

Andrzej Wiśniewski
Logika II

Materiały do wykładu dla studentów kognitywistyki
2019/2020

Wprowadzenie do semantyki teoriomodelowej cz.3.
Prawdziwość

Prawdziwość zdań a prawdziwość funkcji zdaniowych

Przypomnijmy **definicję prawdy** z poprzedniego wykładu:

Definicja 3.2. *Formuła zdaniowa A danego języka pierwszego rzędu jest **prawdziwa przy interpretacji** $\mathbf{M} = \langle \mathbf{U}, \Delta \rangle$ tego języka wtw formuła zdaniowa A jest spełniona przy interpretacji $\mathbf{M}$ przez każde $\mathbf{M}$ -wartościowanie.*

To, że formuła zdaniowa A jest prawdziwa przy interpretacji $\mathbf{M}$, zapisujemy $\mathbf{M} \models A$. Zatem:

$\mathbf{M} \models A$ wtw dla każdego $\mathbf{M}$ -wartościowania $\mathbf{s}$ jest tak, że $\mathbf{M} \models A[\mathbf{s}]$.

Dla prawdziwości niezbędne jest zatem spełnianie przez wszystkie wartościowania (z uniwersum rozważanej interpretacji). Jednakże, jak zobaczymy, dla prawdziwości zdań wystarczy spełnianie przez jedno wartościowanie. Jest to konsekwencją twierdzenia, które zaraz udowodnimy.

Prawdziwość zdań a prawdziwość funkcji zdaniowych

Dalej zakładamy – o ile nie zostanie to *explicite* odwołane! – że rozważamy dowolny ale ustalony język pierwszego rzędu oraz dowolną ale ustaloną interpretację $\mathbf{M} = \langle \mathbf{U}, \Delta \rangle$ tego języka.

Skorzystamy z następującego twierdzenia (udowodnionego na jednym z poprzednich wykładów):

Twierdzenie 2.1. *Jeżeli $\mathbf{s}$ i $\mathbf{s}'$ są $\mathbf{M}$ -wartościowaniami nie różniącymi się na miejscach odpowiadających wskaźnikom zmiennych występujących w termie τ , to*

$$\tau^{\mathbf{M}}[\mathbf{s}] = \tau^{\mathbf{M}}[\mathbf{s}'].$$

Udowodnimy teraz:

Twierdzenie 4.1. *Jeżeli $\mathbf{s}$ i $\mathbf{s}'$ są $\mathbf{M}$ -wartościowaniami nie różniącymi się na miejscach odpowiadających wskaźnikom zmiennych wolnych formuły zdaniowej A , to*

$$\mathbf{M} \models A[\mathbf{s}] \text{ wtw } \mathbf{M} \models A[\mathbf{s}'].$$

Prawdziwość zdań a prawdziwość funkcji zdaniowych

Szkic dowodu: Dowód prowadzimy przez indukcję względem budowy formuły zdaniowej A . Dla przykładu rozważę tylko 4 przypadki.

(1) A jest formułą atomową, tj. A ma postać $P_k^n(\tau_1, \dots, \tau_n)$.

Na mocy definicji spełniania dostajemy:

$$\mathbf{M} \models P_k^n(\tau_1, \dots, \tau_n)[\mathbf{s}] \text{ wtw } \Delta(P_k^n)(\tau_1^{\mathbf{M}}[\mathbf{s}], \dots, \tau_n^{\mathbf{M}}[\mathbf{s}]).$$

Przypuśćmy, że w formule $P_k^n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ występuje co najmniej jedna zmienna.

Z założenia wartościowania $\mathbf{s}$ i $\mathbf{s}'$ nie różnią się na miejscach odpowiadających wskaźnikom zmiennych wolnych występujących w formule $P_k^n(\tau_1, \dots, \tau_n)$.

Jednakże każda zmienna występująca w formule $P_k^n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ występuje w niej jako wolna (bo jest to formuła atomowa). Tak więc wartościowania $\mathbf{s}$ i $\mathbf{s}'$ nie różnią się na miejscach odpowiadających wskaźnikom zmiennych występujących w termie τ_i dla $1 \leq i \leq n$.

Teraz przypuśćmy, że w formule $P_k^n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ nie występuje żadna zmienna. Wówczas zależność:

"wartościowania $\mathbf{s}$ i $\mathbf{s}'$ nie różnią się na miejscach odpowiadających wskaźnikom zmiennych występujących w termie τ_i dla $1 \leq i \leq n$ "

jest pusto spełniona, a więc prawdziwa.

Widzimy więc, że w obu możliwych przypadkach zachodzi założenie twierdzenia 2.1 dla termu τ_i , gdzie $1 \leq i \leq n$ oraz wartościowań $\mathbf{s}$ i $\mathbf{s}'$. Tak więc na mocy twierdzenia 2.1 mamy:

$$\tau_i^M[\mathbf{s}] = \tau_i^M[\mathbf{s}'] \text{ dla } 1 \leq i \leq n.$$

Zatem:

$$\Delta(P_k^n)(\tau_1^M[\mathbf{s}], \dots, \tau_n^M[\mathbf{s}]) \text{ wtw } \Delta(P_k^n)(\tau_1^M[\mathbf{s}'], \dots, \tau_n^M[\mathbf{s}']).$$

Definicja spełniania daje:

$$\Delta(P_k^n)(\tau_1^M[\mathbf{s}'], \dots, \tau_n^M[\mathbf{s}']) \text{ wtw } \mathbf{M} \models P_k^n(\tau_1, \dots, \tau_n)[\mathbf{s}'].$$

Zatem ostatecznie:

$$\mathbf{M} \models P_k^n(\tau_1, \dots, \tau_n)[\mathbf{s}] \text{ wtw } \mathbf{M} \models P_k^n(\tau_1, \dots, \tau_n)[\mathbf{s}']$$

czyli $\mathbf{M} \models A[\mathbf{s}]$ wtw $\mathbf{M} \models A[\mathbf{s}']$.

Prawdziwość zdań a prawdziwość funkcji zdaniowych

(2) *A* ma postać $\neg B$.

Założenie indukcyjne: $\mathbf{M} \models B[\mathbf{s}]$ wtw $\mathbf{M} \models B[\mathbf{s}']$.

Z definicji spełniania dostajemy:

$$\mathbf{M} \models \neg B[\mathbf{s}] \text{ wtw } \mathbf{M} \text{ non } \models B[\mathbf{s}].$$

Na mocy założenia indukcyjnego mamy:

$$\mathbf{M} \text{ non } \models B[\mathbf{s}] \text{ wtw } \mathbf{M} \text{ non } \models B[\mathbf{s}'].$$

Ponownie z definicji spełniania:

$$\mathbf{M} \text{ non } \models B[\mathbf{s}'] \text{ wtw } \mathbf{M} \models \neg B[\mathbf{s}'].$$

Tak więc:

$$\mathbf{M} \models \neg B[\mathbf{s}] \text{ wtw } \mathbf{M} \models \neg B[\mathbf{s}']$$

czyli:

$$\mathbf{M} \models A[\mathbf{s}] \text{ wtw } \mathbf{M} \models A[\mathbf{s}'].$$

Prawdziwość zdań a prawdziwość funkcji zdaniowych

(3) *A* ma postać $B \wedge C$.

Założenie indukcyjne: $\mathbf{M} \models B[\mathbf{s}]$ wtw $\mathbf{M} \models B[\mathbf{s}']$,
 $\mathbf{M} \models C[\mathbf{s}]$ wtw $\mathbf{M} \models C[\mathbf{s}']$

Korzystając z definicji spełniania, założenia indukcyjnego i znów z definicji spełniania, dostajemy kolejno:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \models (B \wedge C)[\mathbf{s}] & \text{ wtw } \mathbf{M} \models B[\mathbf{s}] \text{ oraz } \mathbf{M} \models C[\mathbf{s}] \\ & \text{ wtw } (\mathbf{M} \models B[\mathbf{s}'] \text{ oraz } \mathbf{M} \models C[\mathbf{s}']) \\ & \text{ wtw } \mathbf{M} \models (B \wedge C)[\mathbf{s}']. \end{aligned}$$

A zatem:

$$\mathbf{M} \models (B \wedge C)[\mathbf{s}] \text{ wtw } \mathbf{M} \models (B \wedge C)[\mathbf{s}']$$

czyli:

$$\mathbf{M} \models A[\mathbf{s}] \text{ wtw } \mathbf{M} \models A[\mathbf{s}'].$$

Prawdziwość zdań a prawdziwość funkcji zdaniowych

(4) A ma postać $\exists x_i B$.

Założenie indukcyjne: $M \models B[s]$ wtw $M \models B[s']$

Założenie indukcyjne zachodzi rzecz jasna dla dowolnych M -wartościowań s, s' nie różniących się na miejscach odpowiadających wskaźnikom zmiennych wolnych formuły zdaniowej B .

Z założenia twierdzenia, s i s' nie różnią się na miejscach odpowiadających wskaźnikom zmiennych wolnych formuły zdaniowej A . Zmienna x_i jest związana w formule A , może się jednak zdarzyć, że jest ona wolna w formule B . Weźmy dowolne $u \in U$. M -wartościowania $s(u/s_i)$ oraz $s'(u/s'_i)$ nie różnią się na miejscach odpowiadających wskaźnikom zmiennych wolnych formuły zdaniowej B . Ponieważ u było dowolnym elementem zbioru U , zatem, biorąc pod uwagę założenie indukcyjne, dochodzimy do wniosku, iż:

(*) dla dowolnego $u \in U$: $M \models B[s(u/s_i)]$ wtw $M \models B[s'(u/s'_i)]$.

Definicja spełniania daje:

$M \models \exists x_i B[s]$ wtw istnieje $u \in U$ takie, że $M \models B[s(u/s_i)]$.

U jest zbiorem niepustym. Z (*) otrzymujemy:

Prawdziwość zdań a prawdziwość funkcji zdaniowych

$M \models \exists x_i B[s]$ wtw istnieje $u \in \mathbf{U}$ takie, że $M \models B[s'(u/s'_i)]$.

Z kolei na mocy definicji spełniania:

Istnieje $u \in \mathbf{U}$ takie, że $M \models B[s'(u/s'_i)]$ wtw $M \models \exists x_i B[s']$.

Zatem:

$M \models A[s]$ wtw $M \models A[s']$.

Rozważenie przypadków, w których A ma jedną z następujących postaci:

$$B \vee C$$

$$B \rightarrow C$$

$$B \leftrightarrow C$$

$$\forall x_i B$$

pozostawiam Państwu jako ćwiczenie :) ■

Prawdziwość zdań a prawdziwość funkcji zdaniowych

Zdaniem jest formuła zdaniowa, w której nie występują żadne zmienne wolne. Zatem gdy A jest zdaniem, to (dowolne) $\mathbf{M}$ -wartościowania nie różnią się na miejscach odpowiadających wskaźnikom zmiennych wolnych w A – bo w A w ogóle nie ma zmiennych wolnych! Tak więc wnioskiem z twierdzenia 4.1 jest:

Twierdzenie 4.2. *Jeżeli formuła zdaniowa A jest zdaniem, natomiast $\mathbf{s}$ i $\mathbf{s}'$ są dowolnymi $\mathbf{M}$ -wartościowaniami, to*

$$\mathbf{M} \models A[\mathbf{s}] \text{ wtw } \mathbf{M} \models A[\mathbf{s}'].$$

Prawdziwość zdań a prawdziwość funkcji zdaniowych

Można również udowodnić:

Twierdzenie 4.3. *Jeżeli formuła zdaniowa A jest zdaniem, to następujące warunki są równoważne:*

- (a) *istnieje M -wartościowanie s takie, że $M \models A[s]$,*
- (b) *dla każdego M -wartościowania s jest tak, że $M \models A[s]$.*

Dowód:

(a) $\Rightarrow$ (b). Z twierdzenia 4.2.

(b) $\Rightarrow$ (a). Ponieważ uniwersum każdej interpretacji M jest zbiorem niepustym, zawsze istnieje co najmniej jedno M -wartościowanie. Tak więc gdy zdanie A jest spełnione przy interpretacji M przez każde M -wartościowanie, to istnieje M -wartościowanie, które spełnia A przy interpretacji M . ■

Bezpośrednią konsekwencją twierdzenia 4.3. oraz definicji pojęcia *prawdziwości formuły przy interpretacji języka* jest:

Prawdziwość zdań a prawdziwość funkcji zdaniowych

Twierdzenie 4.4. *Jeżeli formuła zdaniowa A jest zdaniem, to:*

$M \models A$ wtw istnieje M -wartościowanie s takie, że $M \models A[s]$.

Komentarz: Pokazaliśmy, że dla prawdziwości zdania przy danej (dowolnej ale ustalonej) interpretacji M potrzeba i wystarcza, aby zdanie to było spełnione – przy interpretacji M – przez *jakieś* M -wartościowanie. Jest tak pomimo tego, że definicja prawdziwości wymaga spełniania przez wszystkie M -wartościowania. Dla funkcji zdaniowych wymóg spełniania przez wszystkie M -wartościowania pozostaje w mocy.

Prawdziwość zdań

Przykład 4.1. Weźmy język L^* , o którym mówiliśmy na poprzednim wykładzie. Język L^* jest językiem pierwszego rzędu, którego jedynymi stałymi pozalogicznymi są: predykat dwuargumentowy P , stałe indywidualowe a i b oraz symbol funkcyjny jednoargumentowy F . Rozważamy następującą interpretację $M_\#$ tego języka:

$$\langle \mathbf{N}, \Delta \rangle$$

gdzie $\mathbf{N}$ jest zbiorem liczb naturalnych, $\Delta(P)$ jest relacją $<$ mniejszości w $\mathbf{N}$, $\Delta(F)$ jest funkcją następnika S oraz:

$$- \Delta(a) = 2,$$

$$- \Delta(b) = 7.$$

Zanalizujmy zdanie:

$$(\odot) \quad P(a, b) \wedge \exists x_2 P(a, F(x_2)).$$

Intuicyjnie rzecz biorąc, zdanie to jest prawdziwe przy interpretacji $M_\#$ języka L^* wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$(\#) \quad 2 < 7 \text{ oraz istnieje } u \in \mathbf{N} \text{ takie, że } 2 < u + 1.$$

Analogiczny wniosek otrzymamy w semantyce teoriomodelowej.

Bezpośrednio z definicji prawdy (tj. definicji 2.2) dostajemy bowiem:

$$\mathbf{M}_{\#} \models P(a, b) \wedge \exists x_2 P(a, F(x_2)) \text{ wtw}$$

dla każdego $\mathbf{M}_{\#}$ -wartościowania $\mathbf{s}$: $\mathbf{M}_{\#} \models P(a, b) \wedge \exists x_2 P(a, F(x_2))[\mathbf{s}]$.

Rozważmy $\mathbf{M}_{\#}$ -wartościowanie $\mathbf{s}^* = \langle 1, 2, 3, \dots \rangle$. Ponieważ $(\odot)$ jest zdaniem, mocy twierdzenia 4.4 dostajemy:

$$\mathbf{M}_{\#} \models P(a, b) \wedge \exists x_2 P(a, F(x_2)) \text{ wtw } \mathbf{M}_{\#} \models P(a, b) \wedge \exists x_2 P(a, F(x_2))[\mathbf{s}^*]$$

Z kolei na mocy definicji spełniania:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\#} \models P(a, b) \wedge \exists x_2 P(a, F(x_2))[\mathbf{s}^*] \text{ wtw } \Delta(P)(a^{\mathbf{M}_{\#}}[\mathbf{s}^*], b^{\mathbf{M}_{\#}}[\mathbf{s}^*]) \text{ oraz} \\ \text{istnieje } u \in \mathbf{N} \text{ takie, że } \Delta(P)(a^{\mathbf{M}_{\#}}[\mathbf{s}^*(u/s_2)], F(x_2)^{\mathbf{M}_{\#}}[\mathbf{s}^*(u/s_2)]) \end{aligned}$$

Warunek po prawej stronie jest równoważny warunkowi:

$$(\#) \quad 2 < 7 \text{ oraz istnieje } u \in \mathbf{N} \text{ takie, że } 2 < u + 1.$$

Nawiasem mówiąc, do warunku $(\#)$ dojdziemy zawsze, tj. niezależnie od tego, jakie $\mathbf{M}_{\#}$ -wartościowanie weźmiemy pod uwagę. Zostawiam to Państwu jako ćwiczenie :)

Semantyczna zasada wyłączonego środka

Intuicja podpowiada nam, że gdy mamy do czynienia ze zdaniem, to albo to zdanie jest prawdziwe, albo jego negacja. W semantyce teorio-modelowej jest tak samo. Można udowodnić:

Twierdzenie 4.5. (*semantyczna zasada wyłączonego środka*) *Jeżeli A jest zdaniem języka pierwszego rzędu, a M jest interpretacją tego języka, to:*

$$M \models A \text{ lub } M \models \neg A.$$

Dowód: Jak wiadomo, zdanie o schemacie $p \vee q$ ma tę samą wartość logiczną, co zdanie o schemacie $\neg p \rightarrow q$. Wystarczy zatem udowodnić, iż:

jeśli nie jest tak, że $M \models A$, to jest tak, że $M \models \neg A$.

Metalogiczna zasada wyłączonego środka

Założmy, że nie jest tak, iż $M \models A$. Istnieje zatem M -wartościowanie s^* takie, że $M \text{ non} \models A [s^*]$. Z definicji spełniania dostajemy:

$$M \models \neg A[s^*].$$

Skoro A jest zdaniem, to $\neg A$ też jest zdaniem. Zatem na mocy twierdzenia 4.3 dostajemy:

$$\text{dla każdego } M\text{-wartościowania } s: M \models \neg A[s]$$

czyli

$$M \models \neg A.$$



Komentarz. To, że semantyczna zasada wyłączonego środka mówi o zdaniach, *jest istotne*. W przypadku funkcji zdaniowych sytuacja jest bardziej złożona: może się zdarzyć, że ani funkcja zdaniowa, ani jej negacja nie są prawdziwe przy interpretacji języka. Zilustrujmy to przykładem.

Metalogiczna zasada wyłączonego środka

Przykład 4.2. Rozważmy następujące funkcje zdaniowe języka L^* :

$$(\spadesuit) P(x_1, a)$$

$$(\clubsuit) \neg P(x_1, a)$$

oraz interpretację $M_\#$ tego języka określoną w poprzednim przykładzie.

Dla $(\spadesuit)$ mamy:

$$\begin{aligned} M_\# \models P(x_1, a) \text{ wtw dla każdego } M_\#\text{-wartościowania } \mathbf{s}, M_\# \models P(x_1, a)[\mathbf{s}] \text{ wtw} \\ \text{dla każdego } M_\#\text{-wartościowania } \mathbf{s}, \Delta(P)(s_1, 2) \text{ wtw} \\ (\spadesuit^\#) \quad \text{dla każdego } u \in \mathbf{N}: u < 2. \end{aligned}$$

Z kolei dla $(\clubsuit)$ dostajemy:

$$\begin{aligned} M_\# \models \neg P(x_1, a) \text{ wtw dla każdego } M_\#\text{-wartościowania } \mathbf{s}, M_\# \models \neg P(x_1, a)[\mathbf{s}] \text{ wtw} \\ \text{dla każdego } M_\#\text{-wartościowania } \mathbf{s}, M_\# \text{ non } \models P(x_1, a)[\mathbf{s}] \text{ wtw} \\ (\clubsuit^\#) \quad \text{dla każdego } u \in \mathbf{N}, u \geq 2. \end{aligned}$$

Z arytmetyki wiemy, że nie zachodzą ani $(\spadesuit^\#)$, ani $(\clubsuit^\#)$.

Funkcje zdaniowe:

(♠) $P(x_1, a)$

(♣) $\neg P(x_1, a)$

nie są przy interpretacji $\mathbf{M}_\#$ ani prawdziwe, ani fałszywe – są one natomiast spełnione przez pewne $\mathbf{M}_\#$ -wartościowania i nie są spełnione przez inne $\mathbf{M}_\#$ -wartościowania.

Definicja 4.1. *Formuła zdaniowa A jest **fałszywa przy interpretacji $\mathbf{M}$** wtw dla każdego $\mathbf{M}$ -wartościowania $\mathbf{s}$ zachodzi:*

(•) $\mathbf{M} \text{ non } \models A[\mathbf{s}]$.

W przypadku zdań fałszywość pokrywa się z brakiem prawdziwości. Wniośkiem z twierdzenia 4.3 jest:

Twierdzenie 4.5. *Zdanie A nie jest prawdziwe przy interpretacji $\mathbf{M}$ wtw zdanie A jest fałszywe przy interpretacji $\mathbf{M}$.*

Natomiast dla funkcji zdaniowych brak prawdziwości nie musi być tym samym, co fałszywość.

Semantyczna zasada sprzeczności

Notacja: To, że formuła zdaniowa A nie jest prawdziwa przy interpretacji $\mathbf{M}$, zapisujemy $\mathbf{M} \text{ non } \models A$.

Udowodnimy teraz:

Twierdzenie 3.6. (semantyczna zasada sprzeczności) Niech A będzie formułą zdaniową języka pierwszego rzędu. Nie istnieje interpretacja $\mathbf{M}$ tego języka taka, że zarówno $\mathbf{M} \models A$, jak i $\mathbf{M} \models \neg A$.

Dowód: Wystarczy udowodnić, że:

dla każdej interpretacji $\mathbf{M}$: $\mathbf{M} \text{ non } \models A$ lub $\mathbf{M} \text{ non } \models \neg A$

a w tym celu wystarczy pokazać, iż:

dla każdej interpretacji $\mathbf{M}$: jeśli $\mathbf{M} \models A$, to $\mathbf{M} \text{ non } \models \neg A$.

Niech $\mathbf{M}$ będzie dowolną ale ustaloną interpretacją. Załóżmy, że $\mathbf{M} \models A$. Weźmy dowolne $\mathbf{M}$ -wartościowanie $\mathbf{s}$. Z tego, że $\mathbf{M} \models A$, dostajemy $\mathbf{M} \models A[\mathbf{s}]$, skąd na mocy definicji spełniania wnosimy, iż $\mathbf{M} \text{ non } \models \neg A[\mathbf{s}]$. Tak więc $\mathbf{M} \text{ non } \models \neg A$. ■

Komentarz i podsumowanie

Komentarz: Semantyczna zasada sprzeczności dotyczy zarówno zdań, jak i funkcji zdaniowych. Jej treść intuicyjna jest następująca: nie może być tak, że formuła zdaniowa i jej negacja są jednocześnie prawdziwe przy danej interpretacji języka.

Podsumujmy dotychczasowe rozważania. Gdy mamy dowolną funkcję zdaniową A danego języka pierwszego rzędu i dowolną ale ustaloną interpretację M tego języka, to:

- A nie jest spełniona przez żadne M -wartościowanie – i wtedy A **jest fałszywa** przy interpretacji M , lub
- A jest spełniona przez co najmniej jedno M -wartościowanie, a ponadto:
 - A nie jest spełniona przez jakieś inne M -wartościowanie - i wtedy A **nie jest prawdziwa** przy interpretacji M i zarazem **nie jest fałszywa** przy interpretacji M albo
 - A jest także spełniona przez każde inne M -wartościowanie – a wtedy A **jest prawdziwa** przy interpretacji M .

Nie jest możliwe, aby zarówno A , jak i $\neg A$ były zarazem prawdziwe przy M . Odpowiednik semantycznej zasady wyłączonego środka nie obowiązuje.

Natomiast gdy mamy dowolne zdanie A , to:

- A jest spełnione przez jakieś M -wartościowanie - wówczas A jest spełnione przez każde M -wartościowanie, a zatem A **jest prawdziwe** przy M , lub
- A nie jest spełnione przez jakieś M -wartościowanie – wtedy A **nie jest prawdziwe** przy M i zarazem **jest fałszywe** przy M .

Co najmniej jedno ze zdań: A , $\neg A$ jest prawdziwe przy M (co gwarantuje semantyczna zasada wyłączonego środka), przy czym nie jest tak, że oba z nich są prawdziwe przy M (co jest wnioskiem z semantycznej zasady sprzeczności).
