Andrzej Wiśniewski

Logika II

Materiały do wykładu dla studentów kognitywistyki
2019/2020

Wprowadzenie do semantyki teoriomodelowej cz.6.
Adekwatność systemu aksjomatycznego KRP.
Operacje konsekwencji
a transmisja prawdziwości.

Rozważmy ponownie system aksjomatyczny klasycznego rachunku predykatów scharakteryzowany na wykładach z „Logiki I”. Mówiąc dalej o systemie aksjomatycznym KRP, będę miał na myśli ten system; podobnie dla aksjomatów oraz reguł inferencyjnych.

Wprowadzając pojęcie tautologii, dokonujemy **semantycznej** charakterystyki pojęcia *prawa klasycznego rachunku predykatów* („czystego” i „stosowanego”). Można udowodnić, że:

I. Każda teza jest tautologią (adekwatność).

II. Każda tautologia jest tezą (pełność).

Pojęcia „tezy” oraz „tautologii” mają w przypadku rozważanego systemu aksjomatycznego ten sam zakres, chociaż niewątpliwie mają one różną treść.

Zagadnieniem pełności zajmiemy się na jednym z kolejnych wykładów. Teraz poruszymy tylko problem adekwatności.

Twierdzenie 6.1. *Wszystkie aksjomaty KRP są tautologiami*.

Szkic dowodu: Charakteryzując aksjomaty KRP, dla wygody przyjeliśmy, że aksjomatem jest każda formuła zdaniowa języka KRP, którą można otrzymać z jakiejś tautologii/tezy klasycznego rachunku zdań poprzez konsekwentne zastąpienie zmiennych zdaniowych formułami zdaniowymi języka KRP. Można jednak postąpić inaczej, przyjmując, że aksjomatami KRP są tylko te formuły zdaniowe języka KRP, które można otrzymać z *aksjomatów* klasycznego rachunku zdań poprzez konsekwentne zastąpienie zmiennych zdaniowych formułami języka KRP. W szczególności, można tu użyć aksjomatów systemu klasycznego rachunku zdań przedstawionego na wykładzie z "Logiki I". Zróbmy tak właśnie i oznaczmy ten "nowy" zbiór aksjomatów przez ***Arp****. Dowód twierdzenia 6.1 przebiega teraz następująco:

(1) wykazujemy, że wszystkie formuły z ***Arp**** są tautologiami. Jest to o tyle łatwe, że dowolna formuła ze zbioru ***Arp**** podpada pod jeden z czternastu schematów.

(2) rozważamy zbiór tych "starych" aksjomatów, które nie są "nowymi" aksjomatami, tj. zbiór ***Arp*** / ***Arp****. Pokazujemy, że każdą formułe z tego zbioru można wyprowadzić ze zbioru ***Arp**** poprzez stosowanie reguły odrywania (oraz pseudo-podstawienia).

(3) wykazujemy, że reguła odrywania "zachowuje tautologiczność", tj. gdy ją zastosujemy do tautologii, otrzymamy tautologię. ■

Transmisja prawdziwości i transmisja tautologiczności

Jak zobaczymy, wszystkie pierwotne reguły inferencyjne rozważanego systemu aksjomatycznego KRP „prowadzą” od tautologii do tautologii, tak więc budując dowody w tym systemie, nie wykraczamy poza zbiór tautologii.

Aby to pokazać, wykażemy najpierw, że pierwotne reguły inferencyjne KRP gwarantują „transmisję prawdziwości” (od przesłanki/ przesłanek do wniosku).

Rozważmy na początek regułę odrywania.

Lemat 6.1. *Niech* ***M*** *będzie dowolną ale ustaloną interpretacją. Jeżeli* $\boldsymbol{M} \models (A \rightarrow B)$ *oraz* $\boldsymbol{M} \models A$, *to* $\boldsymbol{M} \models B$.

Dowód: Załóżmy, że $\boldsymbol{M} \models (A \rightarrow B)$ oraz $\boldsymbol{M} \models A$. Przypuśćmy, że $\boldsymbol{M}$ *non* $\models B$. Wówczas istnieje ***M***-wartościowanie, **s**, takie, że $\boldsymbol{M}$ *non* $\models B[\mathbf{s}]$. Na mocy założenia (i definicji prawdy) mamy jednak $\boldsymbol{M} \models (A \rightarrow B)[\mathbf{s}]$. Zatem, korzystając z definicji spełniania, $\boldsymbol{M}$ *non* $\models A[\mathbf{s}]$. Wnosimy stąd, że $\boldsymbol{M}$ *non* $\models A$. Otrzymaliśmy sprzeczność. ■

Tak więc zastosowanie *reguły odrywania* do prawdziwych (przy danej interpretacji języka) przesłanek prowadzi do prawdziwego (przy rozważanej interpretacji języka) wniosku.

Reguły inferencyjne KRP a transmisja prawdziwości

Pozostałe pierwotne reguły inferencyjne *KRP* operują na przesłankach będących pojedynczymi formułami.

Lemat 6.2. *Niech* $\boldsymbol{M} = \langle \mathbf{U}, \Delta \rangle$ *będzie dowolną ale ustaloną interpretacją. Załóżmy, że formuła D powstaje z formuły C poprzez zastosowanie jednej z pierwotnych reguł inferencyjnych KRP. Wówczas jeśli* $\boldsymbol{M} \models C$, *to* $\boldsymbol{M} \models D$.

Szkic dowodu: Rozważymy tylko dwa przypadki: zastosowanie reguły dołączania dużego kwantyfikatora oraz zastosowanie reguły opuszczania małego kwantyfikatora.

(i) reguła dołączania dużego kwantyfikatora:

$$\frac{A \rightarrow B}{A \rightarrow \forall x_i B} \quad \textit{o ile } x_i \textit{ nie jest wolne w } A$$

Załóżmy, że: $\boldsymbol{M} \models (A \rightarrow B)$, x_i nie jest wolne w A i $\boldsymbol{M}\ non \models (A \rightarrow \forall x_i B)$.

Skoro $\boldsymbol{M}\ non \models (A \rightarrow \forall x_i B)$, to istnieje $\boldsymbol{M}$-wartościowanie, $\mathbf{s}$, takie, że:

1. $\boldsymbol{M}\ non \models (A \rightarrow \forall x_i B)[\mathbf{s}]$

skąd wnosimy, iż:

2. $\boldsymbol{M} \models A[\mathbf{s}]$,

3. $\boldsymbol{M}\ non \models \forall x_i B[\mathbf{s}]$

Z (3) i definicji spełniania dostajemy:

4. *istnieje* $u \in \mathbf{U}$ *takie, że* $\boldsymbol{M}\ non \models B[\mathbf{s}(u/s_i)]$

$\boldsymbol{M}$-wartościowania $\mathbf{s}$ i $\mathbf{s}(u/s_i)$ różnią się co najwyżej i-tymi wyrazami. Z drugiej strony, zmienna x_i nie jest wolna w A. Zatem $\mathbf{s}$ i $\mathbf{s}(u/s_i)$ nie różnią się na miejscach odpowiadających wskaźnikom zmiennych wolnych występujących w formule A. Ponieważ zachodzi:

Twierdzenie 4.1. *Jeżeli* **s** *i* **s'** *są* ***M****-wartościowaniami nie różniącymi się na miejscach odpowiadających wskaźnikom zmiennych wolnych formuły zdaniowej A, to* $\boldsymbol{M} \models A[\mathbf{s}]$ *wtw* $\boldsymbol{M} \models A[\mathbf{s'}]$.

zatem z tego, iż $\boldsymbol{M} \models A[\mathbf{s}]$ wnosimy – na mocy twierdzenia 4.1 – że:

5. $\boldsymbol{M} \models A[\mathbf{s}(u/s_i)]$.

Jednocześnie mamy:

6. $\boldsymbol{M}$ *non* $\models B[\mathbf{s}(u/s_i)]$

Tak więc:

$$\boldsymbol{M} \text{ non } \models (A \rightarrow B)[\mathbf{s}(u/s_i)]$$

czyli

$$\boldsymbol{M} \text{ non } \models (A \rightarrow B).$$

Otrzymaliśmy sprzeczność z wyjściowym założeniem – co kończy dowód rozważanego przypadku.

(ii) reguła opuszczania małego kwantyfikatora:

$$\frac{\exists x_i\, A \rightarrow B}{A \rightarrow B}$$

Wystarczy pokazać, że gdy $\boldsymbol{M}$ *non* $\models (A \rightarrow B)$, to $\boldsymbol{M}$ *non* $\models (\exists x_i\, A \rightarrow B)$.
Załóżmy, że:

1. $\boldsymbol{M}$ *non* $\models (A \rightarrow B)$.

Istnieje wówczas $\boldsymbol{M}$-wartościowanie, **s**, takie, że:

2. $\boldsymbol{M} \models A[\mathbf{s}]$,
3. $\boldsymbol{M}$ *non* $\models B[\mathbf{s}]$.

Niech $u = s_i$. Z (2) wnosimy:

4. *istnieje* $u \in \mathbf{U}$ *takie, że* $\boldsymbol{M} \models A[\mathbf{s}(u/s_i)]$

co na mocy definicji spełniania daje:

5. $\boldsymbol{M} \models \exists x_i\, A[\mathbf{s}]$.

Tak więc z uwagi na (3) i (5) dostajemy:

6. $\boldsymbol{M}\ \mathit{non} \models (\exists x_i\, A \rightarrow B)[\mathbf{s}]$

a stąd na mocy definicji prawdy:

7. $\boldsymbol{M}\ \mathit{non} \models (\exists x_i\, A \rightarrow B)$

co kończy dowód rozważanego przypadku.

Rozważenie pozostałych reguł inferencyjnych pozostawiam Państwu jako ćwiczenie. Wspomnę tylko, że w przypadku reguły podstawiania należy skorzystać z twierdzenia 5.2.

■

Reguły inferencyjne KRP a transmisja tautologiczności

Jak dotąd mówiliśmy o „transmisji prawdziwości” – i do tego wątku jeszcze wrócimy. Tautologiczność jest własnością dużo silniejszą niż prawdziwość: jest prawdziwością przy każdej interpretacji języka. Powstaje zatem pytanie, czy reguły inferencyjne *KRP* gwarantują również „dziedziczenie tautologiczności”. Odpowiedź jest pozytywna. Zachodzi:

Twierdzenie 6.2. *Jeżeli formuła A powstaje z pewnej formuły lub formuł będącej/będących tautologiami za pomocą pierwotnych reguł inferencyjnych KRP, to formuła A też jest tautologią.*

Szkic dowodu: Wystarczy zauważyć, że lematy 6.1 i 6.2 mówią o „transmisji prawdziwości” przy *dowolnej* interpretacji języka. Jeśli zatem przesłanki są prawdziwe przy każdej interpretacji języka, taką samą własność musi mieć wniosek. ■

Wnioskiem z dotychczasowych rozważań jest:

Twierdzenie 6.3. *Każda teza KRP jest tautologią*.

Dowód: Jeśli formuła zdaniowa A jest tezą KRP, to istnieje co najmniej jeden dowód formuły A w oparciu o aksjomaty KRP. Niech $<D_1, ..., D_n>$ będzie takim dowodem. Rzecz jasna, $D_n = A$.

Przez indukcję pokażemy, że każda z formuł $D_1, ..., D_n$ jest tautologią.

(1) D_1 jest tautologią, ponieważ D_1 jest z pewnością aksjomatem KRP, a aksjomaty KRP są tautologiami (por. twierdzenie 6.1).

(2) <u>Założenie indukcyjne</u>: Jeśli $D_1, ..., D_j$ są tautologiami, to D_{j+1} jest tautologią, gdzie $1 \leq j < n$.

Mamy dwie możliwości:

(a) D_{j+1} jest aksjomatem KRP.

(b) D_{j+1} powstaje z jakichś formuł czy formuły będących wyrazami ciągu $<D_1, ..., D_j>$ poprzez zastosowanie (pierwotnej) reguły inferencyjnej KRP.

Dowód twierdzenia 6.3 c.d.

W przypadku (a) korzystamy z twierdzenia 6.1, natomiast w przypadku (b) korzystamy z twierdzenia 6.2.

Skoro każda z formuł D_1, ..., D_n jest tautologią, a $D_n = A$, to formuła A jest tautologią. Czego należało dowieść.

Jak już wspomniałem, zachodzi też twierdzenie odwrotne do twierdzenia 6.3: *jest tak, że każda tautologia jest tezą KRP*. Jego dowód jest znacznie bardziej skomplikowany; wrócimy jeszcze do tej kwestii.

Przypomnijmy:

Definicja 1.1. Derywacją formuły zdaniowej *A* w oparciu o zbiór formuł zdaniowych *X* *nazywamy skończony ciąg formuł zdaniowych, którego ostatnim wyrazem jest formuła A, taki, że dowolna formuła zdaniowa będąca wyrazem tego ciągu:*

(1) *należy do zbioru X, lub*

(2) *powstaje z jakiegoś wcześniejszego wyrazu rozważanego ciągu poprzez zastosowanie:*

- *reguły podstawiania* RP*, lub*
- *reguły opuszczania dużego kwantyfikatora* O∀*, lub*
- *reguły dołączania dużego kwantyfikatora* D∀*, lub*
- *reguły opuszczania małego kwantyfikatora* O∃*, lub*
- *reguły dołączania małego kwantyfikatora* D∃*, lub*

(3) *powstaje z jakichś wcześniejszych wyrazów tego ciągu poprzez zastosowania reguły odrywania* RO.

„Derywacja *A* w oparciu o *X*” to inaczej „wyprowadzenie *A* z *X*” .

Derywacje w KRP a transmisja prawdziwości

Korzystając z lematów 6.1 i 6.2 dostajemy:

Twierdzenie 6.5. *Jeśli formuła zdaniowa A jest wnioskiem derywacji w oparciu o zbiór formuł zdaniowych X, a **M** jest interpretacją, przy której wszystkie formuły należące do zbioru X są prawdziwe, to formuła A jest prawdziwa przy interpretacji **M**.*

Tak więc wyprowadzanie/derywowanie w oparciu o formuł prawdziwych przy danej interpretacji prowadzi do formuły/wniosku który jest prawdziwy przy tej interpretacji.

Uwaga: Pamiętajmy, że w definicji pojęcia derywacji *nie zakładamy*, że musi być ona oparta o przesłanki będące prawdami. Tak więc, patrząc z pragmatycznego punktu widzenia, wyprowadzenie formuły ze zbioru formuł nie jest tym samym, co wykazanie prawdziwości wyprowadzonej formuły!

Operacja **Cn** *a transmisja prawdziwości*

Przypomnijmy:

Definicja 1.2. *$A \in$* **Cn**(*X*) *wtw istnieje przynajmniej jedna derywacja formuły A w oparciu o zbiór formuł X*.

Oznaczmy symbolem **Vr**(***M***) zbiór wszystkich formuł zdaniowych rozważanego języka, które są prawdziwe przy interpretacji ***M*** tego języka. Z twierdzenia 6.5. dostajemy:

Wniosek 6.1: *Dla dowolnej interpretacji **M**: jeżeli $A \in$* **Cn**(*X*) *oraz $X \subseteq$* **Vr**(***M***), *to $A \in$* **Vr**(***M***).

Treść wniosku 6.1 możemy wyrazić następująco:

operacja konsekwencji **Cn** *nie wyprowadza poza zbiór formuł prawdziwych (przy danej interpretacji języka).*

Uwaga 6.1: Z wniosku 6.1 nie wynika, że *X* składa się z prawd przy interpretacji ***M***. Wniosek ten stwierdza tylko, że jeśli jest tak właśnie, to *A* jest prawdą przy ***M***.

Przypomnijmy:

Definicja 1.3. $A \in \mathbf{Cn_L}(X)$ *wtw* $A \in \mathbf{Cn}(X \cup \mathbf{Arp})$.

Twierdzenie 1.5. $A \in \mathbf{Cn_L}(X)$ *wtw* $A \in \mathbf{Cn}(X \cup \mathbf{Trp})$.

(**Arp** to zbiór wszystkich aksjomatów KRP, a **Trp** to zbiór wszystkich tez KRP).
Zachodzi:

Twierdzenie 6.6. *Jeżeli* $A \in \mathbf{Cn_L}(X)$ *oraz* $X \subseteq \mathbf{Vr}(\boldsymbol{M})$, *to* $A \in \mathbf{Vr}(\boldsymbol{M})$.

Dowód: Jeśli $A \in \mathbf{Cn_L}(X)$, to, na mocy twierdzenia 1.5, $A \in \mathbf{Cn}(X \cup \mathbf{Trp})$.
Z założenia mamy $X \subseteq \mathbf{Vr}(\boldsymbol{M})$, natomiast na mocy twierdzenia 6.3 (i definicji tautologii) jest tak, że $\mathbf{Trp} \subseteq \mathbf{Vr}(\boldsymbol{M})$. Zatem $(X \cup \mathbf{Trp}) \subseteq \mathbf{Vr}(\boldsymbol{M})$. Skoro jednak $A \in \mathbf{Cn}(X \cup \mathbf{Trp})$, to - z uwagi na wniosek 6.1 - $A \in \mathbf{Vr}(\boldsymbol{M})$. ■

Treść intuicyjną twierdzenia 6.6. wyraża fraza:

operacja konsekwencji logicznej $\mathbf{Cn_L}$ *nie wyprowadza poza zbiór formuł prawdziwych (przy danej interpretacji języka).*

Uwaga 6.2: Analogiczna jak uwaga 6.1 :)

Syntaktyczne i semantyczne pojęcia konsekwencji logicznej

Pojęcia derywacji, dowodu, konsekwencji i konsekwencji logicznej to pojęcia *syntaktyczne*. Syntaktyczny charakter ma też pojęcie tezy *KRP*. Jak już wspomnieliśmy, semantycznym „odpowiednikiem” pojęcia tezy *KRP* jest pojęcie tautologii. Natomiast semantycznym odpowiednikiem konsekwencji logicznej jest wynikanie logiczne.

O czym na następnym wykładzie.