Andrzej Wiśniewski
Logika II

Materiały do wykładu dla studentów kognitywistyki
2019/2020

Wprowadzenie do semantyki teoriomodelowej cz.2.
Spełnianie

Celem jest podanie definicji następującego pojęcia:

*Formuła zdaniowa A jest spełniona przy interpretacji **M** przez **M**-wartościowanie **s**.*

Zakładam znajomość pojęć wprowadzonych na poprzednim wykładzie :)

Aby przybliżyć intuicje, na początek zajmiemy się stosunkowo ubogim językiem pierwszego rzędu.

Będzie to język ***L****, o którym mówiliśmy na poprzednim wykładzie. Język ***L**** jest językiem pierwszego rzędu, którego jedynymi stałymi pozalogicznymi są: predykat dwuargumentowy *P*, stałe indywiduowe *a* i *b* oraz symbol funkcyjny jednoargumentowy *F*.

Weźmy następującą interpretację języka ***L**** (różniącą się nieco od poprzednio rozważanej):

$$<\mathbf{N}, \Delta>$$

gdzie **N** jest zbiorem liczb naturalnych, $\Delta(P)$ jest relacją **<** mniejszości w **N,** $\Delta(F)$ jest funkcją następnika **S** oraz:

- $\Delta(a) = \mathbf{2}$,
- $\Delta(b) = \mathbf{7}$.

Oznaczmy tę interpretację przez $\boldsymbol{M_{\#}}$.

Rozważmy teraz formułę zdaniową:

$$(**) \qquad P(a, F(x_1))$$

Przy rozważanej interpretacji języka formuła zdaniowa $P(a, F(x_1))$ „głosi” co następuje (tj. jej przekładem na metajęzyk jest):

(**$^{\$}$) *liczba* **2** *jest mniejsza od następnika liczby (naturalnej)* ***x***.

[Formuła zdaniowa $P(a, F(x_1))$ jest funkcją zdaniową języka ***L****. Jej przekładem na metajęzyk - w oparciu o dane, których dostarcza nam definicja interpretacji $\boldsymbol{M_{\#}}$ - jest otwarty warunek.]

Powiemy zapewne, że:

(i) *liczba* **4** *spełnia warunek* (**$^{\$}$)

lub

(i’) *formuła zdaniowa* $P(a, F(x_1))$ *jest spełniona przy interpretacji* $\boldsymbol{M_{\#}}$ *przez liczbę* **4**.

rozumiejąc pojęcie spełniania w jego potocznym sensie.

Dlaczego użyjemy tych sformułowań? Ponieważ **2 < 5**, a **S**(**4**) = **4 + 1** = **5**.

Dygresja: metajęzykowe nazwy wyrażeń języka przedmiotowego

Dygresja 3.1. (i') jest wypowiedzią w metajęzyku języka ***L****. Zwrot „*formuła zdaniowa P*(*a*, *F*(x_1))" jest nazwą analizowanej formuły, nazwą należącą do metajęzyka języka ***L****.

W metalogice często postępujemy w podobny sposób: poprzedzając odpowiednie – konkretne! - wyrażenia języka przedmiotowego zwrotami takimi, jak „term", „formuła zdaniowa", „funkcja zdaniowa", „zdanie" etc. otrzymujemy metajęzykowe nazwy rozważanych wyrażeń języka przedmiotowego.

Intuicyjne pojęcie spełniania: formuły atomowe

Rozważmy teraz następującą formułę zdaniową języka ***L****:

(***) $P(x_1, F(x_2))$

oraz – ponownie - interpretację $\boldsymbol{M_{\#}}$ tego języka. Przekładem na metajęzyk – z uwagi na interpretację $\boldsymbol{M_{\#}}$ - formuły (***) jest:

(***$) *liczba (naturalna)* ***x*** *jest mniejsza od następnika liczby (naturalnej)* ***y****.*

Skłonni będziemy – przykładowo - stwierdzić co następuje:

(ii) *układ liczb* <**1**, **2**> *spełnia warunek* (***$),

(iii) *układ liczb* <**2**, **1**> *nie spełnia warunku* (***$),

(ii') *formuła zdaniowa* $P(x_1, F(x_2))$ *jest spełniona przy interpretacji* $\boldsymbol{M_{\#}}$ *przez (uporządkowaną) parę liczb* <**1**, **2**>,

(iii') *formuła zdaniowa* $P(x_1, F(x_2))$ *nie jest spełniona przy interpretacji* $\boldsymbol{M_{\#}}$ *przez (uporządkowaną) parę liczb* <**2**, **1**>.

Zauważmy, że kolejność, w jakiej występują liczby **1** i **2**, jest istotna.

Istnieją funkcje zdaniowe o więcej niż dwóch zmiennych wolnych. Zamiast za każdym razem charakteryzować „liczebność układu” obiektów spełniających/nie spełniających odpowiednią funkcję zdaniową, wygodniej jest określić pojęcie spełniania formuły zdaniowej przez ciąg obiektów, najlepiej – ciąg nieskończony. Takie ciągi to jednak nic innego niż wartościowania z uniwersum interpretacji; przykładowo, nieskończony ciąg liczb naturalnych to przecież $\boldsymbol{M_{\#}}$-wartościowanie.

Rozważmy dla przykładu dwa $\boldsymbol{M_{\#}}$-wartościowania:

s* = <**1**, **2**, **3**, **4**, ….>

s** = <**2**, **1**, **3**, **4**, …>

Wartością x_1 przy $\boldsymbol{M_\#}$-wartościowaniu **s*** (tj. <**1**, **2**, **3**, **4**, ...>) jest liczba **1**, natomiast wartością zmiennej x_2 jest liczba **2**. Z kolei wartością termu $F(x_2)$ przy wartościowaniu **s*** jest następnik liczby **2**, tj. liczba **3**. Możemy powiedzieć, że:

(ii'') *Formuła zdaniowa* $P(x_1, F(x_2))$ *jest spełniona przy interpretacji* $\boldsymbol{M_\#}$ *przez* $\boldsymbol{M_\#}$*-wartościowanie* **s***.

mając na myśli to, że zachodzi nierówność **1 < S**(**2**), gdzie **S**(**2**) = **2+1** = **3**. Że tak jest, wiemy z arytmetyki.

Zauważmy teraz, że warunek **1 < S**(**2**) możemy równoważnie zapisać następująco:

$$\Delta(P)(x_1{}^{\boldsymbol{M_\#}}[\mathbf{s^*}], F(x_2)^{\boldsymbol{M_\#}}[\mathbf{s^*}]).$$

Dygresja 3.2. To, że relacja dwuczłonowa $\boldsymbol{r}$ zachodzi między obiektami $\boldsymbol{o}_1$ i $\boldsymbol{o}_2$, możemy wyrazić zarówno wzorem $\boldsymbol{o}_1\boldsymbol{r}\ \boldsymbol{o}_2$, jak i wzorem $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{o}_1, \boldsymbol{o}_2)$. Przykładowo, napisy **1 < S**(**2**) oraz **<**(**1**, **S**(**2**)) mają tę samą treść.

Niby to oczywiste, ale warto o tym przypomnieć :)

Teraz rozważmy $\boldsymbol{M_\#}$-wartościowanie **s**** (tj. <**2**, **1**, **3**, **4**, ...>). Wartościami zmiennych x_1 i x_2 przy wartościowaniu **s**** są, odpowiednio, liczby **2** i **1**. Wartością termu $F(x_2)$ jest liczba **2**. Mamy:

> (iv'') *Formuła zdaniowa* $P(x_1, F(x_2))$ *nie jest spełniona przy interpretacji* $\boldsymbol{M_\#}$ *przez* $\boldsymbol{M_\#}$*-wartościowanie* **s****.

jako że nie jest tak, iż **2** **<** **S**(**1**) – bo **S**(**1**) = **2**. To, że (iv'') zachodzi, wiemy z arytmetyki.

Warunek niezbędny i wystarczający tego, aby formuła zdaniowa $P(x_1, F(x_2))$ była spełniona przy interpretacji $\boldsymbol{M_\#}$ przez $\boldsymbol{M_\#}$-wartościowanie **s**** możemy natomiast zapisać następująco:

$$\Delta(P)(x_1{}^{\boldsymbol{M_\#}}[\mathbf{s}^{**}], F(x_2)^{\boldsymbol{M_\#}}[\mathbf{s}^{**}])$$

Tyle daje nam semantyka.

Wróćmy teraz do formuły (funkcji) zdaniowej:

(**) $P(a, F(x_1))$

Z uwagi na interpretację $\boldsymbol{M_\#}$ formuła ta „głosi”, iż:

(**$) *liczba* **2** *jest mniejsza od następnika liczby (naturalnej)* ***x****.*

Weźmy ponownie $\boldsymbol{M_\#}$-wartościowanie **s**** = <**2**, **1**, **3**, **4**, ...>. Warunek niezbędny i wystarczający tego, aby formuła zdaniowa $P(a, F(x_1))$ była spełniona przy interpretacji $\boldsymbol{M_\#}$ przez $\boldsymbol{M_\#}$-wartościowanie **s**** jest następujący:

$$\Delta(P)(a^{\boldsymbol{M_\#}}[\mathbf{s}^{**}], F(x_1)^{\boldsymbol{M_\#}}[\mathbf{s}^{**}])$$

Podobnie jak poprzednio, $\Delta(P)$ = **<**. Jednocześnie $a^{\boldsymbol{M_\#}}[\mathbf{s}^{**}] = \Delta(a) = \mathbf{2}$, a ponadto $F(x_1)^{\boldsymbol{M_\#}}[\mathbf{s}^{**}] = \mathbf{3}$. Zatem arytmetyka pokazuje, <u>że</u> formuła zdaniowa $P(a, F(x_1))$ jest spełniona przy interpretacji $\boldsymbol{M_\#}$ przez $\boldsymbol{M_\#}$-wartościowanie **s****. *Semantyka pokazuje jedynie, co to znaczy, że jest ona spełniona*.

Uogólnijmy teraz powyższe spostrzeżenia.

Formuły atomowe języka ***L**** mają postać:

$$P(\tau_1,\tau_2)$$

gdzie τ_1,τ_2 są termami języka ***L****. Niech $\boldsymbol{M}$ = <**U**, Δ> będzie dowolną ale ustaloną interpretacją języka ***L****, natomiast **s** będzie dowolnym ale ustalonym ***M***-wartościowaniem. Mamy:

*Atomowa formuła zdaniowa o postaci $P(\tau_1,\tau_2)$ jest spełniona przy interpretacji **M** przez **M**-wartościowanie **s** wtw*

$$\Delta(P)(\tau_1^{\boldsymbol{M}}[\mathbf{s}],\ \tau_2^{\boldsymbol{M}}[\mathbf{s}]).$$

Komentarz: $\Delta(P)$ jest relacją przyporządkowaną predykatowi P przez funkcję denotowania Δ interpretacji ***M***. Warunek $\Delta(P)(\tau_1^{\boldsymbol{M}}[\mathbf{s}],\ \tau_2^{\boldsymbol{M}}[\mathbf{s}])$ stwierdza, że relacja ta zachodzi między elementami uniwersum **U** rozważanej interpretacji będącymi wartościami termów τ_1, τ_2 przy ***M***-wartościowaniu **s**.

Rozważmy teraz dowolny język pierwszego rzędu. Formuły atomowe tego języka mają schemat:

$$P_k^n(\tau_1,\ldots, \tau_n)$$

Niech $\boldsymbol{M}$ = <**U**, Δ> będzie dowolną ale ustaloną interpretacją analizowanego języka, natomiast **s** będzie dowolnym ale ustalonym $\boldsymbol{M}$-wartościowaniem.

*Atomowa formuła zdaniowa o postaci $P_k^n(\tau_1,\ldots, \tau_n)$ jest spełniona przy interpretacji **M** przez **M**-wartościowanie* **s** *wtw*

$$\Delta(P_k^n)(\tau_1^{\boldsymbol{M}}[\mathbf{s}],\ldots, \tau_n^{\boldsymbol{M}}[\mathbf{s}]).$$

Komentarz: Podobny jak poprzednio :)

Jak dotąd określiliśmy pojęcie spełniania tylko dla przypadku atomowych formuł zdaniowych. Pełna definicja tego pojęcia jest indukcyjna – jest to indukcja z uwagi na budowę formuł zdaniowych.

Rozważamy dowolny ale ustalony język pierwszego rzędu, dowolną ale ustaloną interpretację ***M*** = <**U**, Δ> tego języka oraz dowolne ale ustalone ***M***-wartościowanie **s**.

Notacja: Napis $\mathbf{s}(u/s_i)$ oznacza ***M***-wartościowanie różniące się od ***M***-wartościowania **s** <u>*co najwyżej*</u> tym, że *i*-tym wyrazem ***M***-wartościowania $\mathbf{s}[u/s_i]$ jest element *u* uniwersum **U** interpretacji ***M***.

Zamiast „formuła zdaniowa *A* jest spełniona przy interpretacji ***M*** przez ***M***-wartościowanie **s**" piszemy krótko:

$$\boldsymbol{M} \models A\ [\mathbf{s}].$$

Z kolei zamiast „Nie jest tak, że formuła zdaniowa *A* jest spełniona przy interpretacji ***M*** przez ***M***-wartościowanie **s**" piszemy:

$$\boldsymbol{M}\ non \models A\ [\mathbf{s}].$$

Wyrażenie „wtw" skraca „wtedy i tylko wtedy, gdy".

Definicja 3.1. *Niech* $\boldsymbol{M}$ = <**U**, Δ> *i niech* **s** *będzie* ***M****-wartościowaniem*.

(1) $\boldsymbol{M} \models P_k^n(\tau_1,\ldots,\tau_n)[\mathbf{s}]$ *wtw* $\Delta(P_k^n)(\tau_1^{\boldsymbol{M}}[\mathbf{s}],\ldots,\tau_n^{\boldsymbol{M}}[\mathbf{s}])$.

(2) $\boldsymbol{M} \models \neg B\,[\mathbf{s}]$ *wtw* $\boldsymbol{M}$ *non* $\models B\,[\mathbf{s}]$.

(3) $\boldsymbol{M} \models (B \wedge C)[\mathbf{s}]$ *wtw* $\boldsymbol{M} \models B[\mathbf{s}]$ *oraz* $\boldsymbol{M} \models C[\mathbf{s}]$.

(4) $\boldsymbol{M} \models (B \vee C)[\mathbf{s}]$ *wtw* $\boldsymbol{M} \models B[\mathbf{s}]$ *lub* $\boldsymbol{M} \models C[\mathbf{s}]$.

(5) $\boldsymbol{M} \models (B \rightarrow C)[\mathbf{s}]$ *wtw* $\boldsymbol{M}$ *non* $\models B[\mathbf{s}]$ *lub* $\boldsymbol{M} \models C[\mathbf{s}]$.

(6) $\boldsymbol{M} \models (B \leftrightarrow C)[\mathbf{s}]$ *wtw* $\boldsymbol{M} \models B[\mathbf{s}]$ *zawsze i tylko, gdy* $\boldsymbol{M} \models C[\mathbf{s}]$.

(7) $\boldsymbol{M} \models \exists x_i\, A[\mathbf{s}]$ *wtw istnieje* $u \in \mathbf{U}$ *takie, że* $\boldsymbol{M} \models A[\mathbf{s}(u/s_i)]$.

(8) $\boldsymbol{M} \models \forall x_i\, A[\mathbf{s}]$ *wtw dla każdego* $u \in \mathbf{U}$ *jest tak, że* $\boldsymbol{M} \models A[\mathbf{s}(u/s_i)]$.

Komentarza wymagają warunki dla formuł z kwantyfikatorami. Najlepiej odwołać się do przykładów.

Przykład 3.1. Rozważamy ponownie język $\boldsymbol{L^*}$, jego interpretację $\boldsymbol{M_\#}$ = <**N**, Δ> oraz $\boldsymbol{M_\#}$-wartościowanie **s*** = <**1**, **2**, **3**, **4**, ...>. Bierzemy pod uwagę formułę zdaniową:

$$\exists x_1 P(x_1, x_2)$$

Z uwagi na interpretację $\boldsymbol{M_\#}$ powyższa formułą „głosi”, że:

istnieje liczba naturalna mniejsza od liczby (naturalnej) ***y***

Z definicji spełniania mamy (pomijam oczywistą w tym kontekście uwagę dla purystów):

$$\boldsymbol{M_\#} \models \exists x_1\, P(x_1, x_2)\ [\mathbf{s^*}]\ \textit{wtw}$$

$$\text{istnieje } u \in \mathbf{N} \text{ takie, że } \boldsymbol{M_\#} \models P(x_1, x_2)\ [<u, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \ldots>]\ \textit{wtw}$$

$$\text{istnieje } u \in \mathbf{N} \text{ takie, że } \Delta(P)(u, \mathbf{2})\ \textit{wtw}$$

$$\text{istnieje } u \in \mathbf{N} \text{ takie, że } u \mathbf{< 2}$$

Tyle daje nam semantyka. Jednocześnie na mocy arytmetyki wnosimy, że faktycznie zachodzi $\boldsymbol{M_\#} \models \exists x_1\, P(x_1, x_2)\ [\mathbf{s^*}]$.

Przykład 3.2. Ten sam język, ta sama interpretacja, to samo wartościowanie, ale inna formuła zdaniowa, mianowicie:

$$\forall x_1\, P(x_1, x_2)$$

Z definicji spełniania dostajemy:

$$\boldsymbol{M_\#} \models \forall x_1\, P(x_1, x_2)\ [\mathbf{s^*}]\ \textit{wtw}$$

dla każdego $u \in \mathbf{N}$ jest tak, że $\boldsymbol{M_\#} \models P(x_1, x_2)\ [<u, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \ldots>]$ *wtw*

dla każdego $u \in \mathbf{N}$ jest tak, że $\Delta(P)(u, \mathbf{2})$ *wtw*

dla każdego $u \in \mathbf{N}$ jest tak, że $u\ \mathbf{<}\ \mathbf{2}$

Tyle definicja spełniania.

Diagnoza płynąca z zewnątrz, z arytmetyki, jest negatywna:

$$\boldsymbol{M_\#}\ \textit{non} \models \forall x_1\, P(x_1, x_2)\ [\mathbf{s^*}].$$

Przykład 3.3. Znów ten sam język, ta sama interpretacja, to samo wartościowanie, ale tym razem zdanie $P(a, b)$.

Z definicji spełniania:

$$\boldsymbol{M}_{\#} \models P(a, b)\ [\mathbf{s}^*]\ \textit{wtw}$$

$$\Delta(P)(a^{\boldsymbol{M}_{\#}}[\mathbf{s}^*], b^{\boldsymbol{M}_{\#}}[\mathbf{s}^*])\ \textit{wtw}$$

$$\Delta(P)(\Delta(a), \Delta(b))\ \textit{wtw}$$

$$\mathbf{2 < 7}$$

Z arytmetyki wiemy, że tak jest, a zatem zdanie $P(a, b)$ jest spełnione przy interpretacji $\mathbf{M}_{\#}$ przez $\mathbf{M}_{\#}$-wartościowanie $\mathbf{s}^*$.

Zauważmy, że tak samo będzie w przypadku dowolnego innego $\boldsymbol{M}_{\#}$-wartościowania – wartości stałych indywiduowych są takie same przy każdym $\boldsymbol{M}_{\#}$-wartościowaniu.

Istnieją jednak takie interpretacje języka $\boldsymbol{L}^*$, przy których zdanie $P(a, b)$ nie jest spełnione przez żadne wartościowania.

Posiadamy już wszystkie narzędzia niezbędne dla zdefiniowania pojęcia prawdziwości formuły zdaniowej języka pierwszego rzędu przy danej interpretacji tego języka.

Definicja 3.2. *Formuła zdaniowa A danego języka pierwszego rzędu jest prawdziwa przy interpretacji* ***M*** = <**U**, Δ> *tego języka wtw formuła zdaniowa A jest spełniona przy interpretacji* ***M*** *przez każde* ***M****-wartościowanie.*

To, że formuła zdaniowa *A* jest prawdziwa przy interpretacji ***M***, zapisujemy ***M*** ⊨ *A*. Zatem powyższą definicję można wyrazić następująco:

M ⊨ *A wtw dla każdego* ***M****-wartościowania* **s**, ***M*** ⊨ *A* [**s**].

Jak zobaczymy na następnym wykładzie, powyższa definicja oddaje podobne intuicje, co klasyczna definicja prawdy.