Andrzej Wiśniewski
Logika II

Materiały do wykładu dla studentów kognitywistyki
2019/2020

Wprowadzenie do semantyki teoriomodelowej cz.4.
Tautologiczność

Zakładam, że pojęcia wprowadzone na poprzednich wykładach są znane :)

Niech ***L*** będzie dowolnym ale ustalonym językiem pierwszego rzędu.

Definicja 5.1. *Formuła zdaniowa A języka **L** jest* tautologią *wtw formuła zdaniowa A jest prawdziwa przy każdej interpretacji języka **L**.*

Wniosek 5.1. Formuła zdaniowa *A* jest tautologią wtw dla każdej interpretacji ***M*** (języka ***L***) oraz dla każdego ***M***-wartościowania **s** zachodzi:

$$\boldsymbol{M} \models A[\mathbf{s}].$$

Tautologiami są zatem formuły spełniane przez dowolne wartościowanie z uniwersum każdej interpretacji. Niejako „na drugim biegunie” znajdują się formuły zdaniowe, które są niespełnialne, tj. nie są spełnialne.

Definicja 5.2. *Formuła zdaniowa A języka **L** jest* spełnialna *wtw istnieją: interpretacja **M** języka **L** oraz **M**-wartościowanie **s** takie, że **M** ⊨ A[**s**]; w przeciwnym przypadku mówimy, że A jest* niespełnialna.

Ostrzeżenie!

O tautologiach mówiliśmy już przy okazji omawiania klasycznego rachunku zdań. Trzeba pamiętać, że wprowadzone wyżej pojęcie tautologii ma inną treść – mimo podobieństwa nazwy – niż pojęcie tautologii *KRZ*. Tym razem mówimy o tautologiach języka pierwszego rzędu.

Jednym z takich języków jest oczywiście język klasycznego rachunku predykatów, stąd definicja 5.1 charakteryzuje również pojęcie **tautologii *KRP***.

W dalszych rozważaniach mówiąc o formule lub formułach, będziemy mieć na myśli formuły zdaniowe dowolnego ale ustalonego języka pierwszego rzędu.

Twierdzenie 5.1. *Formuła A jest tautologią wtw formuła o postaci $\neg A$ jest niespełnialna.*

Dowód:

($\Rightarrow$) Załóżmy, że A jest tautologią. Przypuśćmy, że formuła o postaci $\neg A$ jest spełnialna. Istnieją zatem: interpretacja $\boldsymbol{M}$ oraz $\boldsymbol{M}$-wartościowanie $\mathbf{s}$ takie, że $\boldsymbol{M} \models \neg A[\mathbf{s}]$. Tak więc, na mocy definicji spełniania, $\boldsymbol{M}$ *non* $\models A[\mathbf{s}]$. Zatem A nie jest prawdą przy interpretacji $\boldsymbol{M}$, czyli A nie jest tautologią. Nasze przypuszczenie prowadzi do sprzeczności. Zatem $\neg A$ jest niespełnialna.

($\Leftarrow$) Jeśli formuła $\neg A$ jest niespełnialna, to dla każdej interpretacji $\boldsymbol{M}$ i każdego $\boldsymbol{M}$-wartościowania $\mathbf{s}$ mamy: $\boldsymbol{M}$ *non* $\models \neg A[\mathbf{s}]$. Korzystając z definicji spełniania, wnosimy stąd, że dla każdej interpretacji $\boldsymbol{M}$ i każdego $\mathbf{M}$-wartościowania $\mathbf{s}$ jest tak, że $\boldsymbol{M} \models A[\mathbf{s}]$. Formuła A jest więc prawdziwa przy każdej interpretacji, czyli jest ona tautologią.

Widzimy zatem, że aby wykazać, że dana formuła jest tautologią, wystarczy pokazać, że jej negacja jest niespełnialna. To z kolei najprościej jest zrobić poprzez pokazanie, że założenie o spełnialności negacji rozważanej formuły prowadzi – w oparciu o definicję spełniania i ewentualnie pewne inne fakty semantyczne – do sprzeczności.

Przykład 5.1. Dowolna formuła mająca postać $A \vee \neg A$ jest tautologią.

Załóżmy, że $\neg(A \vee \neg A)$ jest spełnialna. Istnieją wówczas: interpretacja $\boldsymbol{M}$ oraz wartościowanie $\mathbf{s}$ takie, że:

1. $\boldsymbol{M} \models \neg(A \vee \neg A)[\mathbf{s}]$.

Korzystając z definicji spełniania, dostajemy:

2. $\boldsymbol{M}$ *non* $\models (A \vee \neg A)[\mathbf{s}]$ (z uwagi na 1)
3. $\boldsymbol{M}$ *non* $\models A[\mathbf{s}]$ (z uwagi na 2)
4. $\boldsymbol{M}$ *non* $\models \neg A[\mathbf{s}]$ (z uwagi na 2)
5. $\boldsymbol{M} \models \neg A[\mathbf{s}]$ (z uwagi na 3)

sprzeczność: 4-5.

Przykład 5.2. Dowolna formuła mająca postać $(A \to B) \wedge A \to B$ jest tautologią.

1. $\boldsymbol{M} \models \neg((A \to B) \wedge A \to B)[\mathbf{s}]$ (dla pewnej interpretacji $\boldsymbol{M}$ i pewnego $\boldsymbol{M}$-wartościowania $\mathbf{s}$)
2. $\boldsymbol{M}$ *non* $\models ((A \to B) \wedge A \to B)[\mathbf{s}]$ (z uwagi na 1)
3. $\boldsymbol{M} \models ((A \to B) \wedge A)[\mathbf{s}]$ (z uwagi na 2)
4. $\boldsymbol{M}$ *non* $\models B[\mathbf{s}]$ (z uwagi na 2)
5. $\boldsymbol{M} \models (A \to B)[\mathbf{s}]$ (z uwagi na 3)
6. $\boldsymbol{M} \models A[\mathbf{s}]$ (z uwagi na 3)

7.1. $\boldsymbol{M}$ *non* $\models A[\mathbf{s}]$
sprz.: 7.1 – 6.

7.2. $\boldsymbol{M} \models B[\mathbf{s}]$ (z uwagi na 5)
sprz.: 7.2 – 4

Przykład 5.3. Każda formuła mająca postać $\forall x_i\, A \to A[x_i/\tau]$, gdzie term τ jest podstawialny za x_i *do A,* jest tautologią*.*

Tym razem, oprócz definicji spełniania, skorzystamy również z pewnego twierdzenia, którego dowód można znaleźć w każdym średniozaawansowanym podręczniku logiki:

> Twierdzenie 5.2. *Jeżeli τ jest termem podstawialnym za zmienną x_i do A oraz* **s** *i* **s'** *są* ***M****-wartościowaniami takimi, że* **s'** $= \langle s_1, \ldots, s_{i-1}, \tau^{\boldsymbol{M}}[\mathbf{s}], s_{i+1}, \ldots\rangle$, *to*
>
> $$\boldsymbol{M} \models A[x_i/\tau][\mathbf{s}] \text{ wtw } \boldsymbol{M} \models A[\mathbf{s'}].$$

1. $\boldsymbol{M} \models \neg(\forall x_i\, A \to A[x_i/\tau])[\mathbf{s}]$ (dla pewnej interpretacji ***M*** i pewnego ***M***-wartościowania **s**)
2. $\boldsymbol{M}$ *non* $\models (\forall x_i\, A \to A[x_i/\tau])[\mathbf{s}]$ (z uwagi na 1)
3. $\boldsymbol{M} \models \forall x_i\, A[\mathbf{s}]$ (z uwagi na 2)
4. $\boldsymbol{M}$ *non* $\models A[x_i/\tau][\mathbf{s}]$ (z uwagi na 2)
5. $\boldsymbol{M} \models A[\mathbf{s}(\tau^{\boldsymbol{M}}[\mathbf{s}]/s_i)]$ (z uwagi na 3)

5*. $\boldsymbol{M} \models A[\mathbf{s'}]$ (bo $\mathbf{s}(\tau^{\boldsymbol{M}}[\mathbf{s}]/s_i)$ ma cechy ciągu **s'**, o którym mówi założenie twierdzenia 5.2)

6. $\boldsymbol{M} \models A[x_i/\tau][\mathbf{s}]$ (z uwagi na 5/5* i twierdzenie 5.2)

sprz.: 4-6.

Podobnie jak w przypadku klasycznego rachunku zdań, rozumowania powyższego typu można „usystematyzować”, charakteryzując metodę tabel analitycznych dla klasycznego rachunku predykatów. Pewien system tabelowy dla KRP przedstawiam w "Dodatku".

Dodatek: Metoda tabel analitycznych dla KRP

Naszkicuję tu jeden z wariantów metody tabel analitycznych dla KRP.

Dla uproszczenia, rozważamy KRP sformułowany w języku bez symboli funkcyjnych.

Z powodów "technicznych" do alfabetu dodajemy przeliczalnie nieskończenie wiele *parametrów*: b, b_1, b_2, ... Patrząc od strony syntaktycznej, parametry zachowują się tak jak stałe indywiduowe. Nie wprowadzamy oznaczeń prawdziwościowych.

*Termami** rozważanego języka są wszystkie zmienne indywiduowe, wszystkie stałe indywiduowe oraz wszystkie parametry.

c, c_1, c_2, ... to metajęzykowe zmienne przebiegające zbiór termów*.

Mamy reguły dla spójników (takie same jak w klasycznym rachunku zdań) oraz reguły dla kwantyfikatorów.

Reguły dla spójników

$R_{\neg\neg}$:

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

$R_{\wedge}$: $\dfrac{A \wedge B}{A \quad B}$	**$R_{\neg\wedge}$:** $\dfrac{\neg(A \wedge B)}{\neg A \mid \neg B}$	**$R_{\vee}$:** $\dfrac{A \vee B}{A \mid B}$	**$R_{\neg\vee}$:** $\dfrac{\neg(A \vee B)}{\neg A \quad \neg B}$
$R_{\rightarrow}$: $\dfrac{A \rightarrow B}{\neg A \mid B}$	**$R_{\neg\rightarrow}$:** $\dfrac{\neg(A \rightarrow B)}{A \quad \neg B}$	**$R_{\leftrightarrow}$:** $\dfrac{A \leftrightarrow B}{A,\ B \mid \neg A,\ \neg B}$	**$R_{\neg\leftrightarrow}$:** $\dfrac{\neg(A \leftrightarrow B)}{A,\ \neg B \mid \neg A,\ B}$

$R_{\neg\forall}$:

$$\frac{\neg\forall x_i A}{\exists x_i \neg A}$$

$R_{\forall}$:

$$\frac{\forall x_i A}{A[x_i/c]}$$

gdzie c jest *dowolnym* termem* podstawialnym za x_i do A.

$R_{\neg\exists}$:

$$\frac{\neg\exists x_i A}{\forall x_i \neg A}$$

$R_{\exists}$:

$$\frac{\exists x_i A}{A[x_i/c]}$$

gdzie c jest *nowym*[1] termem*

[1] Tj. term* *c* nie występuje "wyżej" na gałęzi drzewa/dowodu, na której właśnie stosujemy regułę **$R_{\exists}$.**

Dowód formuły *A* ma postać (skończonego) drzewa, w którego korzeniu występuje negacja formuły *A*, tj. formuła postaci $\neg A$, kolejne formuły występujące na gałęziach drzewa są wprowadzane za pomocą przedstawionych wyżej reguł, oraz każda gałąź tego drzewa jest *zamknięta*, tj. występuje na niej formuła i jej negacja.

Można pokazać, że gdy formuła *A* (rozważanego tu) języka KRP ma tak rozumiany dowód, to formuła *A* jest tautologią.

Uwaga: Ściśle rzecz biorąc, formuły, w których występują parametry, nie są formułami zdaniowymi języka KRP. Dowody budujemy dla formuł "wyjściowych", w których *nie* występują parametry; w dowodach mogą jednak pojawiać się formuły zawierające parametry.

Uwaga: Podane tu określenia nie są, rzecz jasna, ścisłe. W odwiecznej wojnie między precyzją a przystępnością tym razem opowiedziałem się po stronie przystępności :)

Przykład 5.4a. Formuła:

$$\exists x_1(P_1^{\,1}(x_1) \wedge P_2^{\,1}(x_1)) \to \exists x_1 P_1^{\,1}(x_1) \wedge \exists x_1 P_2^{\,1}(x_1)$$

jest tautologią.

$$
\begin{array}{c}
\neg(\exists x_1(P_1^{\,1}(x_1) \wedge P_2^{\,1}(x_1)) \to \exists x_1 P_1^{\,1}(x_1) \wedge \exists x_1 P_2^{\,1}(x_1)) \\
\exists x_1(P_1^{\,1}(x_1) \wedge P_2^{\,1}(x_1)) \\
\neg(\exists x_1 P_1^{\,1}(x_1) \wedge \exists x_1 P_2^{\,1}(x_1)) \\
P_1^{\,1}(b) \wedge P_2^{\,1}(b) \\
P_1^{\,1}(b) \\
P_2^{\,1}(b) \\
/ \qquad \backslash \\
\begin{array}{cc}
\neg\exists x_1 P_1^{\,1}(x_1) & \neg\exists x_1 P_2^{\,1}(x_1) \\
\forall x_1 \neg P_1^{\,1}(x_1) & \forall x_1 \neg P_2^{\,1}(x_1) \\
\neg P_1^{\,1}(b) & \neg P_2^{\,1}(b)
\end{array}
\end{array}
$$

Przykład 5.4a (jeszcze raz). Formuła:

$$\exists x_1(P_1^{\,1}(x_1) \wedge P_2^{\,1}(x_1)) \rightarrow \exists x_1 P_1^{\,1}(x_1) \wedge \exists x_1 P_2^{\,1}(x_1)$$

jest tautologią.

$$\neg(\exists x_1(P_1^{\,1}(x_1) \wedge P_2^{\,1}(x_1)) \rightarrow \exists x_1 P_1^{\,1}(x_1) \wedge \exists x_1 P_2^{\,1}(x_1))$$
$$\exists x_1(P_1^{\,1}(x_1) \wedge P_2^{\,1}(x_1))$$
$$\neg(\exists x_1 P_1^{\,1}(x_1) \wedge \exists x_1 P_2^{\,1}(x_1))$$
$$P_1^{\,1}(b) \wedge P_2^{\,1}(b)$$
$$P_1^{\,1}(b)$$
$$P_2^{\,1}(b)$$

$$\begin{array}{ccc} & / \quad \backslash & \\ \neg\exists x_1 P_1^{\,1}(x_1) & & \neg\exists x_1 P_2^{\,1}(x_1) \\ \forall x_1 \neg P_1^{\,1}(x_1) & & \forall x_1 \neg P_2^{\,1}(x_1) \\ \neg P_1^{\,1}(b) & & \neg P_2^{\,1}(b) \end{array}$$

Przykład 5.4b. Każda formuła o postaci:

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$$

gdzie P, Q są predykatami jednoargumentowymi, a x jest zmienną indywiduową, jest tautologią:

$$\neg(\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x))$$
$$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$$
$$\neg(\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x))$$
$$P(b) \wedge Q(b)$$
$$P(b)$$
$$Q(b)$$
$$/ \qquad \backslash$$

$$\begin{array}{cc} \neg\exists x P(x) & \neg\exists x Q(x) \\ \forall x \neg P(x) & \forall x \neg Q(x) \\ \neg P(b) & \neg Q(b) \end{array}$$

Przykład 5.4c. Każda formuła o postaci:

$$\exists x_i(A \wedge B) \rightarrow \exists x_i A \wedge \exists x_i B$$

jest tautologią.

$$\neg(\exists x_i(A \wedge B) \rightarrow \exists x_i A \wedge \exists x_i B)$$
$$\exists x_i(A \wedge B)$$
$$\neg(\exists x_i A \wedge \exists x_i B)$$
$$(A \wedge B)[x_i/b]$$
$$A[x_i/b]$$
$$B[x_i/b]$$

$$\begin{array}{cc} / & \backslash \\ \neg\exists x_i A & \neg\exists x_i B \\ \forall x_i \neg A & \forall x_i \neg B \\ \neg A(x_i/b) & \neg B(x_i/b) \end{array}$$

Przykład 5.5: Każda formuła o postaci:

$$\forall x_i A \to A[x_i/\tau]$$

gdzie τ jest termem podstawialnym za zmienną x_i do A, jest tautologią.

$$\neg(\forall x_i A \to A[x_i/\tau])$$
$$\forall x_i A$$
$$\neg A[x_i/\tau]$$
$$A[x_i/\tau]$$

Przykład 5.6: Każda formuła o postaci:

$$\forall x_i(A \to B) \land A[x_i/\tau] \to B[x_i/\tau]$$

gdzie τ jest termem podstawialnym za x_i do A oraz do B, jest tautologią.

$$\neg(\forall x_i(A \to B) \land A[x_i/\tau] \to B[x_i/\tau]))$$
$$\forall x_i(A \to B) \land A[x_i/\tau]$$
$$\neg B[x_i/\tau])$$
$$\forall x_i(A \to B)$$
$$A[x_i/\tau]$$
$$(A \to B)[x_i/\tau]$$
$$/ \qquad\qquad \backslash$$
$$\neg A[x_i/\tau] \qquad\qquad B[x_i/\tau]$$

Przykład 5.7: Dla uproszczenia, zapiszmy predykat P_1^2 jako R, a zmienne x_1 i x_2 jako, odpowiednio, x i y. Formuła:

$$\exists y \forall x\, R(x, y) \rightarrow \forall x \exists y\, R(x, y)$$

jest tautologią.

$$\neg(\exists y \forall x\, R(x, y) \rightarrow \forall x \exists y\, R(x, y))$$
$$\exists y \forall x\, R(x, y)$$
$$\neg \forall x \exists y\, R(x, y)$$
$$\forall x\, R(x, b)$$
$$\exists x \neg \exists y\, R(x, y)$$
$$\neg \exists y\, R(b_1, y)$$
$$\forall y\, \neg R(b_1, y)$$
$$R(b_1, b)$$
$$\neg R(b_1, b)$$

Przykład 5.8: Przyjmujemy notację z poprzedniego przykładu. Budujemy tabelę analityczną dla formuły $\forall x \exists y\, R(x, y) \to \exists y \forall x\, R(x, y)$:

$$\neg(\forall x \exists y\, R(x, y) \to \exists y \forall x\, R(x, \mathrm{y}))$$
$$\forall x \exists y\, R(x, y)$$
$$\neg \exists y \forall x\, R(x, y)$$
$$\forall y \neg \forall x\, R(x, y)$$
$$\exists y\, R(b_1, y)$$
$$R(b_1, b_2)$$
$$\neg \forall x\, R(x, b_2)$$
$$\exists x\, \neg R(x, b_2)$$
$$\neg R(b_3, b_2)$$
$$\exists y\, R(b_3, y)$$
$$R(b_3, b_4)$$
$$\neg \forall x\, R(x, b_4)$$
$$\exists x \neg R(x, b_4)$$
$$\neg R(b_5, b_4)$$
$$.....$$

Dopuszczalne jest budowanie drzew nieskończonych. Metoda tabel analitycznych dla KRP nie jest uniwersalną metodą rozstrzygania, **czy** dowolna formuła jest tautologią KRP.

Jednakże można pokazać, że gry formuła jest tautologią KRP, to posiada ona co najmniej jeden dowód metodą tabel analitycznych.