

Andrzej Wiśniewski
Logika II

Materiały do wykładu dla studentów kognitywistyki
2019/2020

Wprowadzenie do semantyki teoriomodelowej cz.1

Mamy dwa cele:

- 1) zdefiniować pojęcie **prawdy** dla formuł zdaniowych języka pierwszego rzędu,
- 2) przy pomocy pojęcia prawdy zdefiniować dalsze ważne pojęcia semantyczne dla języków pierwszego rzędu, takie jak **wynikanie logiczne, tautologiczność, sprzeczność i inne**.

Aby „zablokować” powstanie paradoksu kłamcy, przyjmujemy następującą zasadę:

Pojęcie prawdy dla danego języka przedmiotowego określamy w metajęzyku tego języka.

Aby zdefiniować pojęcie prawdy dla języków pierwszego rzędu, potrzebujemy szeregu pojęć pomocniczych.

Pojęcie prawdy zostanie zdefiniowane za pomocą (zrelatywizowanego) pojęcia **spełniania**.

Ale to dopiero na następnym wykładzie. Teraz zajmiemy się wstępem do podstaw.

Rozważmy następujące formuły zdaniowe:

$$(*) \quad P(a, F(b))$$

$$(**) \quad P(a, F(x_1))$$

gdzie P jest predykatem dwuargumentowym, F jest symbolem funkcyjnym jednoargumentowym, a i b są stałymi indywiduowymi oraz x_1 jest zmienną indywiduową.

Pytanie: Czy formuła $(*)$ jest prawdziwa?

Aby móc na to pytanie odpowiedzieć, musimy uprzednio ustalić, do czego odnoszą się symbole P , F , a i b . Możemy to zrobić na różne sposoby – możemy je różnie **interpretować**.

Przykład 2.1. Przypuśćmy, że *dziedziną* (lub *uniwersum*) naszych rozważań jest zbiór liczb naturalnych. Niech:

- stała indywiduowa a oznacza liczbę **2**,
- stała indywiduowa b oznacza liczbę **1**,
- predykat P oznacza relację identyczności, $=$, w zbiorze liczb naturalnych **N**,
- symbol funkcyjny F oznacza funkcję następnika, **S**, tj. funkcję **S**: **N** $\rightarrow$ **N** taką, że **S**(y) = $y + 1$.

Przy takiej interpretacji formuła zdaniowa:

$$(*) \quad P(a, F(b))$$

jest, intuicyjnie rzecz biorąc, prawdziwa, jako że orzeka ona, iż następnik liczby **1** jest równy liczbie **2** – a tak właśnie jest w dziedzinie liczb naturalnych.

Wprowadzenie

Gdyby natomiast – przykładowo – stała indywidualową b rozumieć jako oznaczającą liczbę **2**, to – zakładając, że nadal mówimy o uniwersum liczb naturalnych i pozostałe stałe pozalogiczne są rozumiane analogicznie jak poprzednio – formuła (*) byłaby fałszywa.

Zauważmy, że aby rozstrzygnąć, jaka jest wartość logiczna formuły:

$$(*) \quad P(a, F(b))$$

nie wystarczy wiedzieć, jak rozumiane są stałe pozalogiczne występujące w tej formule – trzeba jeszcze wiedzieć „jak się rzeczy mają” w uniwersum, o którym mówimy.

Gdybyśmy jednak *nie wiedzieli*, do czego odnoszą się stałe pozalogiczne formuły (*), pytanie o wartość logiczną tej formuły byłoby źle postawione. Innymi słowy, **prawdziwość/fałszywość formuł języka pierwszego rzędu musimy zawsze zrelatywizować** do interpretacji języka, w którym formuły te zostały zapisane.

Interpretacje (modele) języka pierwszego rzędu

Najobszerniejszym językiem pierwszego rzędu jest język Klasycznego Rachunku Predykatów (dalej: *KRP*). Zdefiniujemy najpierw pojęcie interpretacji języka *KRP*.

Definicja 2.1. *Interpretacją* języka *KRP* nazywamy dowolną parę uporządkowaną $\langle \mathbf{U}, \Delta \rangle$, gdzie $\mathbf{U}$ jest niepustym zbiorem, natomiast Δ jest funkcją określona na zbiorze wszystkich stałych pozalogicznych rozważanego języka, spełniającą następujące warunki:

- (a) dla dowolnej stałej indywiduowej a_i , $\Delta(a_i) \in \mathbf{U}$,
- (b) dla dowolnego predykatu n -argumentowego P_k^n , $\Delta(P_k^n)$ jest n -członową relacją w zbiorze $\mathbf{U}$,
- (c) dla dowolnego n -argumentowego symbolu funkcyjnego F_k^n , $\Delta(F_k^n)$ jest n -argumentową funkcją, której argumenty i wartości należą do zbioru $\mathbf{U}$.

Gdy $\langle \mathbf{U}, \Delta \rangle$ jest interpretacją języka *KRP*, to zbiór $\mathbf{U}$ nazywamy *uniwersum* (lub dziedziną) tej interpretacji, natomiast funkcję Δ określamy mianem *funkcji denotowania* (lub funkcji interpretującej).

Interpretacje (modele) języka pierwszego rzędu

Komentarze. Zauważmy, że funkcja denotowania przyporządkowuje każdej stałej indywiduowej jakiś element uniwersum, każdemu predykatowi n -argumentowemu (gdzie $n \geq 1$) pewną relację n -członową w uniwersum oraz każdemu symbolowi funkcyjnemu n -argumentowemu (gdzie $n \geq 1$) pewną funkcję n -argumentową o argumentach i wartościach należących do uniwersum. Nie jest natomiast konieczne, aby każdy element uniwersum był wartością funkcji denotowania dla jakiejś stałej indywiduowej – dopuszcza się istnienie „beziemiennych” elementów uniwersum.

Ponieważ definicja 2.1 wymaga od zbioru $\mathbf{U}$ tylko niepustości, natomiast od funkcji Δ - tylko spełnienia określonych warunków, istnieje nieskończenie wiele różnych interpretacji języka KRP .

Pojęcie interpretacji dla języków pierwszego rzędu „uboższych” niż język KRP określamy *analogicznie*, ewentualnie pomijając klauzule dotyczące stałych indywiduowych i/lub symboli funkcyjnych jeśli takie wyrażenia nie występują w analizowanym języku.

Interpretacje (modele) języka pierwszego rzędu

Przykład 2.2. Niech L^* będzie językiem pierwszego rzędu, którego jedy-
nymi stałymi pozalogicznymi są predykat dwuargumentowy P , stałe in-
dywiduowe a i b oraz symbol funkcyjny jednoargumentowy F . Oto przy-
kład konkretnej interpretacji tego języka:

$$\langle \mathbf{N}, \Delta \rangle$$

gdzie $\mathbf{N}$ jest zbiorem liczb naturalnych, $\Delta(P)$ jest relacją identyczności w $\mathbf{N}$, $\Delta(F)$ jest funkcją następnika $\mathbf{S}$ oraz:

- $\Delta(a) = 2$,
- $\Delta(b) = 1$.

Uwaga dla purystów: Interpretacje definiujemy zawsze w metajęzyku. W związku z tym, ściśle rzecz biorąc, w definicji zamiast stałych pozalogicznych języka przedmiotowego L^* należałoby użyć nazw tych stałych, np. nazw cudzysłowo-
wych. Ponieważ jednak niczym to nie groziło, postąpiliśmy jak postąpiliśmy :)

Interpretacje (modele) języka pierwszego rzędu

Dygresja 2.1. Gdy mamy do czynienia z językiem pierwszego rzędu, w którym występuje skończona i stosunkowo niewielka liczba stałych pozalogicznych, interpretacje takiego języka wygodnie jest określać jako *struktury*, a nie jako pary uporządkowane. Struktura:

$$(\$) \qquad \langle \mathbf{N}, =, \mathbf{S}, 2, 1 \rangle$$

jest wyznaczona przez interpretację języka L^* podaną w przykładzie 1.2, jako że $(\$)$ jest tym samym, co:

$$\langle \mathbf{N}, \Delta(P), \Delta(F), \Delta(a), \Delta(b) \rangle.$$

Z drugiej strony, mając daną strukturę $(\$)$, możemy z łatwością przejść do interpretacji języka L^* podanej w przykładzie 1.2.

Dygresja 2.2. To, co wyżej nazwaliśmy interpretacjami języków pierwszego rzędu, bywa też często nazywane **modelami** tych **języków**. Termin „model języka” jest też używany dla oznaczenia struktur wyznaczanych (w sensie naszkicowanym wyżej) przez interpretacje/modele.

Wartościowanie i wartości termów: intuicje

Rozważmy teraz formułę zdaniową:

$$(**) \quad P(a, F(x_1))$$

przyjmując, że jest to formuła języka L^* . Weźmy pod uwagę interpretację tego języka podaną w przykładzie 2.2. Formuła $(**)$ zyskuje teraz następujący przekład na metajęzyk:

$(**\#)$ *liczba 2 jest równa następnikowi liczby (naturalnej) x .*

Formuła zdaniowa $(**)$ jest funkcją zdaniową języka L^* . Podając jej przekład na metajęzyk w oparciu o dane, których dostarcza nam definicja interpretacji, otrzymujemy *otwarty warunek*. Jednocześnie podana definicja rozważanej interpretacji języka L^* nie wymusza, jaką wartość przyjmuje zmienna x_1 – funkcja denotowania jest określona tylko na zbiorze stałych pozalogicznych rozważanego języka.

Wartościowania i wartości termów

Aby pójść dalej, potrzebujemy jakiegoś „mechanizmu” ustalania wartości semantycznych dowolnych termów – także zmiennych indywiduowych oraz tych termów złożonych, w których występują zmienne indywiduowe.

Notacja: Kolejne wyrazy nieskończonego ciągu $\mathbf{s}$ oznaczamy przez $s_1, s_2, \dots$. Metajęzykowy napis s_i oznacza i -ty wyraz ciągu $\mathbf{s}$.

Definicja 2.2. Niech $\mathbf{M} = \langle \mathbf{U}, \Delta \rangle$ będzie dowolną ale ustaloną interpretacją danego języka pierwszego rzędu. Nieskończone ciągi elementów uniwersum interpretacji $\mathbf{M} = \langle \mathbf{U}, \Delta \rangle$ nazywamy **M -wartościowaniami**.

Ostrzeżenie: Proszę nie mieszać tego pojęcia z pojęciem wartościowania znanym z semantyki Klasycznego Rachunku Zdań!

Definicja 2.3. Niech L będzie językiem KRP, niech $M = \langle U, \Delta \rangle$ będzie dowolną ale ustaloną interpretacją tego języka i niech s będzie dowolnym ale ustalonym M -wartościowaniem. Pojęcie **wartości termu** τ języka L **przy** M -wartościowaniu s - symbolicznie: $\tau^M[s]$ – określamy następująco:

- (i) $x_i^M[s] = s_i$,
- (ii) $a_i^M[s] = \Delta(a_i)$,
- (iii) $F_k^n(\tau_1, \dots, \tau_n)^M[s] = \Delta(F_k^n)(\tau_1^M[s], \dots, \tau_n^M[s])$.

Gdy rozważamy języki pierwszego rzędu “uboższe” od języka KRP, powyższe pojęcie określamy *analogicznie*, ewentualnie pomijając warunki (ii) i/lub (iii) w sytuacji, gdy w analizowanym języku nie występują stałe indywiduowe lub symbole funkcyjne.

Wartościowania i wartości termów

Komentarz: Wartością i -tej zmiennej x_i jest i -ty wyraz wartościowania. Ponieważ jednak elementy uniwersum możemy „ustawiać” w ciągu w różnej kolejności, zatem i -ta zmienna może mieć różne wartości przy różnych wartościowaniach. Przykładowo, gdy rozważamy interpretację języka L^* podaną w przykładzie 2.2, wartościami zmiennej x_1 występującej w formule:

$$(**) \quad P(a, F(x_1))$$

mogą być, przy różnych wartościowaniach, zarówno liczba **1**, jak i liczba **2** - i dowolne inne liczby naturalne też. Natomiast przy konkretnym wartościowaniu zmienna x_1 ma dokładnie jedną wartość.

Zgodnie z punktem (ii) podanej definicji, wartości stałych indywidualnych są takie same przy każdym wartościowaniu. Jak zobaczymy, własność tę mają wszystkie termy domknięte, tj. nie zawierające zmiennych.

Wartościowania i wartości termów

Wartości termów zawierających symbole funkcyjne możemy natomiast łatwo „obliczyć”, korzystając z punktu (iii) definicji 2.3.

Przykład 2.3. Rozważamy język L^* i jego interpretację podaną w przykładzie 2.2; oznaczmy tę interpretację przez M^* .

Weźmy następujące M^* -wartościowanie: $\mathbf{s}' = \langle 1, 2, 3, 4, \dots \rangle$, oraz term $F(x_1)$. „Obliczamy” następująco:

$$\begin{aligned} F(x_1)^{M^*}[\mathbf{s}'] &= \\ &= \Delta(F)(x_1^{M^*}[\mathbf{s}']) \\ &= \mathbf{S}(1) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Uwaga dla purystów: Nasuwa się :)

Weźmy teraz M^* -wartościowanie $\mathbf{s}'' = \langle 2, 4, 6, 8, \dots \rangle$.

$$\begin{aligned} F(x_1)^{M^*}[\mathbf{s}''] &= \\ &= \Delta(F)(x_1^{M^*}[\mathbf{s}'']) \\ &= \mathbf{S}(2) \\ &= 3. \end{aligned}$$

Rozważmy na koniec term $F(F(x_3))$ oraz M^* -wartościowanie $\mathbf{s}''$:

$$\begin{aligned} F(F(x_3))^{M^*}[\mathbf{s}''] &= \\ &= \Delta(F)(F(x_3)^{M^*}[\mathbf{s}'']) \\ &= \Delta(F)(\Delta(F)(x_3^{M^*}[\mathbf{s}''])) \\ &= \Delta(F)(\Delta(F)(6)) \\ &= \mathbf{S}(\mathbf{S}(6)) \\ &= \mathbf{S}(7) \\ &= 8. \end{aligned}$$

Wartościowania i wartości termów

Założenie: Od tej chwili zakładamy – o ile nie zostanie to *explicite* odwołane! – że rozważamy dowolną ale ustaloną interpretację $\mathbf{M} = \langle \mathbf{U}, \Delta \rangle$ dowolnego ale ustalonego języka pierwszego rzędu.

Definicja pojęcia wartości termu przy wartościowaniu została tak skonstruowana, że zachodzą następujące, intuicyjne zależności:

Twierdzenie 2.1. *Jeżeli $\mathbf{s}$ i $\mathbf{s}'$ są $\mathbf{M}$ -wartościowaniami nie różniącymi się na miejscach odpowiadających wskaźnikom zmiennych występujących w termie τ , to*

$$\tau^{\mathbf{M}}[\mathbf{s}] = \tau^{\mathbf{M}}[\mathbf{s}'].$$

Dowód: Znajduje się w "Dodatku 1" na końcu tej prezentacji.

Twierdzenie 2.1 implikuje, że na wartość termu mają wpływ tylko te wyrazy wartościowania, które „odpowiadają” wskaźnikom zmiennych występujących w termie. Wynika stąd w szczególności, że wartości termów domkniętych, tj. nie zawierających zmiennych, są takie same przy danej interpretacji z uwagi na wszystkie wartościowania.

Wartościowania i wartości termów

Twierdzenie 2.2. *Niech α i β będą termami. Jeżeli $\mathbf{s}$ i $\mathbf{s}'$ są M -wartościowaniami takimi, że $\mathbf{s}' = \langle s_1, \dots, s_{i-1}, \alpha^M[\mathbf{s}], s_{i+1}, \dots \rangle$, to*

$$\beta[x_i/\alpha]^M[\mathbf{s}] = \beta^M[\mathbf{s}'].$$

Dowód: Znajduje się w "Dodatku 2" na końcu tej prezentacji.

Treść twierdzenia 2.2 można skrótowo wyrazić następująco: wartość „nowego” termu przy „starym” wartościowaniu jest równa wartości „starego” termu przy „nowym” wartościowaniu. Jak zobaczymy, twierdzenie to ma istotne zastosowania.

Wartościowania i wartości termów

Wróćmy teraz do funkcji zdaniowej:

$$(**) \quad P(a, F(x_1))$$

Gdy mamy dane *zarówno* interpretację języka, jak i pewne wartościowanie z uniwersum tej interpretacji, formuła (**) wyraża jasno określoną treść – z tym, że ta treść jest różna przy różnych wartościowaniach (mówiąc ściślej, przy wartościowaniach różniących się wartościami zmiennej x_1). Dla interpretacji scharakteryzowanej w przykładzie 2.2 i wartościowania $\mathbf{s}'$ rozważanego w przykładzie 2.3. wartością zmiennej x_1 jest liczba **1**, natomiast wartością x_1 przy wartościowaniu $\mathbf{s}''$ jest liczba **2**. Wartości termu $F(x_1)$ to odpowiednio **2** i **3**.

Przypomnijmy jednak, że formuła (**) jest funkcją zdaniową, a nie zdaniem. Semantycznie rzecz biorąc, funkcje zdaniowe wyrażają otwarte warunki, które mogą być *spełniane* przez pewne obiekty. Natomiast otwarty warunek nazwiemy *prawdziwym* wówczas, gdy jest on spełniony przez wszystkie obiekty rozważanego rodzaju.

Kolejny krok w semantyce teoriomodelowej polega na określeniu następującego pojęcia:

Formuła zdaniowa A jest spełniona przy interpretacji M przez M -wartościowanie s .

O tym jednak na następnym wykładzie.

Dodatek 1: Dowód twierdzenia 2.1

Twierdzenie 2.1. *Jeżeli $\mathbf{s}$ i $\mathbf{s}'$ są M -wartościowaniami nie różniącymi się na miejscach odpowiadających wskaźnikom zmiennych występujących w termie τ , to*

$$\tau^M[\mathbf{s}] = \tau^M[\mathbf{s}'].$$

Dowód: Twierdzenia dowodzimy przez indukcję strukturalną względem budowy termu τ .

Przypadek 1: Term τ jest zmienną indywiduową; $\tau = x_i$.

Na mocy założenia, $s_i = s'_i$. Z definicji pojęcia wartości termu przy wartościowaniu dostajemy:

$$\tau^M[\mathbf{s}] = x_i^M[\mathbf{s}] = s_i = s'_i = x_i^M[\mathbf{s}'] = \tau^M[\mathbf{s}'].$$

Zatem w rozważanym przypadku $\tau^M[\mathbf{s}] = \tau^M[\mathbf{s}']$.

Przypadek 2: Term τ jest stałą indywidualną; $\tau = a_k$. Na mocy definicji 2.3:

$$\tau^M[\mathbf{s}] = a_k^M[\mathbf{s}] = \Delta(a_k) = a_k^M[\mathbf{s}'] = \tau^M[\mathbf{s}'].$$

Ponownie dostajemy $\tau^M[\mathbf{s}] = \tau^M[\mathbf{s}']$.

Dodatek 1: Dowód twierdzenia 2.1 c.d.

Przypadek 3: Term τ ma postać $F_k^n(\tau_1, \dots, \tau_n)$.

Założenie indukcyjne:

$$(*) \tau_i^M[\mathbf{s}] = \tau_i^M[\mathbf{s}'] \text{ dla } 1 \leq i \leq n.$$

Na mocy definicji mamy:

$$\tau^M[\mathbf{s}] = F_k^n(\tau_1, \dots, \tau_n)^M[\mathbf{s}] = \Delta(F_k^n)(\tau_1^M[\mathbf{s}], \dots, \tau_n^M[\mathbf{s}]).$$

$$\tau^M[\mathbf{s}'] = F_k^n(\tau_1, \dots, \tau_n)^M[\mathbf{s}'] = \Delta(F_k^n)(\tau_1^M[\mathbf{s}'], \dots, \tau_n^M[\mathbf{s}']).$$

Korzystając z założenia indukcyjnego (*) dostajemy:

$$\Delta(F_k^n)(\tau_1^M[\mathbf{s}], \dots, \tau_n^M[\mathbf{s}]) = \Delta(F_k^n)(\tau_1^M[\mathbf{s}'], \dots, \tau_n^M[\mathbf{s}']).$$

Tak więc

$$F_k^n(\tau_1, \dots, \tau_n)^M[\mathbf{s}] = F_k^n(\tau_1, \dots, \tau_n)^M[\mathbf{s}']$$

czyli także w tym przypadku $\tau^M[\mathbf{s}] = \tau^M[\mathbf{s}']$.

Dodatek 2: Dowód twierdzenia 2.2

Twierdzenie 2.2. Niech α i β będą termami. Jeżeli $\mathbf{s}$ i $\mathbf{s}'$ są M -wartościowaniami takimi, że $\mathbf{s}' = \langle s_1, \dots, s_{i-1}, \alpha^M[\mathbf{s}], s_{i+1}, \dots \rangle$, to

$$\beta[x_i/\alpha]^M[\mathbf{s}] = \beta^M[\mathbf{s}'].$$

Dowód: Twierdzenia dowodzimy przez indukcję strukturalną względem budowy termu β . Korzystamy z definicji operacji podstawiania termu za zmienną w termie (zob. kurs "Logika 1").

Przypadek 1. Term β jest zmienną indywiduową; $\beta = x_j$.

Podprzypadek 1a: $i = j$, czyli $x_j = x_i$.

Z definicji podstawiania dostajemy: $x_j[x_i/\alpha] = \alpha$. Zatem:

$$\beta[x_i/\alpha]^M[\mathbf{s}] = x_j[x_i/\alpha]^M[\mathbf{s}] = \alpha^M[\mathbf{s}],$$

$$\beta^M[\mathbf{s}'] = x_j^M[\mathbf{s}'] = x_i^M[\mathbf{s}'] = \alpha^M[\mathbf{s}].$$

Tak więc $\beta[x_i/\alpha]^M[\mathbf{s}] = \beta^M[\mathbf{s}']$.

Dodatek 2: Dowód twierdzenia 2.2 c.d.

Podprzypadek 1b: $i \neq j$, czyli $x_j \neq x_i$.

Z definicji podstawiania mamy: $x_j[x_i/\alpha] = x_j$.

Zauważmy, że $x_j^M[\mathbf{s}] = x_j^M[\mathbf{s}']$. Zatem $\beta[x_i/\alpha]^M[\mathbf{s}] = \beta^M[\mathbf{s}']$.

Przypadek 2: Term β jest stałą indywidualną; $\beta = a_k$. Czyli $\beta[x_i/\alpha] = a_k[x_i/\alpha]$.

Z definicji podstawiania dostajemy $a_k[x_i/\alpha] = a_k$. Z kolei na mocy definicji pojęcia wartości termu przy wartościowaniu mamy:

$$a_k^M[\mathbf{s}] = \Delta(a_k) = a_k^M[\mathbf{s}'].$$

Wnosimy stąd, że w rozważanym przypadku zachodzi $\beta[x_i/\alpha]^M[\mathbf{s}] = \beta^M[\mathbf{s}']$.

Przypadek 3. Term β ma postać $F_k^n(\tau_1, \dots, \tau_n)$.

Założenie indukcyjne:

$$(**) \tau_j[x_i/\alpha]^M[\mathbf{s}] = \tau_j^M[\mathbf{s}'] \text{ dla } 1 \leq j \leq n.$$

Dodatek 2: Dowód twierdzenia 2.2 c.d.

Z definicji podstawiania mamy:

$$F_k^n(\tau_1, \dots, \tau_n)[x_i/\alpha] = F_k^n(\tau_1[x_i/\alpha], \dots, \tau_n[x_i/\alpha]).$$

$$\text{Zatem } \beta[x_i/\alpha]^M[\mathbf{s}] = F_k^n(\tau_1[x_i/\alpha], \dots, \tau_n[x_i/\alpha])^M[\mathbf{s}].$$

Korzystając z definicji pojęcia wartości termu przy wartościowaniu dostajemy:

$$F_k^n(\tau_1[x_i/\alpha], \dots, \tau_n[x_i/\alpha])^M[\mathbf{s}] = \Delta(F_k^n)(\tau_1[x_i/\alpha]^M[\mathbf{s}], \dots, \tau_n[x_i/\alpha]^M[\mathbf{s}]).$$

W oparciu o założenie indukcyjne (**) dostajemy:

$$\Delta(F_k^n)(\tau_1[x_i/\alpha]^M[\mathbf{s}], \dots, \tau_n[x_i/\alpha]^M[\mathbf{s}]) = \Delta(F_k^n)(\tau_1^M[\mathbf{s}'], \dots, \tau_n^M[\mathbf{s}']).$$

Jednocześnie na mocy definicji pojęcia wartości termu przy wartościowaniu mamy:

$$\Delta(F_k^n)(\tau_1^M[\mathbf{s}'], \dots, \tau_n^M[\mathbf{s}']) = F_k^n(\tau_1, \dots, \tau_n)^M[\mathbf{s}'].$$

Tak więc zachodzi:

$$F_k^n(\tau_1[x_i/\alpha], \dots, \tau_n[x_i/\alpha])^M[\mathbf{s}] = F_k^n(\tau_1, \dots, \tau_n)^M[\mathbf{s}']$$

$$\text{czyli } \beta[x_i/\alpha]^M[\mathbf{s}] = \beta^M[\mathbf{s}'].$$