Andrzej Wiśniewski

# Logika II

Materiały do wykładu dla studentów kognitywistyki

2019/2020

## Wykład 8. Wprowadzenie do semantyki teoriomodelowej cz.7. Modele i pełność

Jak zwykle zakładam, że pojęcia wprowadzone na poprzednich wykładach są znane, i podobnie dla notacji :) Dalej mówimy o językach pierwszego rzędu i ich semantyce teoriomodelowej.

Wprowadźmy na początek pojęcie *modelu* zbioru formuł zdaniowych:

Definicja 8.1. Modelem semantycznym *zbioru formuł zdaniowych $X$ nazywamy każdą interpretację* $\boldsymbol{M}$ *(języka, w którym formuły te są napisane) taką, że* $X \subseteq \mathbf{Vr}(\boldsymbol{M})$.

Modelem zbioru formuł $X$ jest zatem każda taka interpretacja odpowiedniego języka, przy której **wszystkie** formuły w $X$-ie są prawdziwe.

Zauważmy, że to interpretacje są modelami zbiorów formuł, a nie zbiory formuł są modelami czegokolwiek :) Dalej zamiast o modelach semantycznych będziemy mówić po prostu o modelach.

To, że interpretacja $\boldsymbol{M}$ jest modelem zbioru formuł $X$, zapisujemy:

$$\boldsymbol{M} \models X.$$

Korzystając z pojęcia modelu, można w zwięzły sposób zdefiniować pojęcie wynikania logicznego, przy czym taka definicja będzie równoważna poprzednio podanej (tj. definicji 7.1). Potrzebujemy jednak pojęcia pomocniczego. Otóż nazwijmy *modelem formuły zdaniowej A* model zbioru jednostkowego {*A*} (tj. zbioru, którego jedynym elementem jest formułą *A*. Modelem formuły zdaniowej będzie zatem każda interpretacja języka (w którym wyrażona została formuła *A*) taka, że *A* jest prawdą przy tej interpretacji.

Zauważmy, że warunek:

(#*) *każdy model zbioru X jest modelem formuły A*

wyraża to samo, co warunek:

*(#) dla każdej interpretacji **M** języka **L**: jeżeli wszystkie formuły ze zbioru X są prawdziwe przy interpretacji **M**, to również formuła A jest prawdziwa przy interpretacji **M**.*

"Alternatywna" definicja wynikania wygląda zatem następująco:

Definicja 7.1*. *Formuła zdaniowa A języka pierwszego rzędu **L** wynika logicznie ze zbioru formuł zdaniowych X języka **L** wtw każdy model zbioru X jest modelem formuły A.*

Zanim pójdziemy dalej, przypomnijmy:

Definicja 7.2. *Zbiór formuł zdaniowych X języka* **L** *nazywamy* semantycznie sprzecznym *wtw nie istnieje interpretacja języka* **L,** *przy której wszystkie formuły należące do zbioru X są [jednocześnie] prawdziwe.*

Zbiór semantycznie niesprzeczny to oczywiście taki, który nie jest semantycznie sprzeczny. Oczywistym wnioskiem z definicji 7.2 i 8.1 jest:

Twierdzenie 8.1. *Zbiór formuł zdaniowych X nie jest semantycznie sprzeczny (tj. jest semantycznie niesprzeczny) wtw zbiór X posiada co najmniej jeden model.*

Na wykładach poświęconych metalogice wprowadziliśmy również inne pojęcia sprzeczności/ niesprzeczności. Przypomnijmy:

Definicja 1.5. *Zbiór formuł zdaniowych X jest* sprzeczny wtw *istnieje taka formuła zdaniowa A*, *że do zbioru* $\mathbf{Cn}_{\mathrm{L}}(X)$ *należy zarówno formuła A*, *jak i jej negacja*, $\neg A$.

*Gdy takiej formuły nie ma, mówimy, że zbiór X jest* niesprzeczny.

Dalej używając pojęć sprzeczności/ niesprzeczności w sensie definicji 1.5, będziemy mówić o syntaktycznej sprzeczności/ niesprzeczności. Odpowiednich pojęć syntaktycznych i semantycznych nie należy mylić; mają one różne treści.

Zajmijmy się teraz związkami między syntaktyczną niesprzecznością a posiadaniem modelu. Odnotujmy na początek:

Twierdzenie 8.2. *Jeżeli zbiór formuł zdaniowych X posiada model, to zbiór X jest syntaktycznie niesprzeczny.*

Dowód: Załóżmy, że zbiór $X$ posiada model, tj. że istnieje interpretacja, $\boldsymbol{M}$, taka, że $X \subseteq \mathbf{Vr}(\boldsymbol{M})$. Przypuśćmy, że zbiór $X$ jest syntaktycznie sprzeczny. Istnieje wówczas formuła zdaniowa, $A$, taka, że $A \in \mathbf{Cn}_{\mathbf{L}}(X)$ oraz '$\neg A$' $\in \mathbf{Cn}_{\mathbf{L}}(X)$. Korzystając z twierdzenia 6.6, wnosimy stąd, że $A \in \mathbf{Vr}(\boldsymbol{M})$ oraz $\neg A$' $\in \mathbf{Vr}(\boldsymbol{M})$, co przeczy semantycznej zasadzie sprzeczności (tj. twierdzeniu 3.5). Tak więc zbiór $X$ jest syntaktycznie niesprzeczny. ■

Zachodzi też twierdzenie odwrotne do twierdzenia 8.2; co więcej, fakt ten ma daleko idące konsekwencje. Jakie? Żeby to dostrzec, potrzebujemy dwóch twierdzeń pomocniczych, czyli *lematów.*

Lemat 8.1. *Jeżeli $A$ jest zdaniem oraz $A \notin$ $\mathbf{Cn_L}(X)$, to zbiór $X \cup \{\neg A\}$ jest syntaktycznie niesprzeczny.*

Szkic dowodu: Załóżmy, że $A \notin \mathbf{Cn_L}(X)$, $A$ jest zdaniem, oraz $X \cup \{\neg A\}$ jest syntaktycznie sprzeczny. Istnieje wówczas formuła $B$ taka, że:

$$B \in \mathbf{Cn_L}(X \cup \{\neg A\})$$

oraz

$$\text{‘}\neg B\text{’} \in \mathbf{Cn_L}(X \cup \{\neg A\}).$$

Jednocześnie:

$$(B \to (\neg B \to (B \land \neg B))) \in \mathbf{Arp}$$

czyli

$$(B \to (\neg B \to (B \land \neg B))) \in \mathbf{Cn_L}(X \cup \{\neg A\}).$$

Tak więc:

$$(B \land \neg B) \in \mathbf{Cn_L}(X \cup \{\neg A\}).$$

## *Szkic dowodu lematu 6.1*

Skoro $A$ jest zdaniem, to $\neg A$ jest zdaniem. Na mocy *twierdzenia o dedukcji* dostajemy:

$$(\neg A \to B \wedge \neg B) \in \mathbf{Cn_L}(X).$$

Jednocześnie mamy:

$$((\neg A \to B \wedge \neg B) \to A) \in \mathbf{Arp}$$

skąd wnosimy, iż:

$$((\neg A \to B \wedge \neg B) \to A) \in \mathbf{Cn_L}(X).$$

Tak więc skoro $(\neg A \to B \wedge \neg B) \in \mathbf{Cn_L}(X)$, to:

$$A \in \mathbf{Cn_L}(X)$$

co jest niezgodne z założeniem. Ta uwaga kończy dowód. ■

Tyle jeśli chodzi o sprawy techniczne. Rozwiązanie zagadki przybliża kolejny lemat. Zacznijmy jednak od przypomnienia.

Na poprzednich wykładach udowodniliśmy:

Twierdzenie 6.3. *Każda teza KRP jest tautologią*.

Twierdzenie 7.2. *Jeżeli* $A \in \mathbf{Cn_L}(X)$, to $X \models A$.

i padła sugestia, że można udowodnić twierdzenia odwrotne od powyższych, zwane też twierdzeniami o pełności *KRP*. Będziemy teraz zmierzać w tym kierunku.

Zastanówmy się, co wystarczy udowodnić, aby następnie udowodnić twierdzenia o pełności.

Pewien „trop" daje nam następujący:

Lemat 8.2. *Jeżeli każdy syntaktycznie niesprzeczny zbiór formuł zdaniowych posiada model, to:*

(a) *każda tautologia jest tezą KRP oraz*

(b) *jeżeli* $X \models A$, *to* $A \in \mathbf{Cn_L}(X)$.

Dowód:

ad. (a):

Załóżmy, że $A$ jest tautologią oraz że $A$ nie jest tezą *KRP*. Wówczas

$$A \notin \mathbf{Cn}(\mathbf{Arp})$$

czyli

$$A \notin \mathbf{Cn_L}(\varnothing)$$

Wiemy, że dla dowolnego zbioru formuł $X$:

$$A \in \mathbf{Cn_L}(X) \textit{ wtw } \mathrm{dom}(A) \in \mathbf{Cn_L}(X).$$

Tak więc

$$\mathrm{dom}(A) \notin \mathbf{Cn_L}(\varnothing).$$

$\mathrm{dom}(A)$ jest zdaniem. Poprzednio udowodniliśmy:

> Lemat 8.1. *Jeżeli $A$ jest zdaniem oraz $A \notin \mathbf{Cn_L}(X)$, to zbiór $X \cup \{\neg A\}$ jest syntaktycznie niesprzeczny.*

Zatem zbiór:

$$\varnothing \cup \{\neg \mathrm{dom}(A)\}$$

czyli zbiór:

$$\{\neg \mathrm{dom}(A)\}$$

jest syntaktycznie niesprzeczny. Na mocy założenia twierdzenia zbiór ten posiada model, tj. istnieje taka interpretacja $\boldsymbol{M}$, że:

$$\boldsymbol{M} \models \{\neg \mathrm{dom}(A)\}$$

Wnosimy stąd, że:

$$\boldsymbol{M} \; non \models \mathrm{dom}(A)$$

skąd na mocy lematu 7.1 z poprzedniego wykładu dostajemy:

$$\boldsymbol{M} \; non \models A$$

Tak więc $A$ nie jest tautologią, co jest niezgodne z przyjętym założeniem.

ad. (b) Dowód przebiega analogicznie (proszę spróbować swoich sił :)) ■

Tak więc aby pozytywnie rozwiązać zagadnienie pełności KRP, wystarczy udowodnić, że każdy syntaktycznie niesprzeczny zbiór formuł zdaniowych posiada model.

Udowodnił to w 1930 r. Kurt Gödel; *de facto* udowodnił nawet więcej:

Twierdzenie 8.3 (Gödla o istnieniu modelu). *Każdy syntaktycznie niesprzeczny zbiór formuł zdaniowych posiada model przeliczalny, tj. taki, że jego uniwersum jest równoliczne ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych.*

Komentarz: Zapraszam na wykład :)

Z twierdzenia 8.3 dostajemy rzecz jasna

Wniosek 8.1. *Jeśli zbiór formuł zdaniowych X jest syntaktycznie niesprzeczny, to zbiór X posiada model.*

co w połączeniu z twierdzeniem 8.2 daje:

Wniosek 8.2. *Zbiór formuł zdaniowych X jest syntaktycznie niesprzeczny wtw zbiór X posiada model.*

Ponadto z w oparciu o twierdzenie 8.3 dostajemy m.in.:

Twierdzenie 8.4. *Każda tautologia jest tezą KRP*.

Dowód: Na mocy twierdzenia 8.3 oraz lematu 8.2. ■

Twierdzenie 8.5. *A jest tautologią wtw A jest tezą KRP.*

Dowód: W oparciu o twierdzenie 8.4 i twierdzenie 6.3.■

Twierdzenie 8.6. *Jeżeli* $X \models A$, *to* $A \in \mathbf{Cn_L}(X)$.

Dowód: Na mocy twierdzenia 8.3 oraz lematu 8.2.■

Twierdzenie 8.7. $X \models A$ *wtw* $A \in \mathbf{Cn_L}(X)$.

Dowód: W oparciu o twierdzenie 8.6 oraz twierdzenie 7.2. ■

Uwaga: W literaturze anglojęzycznej twierdzenia 8.4 i 8.6 nazywa się twierdzeniami o pełności (*completeness*) KRP. W polskiej literaturze przedmiotu miano to rezerwuje się zwykle (ale nie zawsze) dla twierdzeń 8.5 i 8.7.

Twierdzenie 8.8. *Zbiór formuł zdaniowych X jest syntaktycznie niesprzeczny wtw zbiór formuł zdaniowych X jest semantycznie niesprzeczny.*

Dowód: Na mocy twierdzeń 8.1 i 8.2 oraz wniosku 8.1.■

## *Szkic dowodu twierdzenia Gödla o istnieniu modelu*

Twierdzenia Gödla o istnieniu modelu nie będziemy tu dowodzić. Standardowy dowód (który nie jest oryginalnym dowodem Gödla, lecz którego zasadnicza idea pochodzi od Henkina) może przebiegać z grubsza jakoś tak:

Niech $X$ będzie syntaktycznie niesprzecznym zbiorem formuł zdaniowych pewnego (dowolnego ale ustalonego) języka pierwszego rzędu $\boldsymbol{L}$.

I. Wzbogacamy język $\boldsymbol{L}$, w którym został zapisany $X$, o przeliczalnie nieskończenie wiele nowych stałych indywiduowych $b_1$, $b_2$, ..., $b_n$, .... , otrzymując „nowy" język $\boldsymbol{L^*}$. Jest oczywiste, że $X$ jest *również* zbiorem formuł języka $\boldsymbol{L^*}$.

II. Wszystkie formuły zdaniowe języka $\boldsymbol{L^*}$ zawierające co najwyżej jedną zmienną wolną ustawiamy w ciąg nieskończony:

$$A_1(x_{i_1}),\ A_2(x_{i_2}),\ ...,\ A_n(x_{i_n}),\ ...\ .$$

III. Określamy indukcyjnie pewien nieskończony ciąg $B_1$, $B_2$, ..., $B_n$ zdań języka $\boldsymbol{L^*}$:

$$B_1 = \neg\forall x_{i_1}\ A_1(x_{i_1}) \to \neg A_1[x_{i_1} / b_1]$$

$$B_n = \neg\forall x_{i_n}\ A_n(x_{i_n}) \to \neg A_n[x_{i_n} / b_{j_n}]$$

gdzie $b_{j_n}$ jest "najwcześniejszą" stałą indywiduową spośród $b_1$, $b_2$, ..., $b_n$, ...., która nie występuje w żadnej z formuł $A_1(x_{i_1})$, $A_2(x_{i_2})$, ..., $A_n(x_{i_n})$ i która jest różna od wszystkich stałych indywiduowych $b_{j1}$, $b_{j2}$, ..., $b_{jn-1}$ „użytych wcześniej" .

IV. Tworzymy nieskończony ciąg zbiorów formuł zdaniowych języka ***L****:

$$Y_1,\ Y_2,\ \ldots$$

następująco:

$$Y_1 = X$$

$$Y_{n+1} = Y_n \cup \{B_n\}.$$

V. Wykazujemy, że każdy zbiór będący wyrazem powyższego ciągu jest syntaktycznie niesprzeczny.

VI. Tworzymy sumę utworzonego wyżej nieskończonego ciągu zbiorów. Jest oczywiste, że taka suma jest równa:

$$X \cup \{B_1, B_2, B_3, \ldots.\}.$$

VII. Dowodzimy, że powyższy zbiór jest syntaktycznie niesprzeczny.

## *Szkic dowodu twierdzenia Gödla o istnieniu modelu*

VII. Teraz korzystamy (lub osobno dowodzimy) z Lematu Lindenbauma:

*Jeżeli Z jest syntaktycznie niesprzecznym zbiorem formuł zdaniowych języka pierwszego rzędu, to istnieje teoria Y [wyrażona] w tym języku, która jest syntaktycznie niesprzeczna, zupełna z uwagi na rozważany język i taka, że* $Z \subseteq Y$.

Teoria taka istnieje również dla utworzonego wyżej zbioru:

$$X \cup \{B_1, B_2, B_3, ....\}.$$

Oznaczmy ją po prostu przez $Y$.

*Uwaga*: Skoro $Y$ jest teorią, to oczywiście $\mathbf{Cn_L}(Y) \subseteq Y$.

## *Szkic dowodu twierdzenia Gödla o istnieniu modelu*

VIII. Budujemy interpretację języka ***M*** = <**U**, Δ> języka ***L**** taką, że (mówiąc nieco nieściśle, ale za to klarownie):

- **U** jest zbiorem wszystkich termów domkniętych języka ***L**** (tj. tych termów, w których nie występują zmienne indywiduowe);

  - dla każdego predykatu *P* języka ***L****: Δ(*P*) jest relacją w ***U*** taką, że:

$$\Delta(P)(\tau_1, \ldots, \tau_n) \text{ wtw } P(\tau_1, \ldots, \tau_n) \in Y$$

  [gdzie $\tau_1, \ldots, \tau_n$ są termami domkniętymi języka ***L****],

  - dla każdej stałej indywiduowej *a* języka ***L****: Δ(*a*) = *a,*

  - dla każdego symbolu funkcyjnego *F* języka ***L****: Δ(*F*) jest funkcją definiowaną przez

$$\Delta(F)(\tau_1, \ldots, \tau_n) = F(\tau_1, \ldots, \tau_n)$$

  [gdzie $\tau_1, \ldots, \tau_n$ są termami domkniętymi języka ***L****].

*Uwaga*: Jest oczywiste, że dla każdego termu domkniętego $\tau$ języka ***L**** oraz dla każdego ***M***-wartościowania **s** mamy w efekcie:

$$\tau^{\boldsymbol{M}}[\mathbf{s}] = \tau.$$

## *Szkic dowodu twierdzenia Gödla o istnieniu modelu*

IX. Kolejny krok polega na wykazaniu, że powyższa interpretacja ***M*** jest modelem teorii *Y*.

X. Skoro ***M*** jest modelem *Y*, a $X \subseteq Y$, to ***M*** jest też modelem wyjściowego zbioru formuł *X*. Z kolei ponieważ termów domkniętych języka ***L**** jest przeliczalnie nieskończenie wiele, jest to model przeliczalny.

XI. Cieszymy się, że to już *prawie* koniec dowodu.

XII. Czemu "prawie"? Bo zbudowana właśnie interpretacja jest interpretacją języka ***L****, a nam chodziło o odpowiednią interpretację języka ***L***. Ale – dzięki wrodzonej inteligencji – zauważamy natychmiast, że para uporządkowana <**U**, **Δ'**>, gdzie funkcja **Δ'** jest określona na zbiorze stałych pozalogicznych języka ***L*** i, co więcej, jest na tym zbiorze określona "tak samo" jak funkcja **Δ**, jest interpretacją języka ***L***, a ponadto jest modelem rozważanego zbioru formuł *X* tego języka, co więcej, modelem przeliczalnym.

XIII. Teraz cieszymy się, że jest to koniec dowodu 

Komentarz: Szczegóły naszkicowanego wyżej dowodu mogą Państwo znaleźć w podręczniku Batoga „Podstawy logiki”.

Powyższy dowód można też poprowadzić nieco inaczej (przy zachowaniu idei Henkina); przykładowo, warto zajrzeć do:

- Andrzej Grzegorczyk, *Zarys logiki matematycznej*, lub
- Geoffrey Hunter, *Metalogika*.

Spostrzeżenie: Skoro termów domkniętych języka ***L****** jest tyle, co liczb naturalnych, to możemy je „ponumerować”; niech $g$ będzie funkcją różnowartościową przyporządkowującą termom domkniętym języka ***L****** liczby naturalne. Zamiast interpretacji ***M*** moglibyśmy wprowadzić interpretację $\boldsymbol{M}^{\#} = \langle \mathbf{U}^{\#}, \Delta^{\#} \rangle$ taką, że:

- $\mathbf{U}^{\#} = \mathbf{N}$,
- dla każdego predykatu $P$ języka ***L****:
  $$\langle g(\tau_1), \ldots, g(\tau_n) \rangle \in \Delta^{\#}(P) \text{ wtw } P(\tau_1, \ldots, \tau_n) \in Y$$
- dla każdej stałej indywiduowej $a$ języka ***L****:
  $$\Delta^{\#}(a) = g(a),$$
- dla każdego symbolu funkcyjnego $F$ języka ***L****:
  $$\Delta^{\#}(F)(g(\tau_1), \ldots, g(\tau_n)) = g(F(\tau_1, \ldots, \tau_n)).$$

Można pokazać, że interpretacja $\boldsymbol{M}^{\#}$ jest modelem wyjściowego zbioru $X$. Innymi słowy, zachodzi:

Twierdzenie 8.9. *Każdy syntaktycznie niesprzeczny zbiór formuł zdaniowych posiada model, którego uniwersum jest zbiór liczb naturalnych.*

Komentarz: Zapraszam na wykład :)

Odnotujmy jeszcze:

Twierdzenie 6.10 (Löwenheima-Skolema) *Zbiór formuł zdaniowych posiada model wtw posiada on model przeliczalny*.

Dowód:

($\Rightarrow$) Korzystamy z twierdzenia 8.2 i twierdzenia 8.3.

($\Leftarrow$) Oczywiste. $\blacksquare$

Komentarz: Rzecz jasna zapraszam na wykład :)