peano. Aksjomaty tego rodzaju występują w każdej teorii. Mówiąc dalej o aksjomatach teorii nie będącej logiką, będziemy mieli na myśli aksjomaty pozalogiczne, tj. aksjomaty nie będące tezami logiki (stosowanej) zbudowanej w języku tej teorii.

(9) $\mathbf{S}(x) = \mathbf{S}(y) \rightarrow x = y$

(10) $\neg(\mathbf{0} = \mathbf{S}(x))$

(11) $x + \mathbf{0} = x$

(12) $x + \mathbf{S}(y) = \mathbf{S}(\mathrm{x} + \mathrm{y})$

(13) $x \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$

(14) $x \cdot \mathbf{S}(y) = (x \cdot y) + x$

(15) $A[x/\mathbf{0}] \wedge \forall x(A(x) \rightarrow A[x/\mathbf{S}(x)]) \rightarrow \forall x A$

Komentarz: Wzory powyższe nie są, ściśle rzecz biorąc, aksjomatami, lecz schematami aksjomatów. Pierwsze czternaście schematów możemy zastąpić konkretnymi formułami, np. kładąc x_1, x_2 zamiast (metazmiennych) x i y; (15) musi pozostać schematem (jest to schemat tzw. *aksjomatu indukcji*).

Przykład: arytmetyka Peano

Zbiór wszystkich aksjomatów (pozalogicznych) arytmetyki Peano oznaczymy symbolem $\mathbf{Ax_{PA}}$, natomiast samą arytmetykę Peano oznaczymy przez **PA**. Możemy teraz przyjąć:

$$\mathbf{PA} = \mathbf{Cn_L}(\mathbf{Ax_{PA}})$$

Jest oczywiste, że **PA** jest teorią w sensie Definicji 1.7.

Terminologia: Gdy mamy do czynienia z teorią aksjomatyczną posiadającą aksjomaty pozalogiczne, to derywacje w oparciu o aksjomaty pozalogiczne tej teorii i ewentualnie tezy logiki nazywamy zwykle dowodami w oparciu o aksjomaty, natomiast formuły mające co najmniej jeden dowód/ derywację w oparciu o aksjomaty i ewentualnie tezy logiki – twierdzeniami tej teorii.

Dygresja: W praktyce, w dowodach kolejnych twierdzeń wykorzystujemy również, w charakterze przesłanek, twierdzenia uprzednio udowodnione.

Dygresja: Istnieją teorie w sensie Definicji 1.7, które nie dadzą się przedstawić jako zbiór wszystkich konsekwencji logicznych jakiegoś efektywnie wyróżnionego *podzbioru właściwego* zbioru wszystkich formuł zdaniowych języka tych teorii, tj. teorie, które nie są efektywnie aksjomatyzowalne.

Gdy *X* jest teorią, spełniony jest warunek $X = \mathbf{Cn}_{\mathbf{L}}(X)$ (por. Wniosek 1.2). Zatem zachodzi:

Twierdzenie 1.10: *Zbiór formuł zdaniowych X będący teorią jest sprzeczny wtw istnieje taka formuła zdaniowa, że zarówno ona, jak i jej negacja należą do zbioru X.*

Korzystając z twierdzeń 1.10 i 1.9, dostajemy:

Wniosek 1.5: *Teoria T jest niesprzeczna wtw istnieje formuła zdaniowa (języka, w którym sformułowana jest ta teoria) nie należąca do zbioru/teorii T.*

Zagadnienia niesprzeczności teorii matematycznych i logicznych należą do „gorących” zagadnień metamatematycznych. Istnieją różne techniki dowodzenia niesprzeczności teorii; znane są też różne wyniki dotyczące „mocy” środków potrzebnych dla wykazania niesprzeczności poszczególnych teorii matematycznych. Porozmawiamy o tym przy innej okazji.

Przypomnijmy definicję zupełności:

Definicja 1.6. *Zbiór formuł zdaniowych X języka pierwszego rzędu* **J** *jest* zupełny z uwagi na język **J** *wtw dla każdego zdania A języka* **J**: *zdanie A jest elementem zbioru* $\mathbf{Cn_L}(X)$ *lub negacja zdania A*, $\neg A$, *jest elementem zbioru* $\mathbf{Cn_L}(X)$.

Gdy T jest teorią, mamy $T = \mathbf{Cn_L}(T)$. Zatem zachodzi:

Twierdzenie 1.11. *Niech T będzie teorią sformułowaną w języku pierwszego rzędu* **J**. *Teoria T jest zupełna z uwagi na język* **J** *wtw dla każdego zdania A języka* **J**: *zdanie A jest elementem teorii T lub negacja zdania A, tj. zdanie postaci $\neg A$, jest elementem teorii T*.

Mówiąc ogólnie, teoria zupełna dostarcza nam rozstrzygnięć wszystkich problemów, które dadzą się sformułować w jej języku.

Każda teoria sprzeczna jest, z trywialnych powodów, zupełna. Interesującym zagadnieniem metamatematycznym jest, *które niesprzeczne teorie matematyczne są zupełne, a które nie*. Wiadomo na ten temat dość dużo.

Najważniejszy jest tutaj jednak pewien *wynik negatywny*, zwany twierdzeniem Gödla:

Jeżeli mamy teorię (pierwszego rzędu) która jest: (a) niesprzeczna, (b) efektywnie aksjomatyzowalna, (c) da się w niej wyinterpretować arytmetykę Peano, to teoria ta jest niezupełna, tj. istnieje takie zdanie A języka tej teorii, że ani A, ani jego negacja, $\neg A$, *nie mają dowodu w oparciu o aksjomaty rozważanej teorii i logikę.*

Sformułowanie powyższe nie jest ścisłe (i nie pokrywa się dokładnie z tym, co udowodnił sam Kurt Gödel), tym niemniej na tym etapie musi wystarczyć :)

Literatura:

Szczegółowe dowody przedstawionych tutaj twierdzeń metalogicznych można znaleźć np. w podręczniku Tadeusza Batoga pt. „Podstawy logiki". Studiując te dowody, należy pamiętać, że to, co nazwaliśmy tutaj derywacją formuły w oparciu o zbiór formuł, jest w podręczniku Batoga nazywane dowodem formuły w oparciu o zbiór formuł.

W sprawie twierdzenia Gödla i zagadnień pokrewnych polecam książkę Romana Murawskiego pt. „Funkcje rekurencyjne i elementy metamatematyki. Problemy zupełności, rozstrzygalności, twierdzenia Gödla", Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2000.

Twierdzenie 1.5. $A \in \mathbf{Cn_L}(X)$ *wtw* $A \in \mathbf{Cn}(X \cup \mathbf{Trp})$.

Dowód: ($\Rightarrow$) Gdy $A \in \mathbf{Cn_L}(X)$, to $A \in \mathbf{Cn}(X \cup \mathbf{Arp})$. Skoro $\mathbf{Arp} \subseteq \mathbf{Trp}$, to $(X \cup \mathbf{Arp}) \subseteq (X \cup \mathbf{Trp})$. Tak więc $\mathbf{Cn}(X \cup \mathbf{Arp}) \subseteq \mathbf{Cn}(X \cup \mathbf{Trp})$. Wnosimy stąd, że $A \in \mathbf{Cn}(X \cup \mathbf{Trp})$.

($\Leftarrow$) Gdy $A \in \mathbf{Cn}(X \cup \mathbf{Trp})$, to istnieje co najmniej jedna derywacja formuły A w opraciu o zbiór $X \cup \mathbf{Trp}$. Niech $\mathbf{s} = \langle D_1, ..., D_n \rangle$ będzie taką derywacją. Gdy wszystkie wyrazy derywacji **s** są elementami zbioru X lub aksjomatami KRP, mamy $A \in \mathbf{Cn_L}(X)$. Załóżmy teraz, że istnieją wyraz lub wyrazy derywacji **s**, które są tezami KRP nie będącymi jednocześnie aksjomatami tego rachunku. Niech $D^*_1, ..., D^*_m$ będą wszystkimi takimi wyrazami derywacji **s**. Każdy z formuł D^*_i , gdzie $1 \leq i \leq m$, posiada co najmniej jeden dowód w oparciu o aksjomaty KRP. Tworzymy następujący ciąg formuł zdaniowych:

$$\langle E^1{}_{1_1}, ..., E^1{}_{1_k}, ..., E^m{}_{m_1}, ..., E^m{}_{m_k}, D_1, ..., D_n \rangle$$

gdzie $\langle E^i{}_{i_1},..., E^i{}_{i_k}, D^*_i \rangle$ (dla $1 \leq i \leq m$) jest dowodem formuły D^*_i w oparciu o aksjomaty KRP. Ciąg taki z pewnością istnieje i jest on derywacją formuły zdaniowej A w oparciu o zbiór $X \cup \mathbf{Arp}$. Zatem $A \in \mathbf{Cn_L}(X)$.