Andrzej Wiśniewski

Logika II

Materiały do wykładu dla studentów kognitywistyki

2019/2020

Wykład 9. Wprowadzenie do semantyki teoriomodelowej cz.8. Identyczność i wynikanie

Dzisiejszy wykład będzie raczej opowieścią niż poważnym przedsięwzięciem dydaktycznym – nie zostanie tu podany żaden dowód.

Każdy, kto przejawia (naturalny przecież !) brak zaufania do wykładowcy, może jednak skorzystać z dowolnego średniozaawansowanego podręcznika logiki matematycznej :)

Predykat identyczności w świetle semantyki teoriomodelowej

Jak pamiętamy, obok klasycznego rachunku predykatów mamy jeszcze klasyczny rachunek predykatów z identycznością ($KRP_=$).

Niektórzy uważają, że „**Logika**” (przez duże „**L**”) to właśnie $KRP_=$, a nie (tylko) KRP.

W KRP o predykacie identyczności zakładamy to samo, co o innych predykatach dwuargumentowych – czyli niewiele. Nie jest on nawet graficznie wyróżniony; za reprezentację predykatu identyczności można uznać jakikolwiek predykat dwuargumentowy, np. P_1^2. Natomiast w przypadku $KRP_=$ explicite wprowadzamy do języka predykat identyczności, =, oraz przyjmujemy *aksjomaty identyczności* (zob. wykład 12-13 kursu „Logika I”). Są nimi wszystkie formuły zdaniowe języka $KRP_=$ o następujących schematach:

Aksjomaty identyczności

(i) $x = x$

(ii) $x = y \rightarrow y = x$

(iii) $x = y \wedge y = z \rightarrow x = z$

(iv) $x = y \rightarrow (F_k^n(z_1,\ldots, z_{i-1}, x, z_{i+1},\ldots, z_n) = F_k^n(z_1,\ldots, z_{i-1}, y, z_{i+1},\ldots, z_n))$

(v) $x = y \rightarrow (P_k^n(z_1,\ldots, z_{i-1}, x, z_{i+1},\ldots, z_n) \leftrightarrow P_k^n(z_1,\ldots, z_{i-1}, y, z_{i+1},\ldots, z_n))$

Komentarz: Napis $F_k^n(z_1,\ldots, z_{i-1}, x, z_{i+1},\ldots, z_n)$ oznacza dowolny term, zbudowany z symbolu funkcyjnego F_k^n (gdzie $n \geq 1$, $k \geq 1$) oraz n zmiennych indywiduowych, którego i-tą zmienną ($1 \leq i \leq n$) jest to samo x, o którym mowa w poprzedniku implikacji (iv). Podobnie czytamy napis $F_k^n(z_1,\ldots, z_{i-1}, y, z_{i+1},\ldots, z_n)$ – z tym, że teraz i-tą zmienną jest y występujące w poprzedniku implikacji (iv). Tak więc wzór (iv) wyznacza w istocie nieskończenie wiele schematów aksjomatów.

Podobnie jest w przypadku wzoru (v). Różnica polega na tym, że w (v) mówimy o predykatach n-argumentowych ($n \geq 1$) oraz o formułach atomowych.

Zbiór wszystkich aksjomatów identyczności oznaczamy symbolem **Id**.

Predykat identyczności w świetle semantyki teoriomodelowej

System aksjomatyczny dla $KRP_=$ otrzymujemy z systemu aksjomatycznego dla KRP poprzez dołączenie do zbioru aksjomatów KRP, tj. **Arp,** zbioru *aksjomatów identyczności*, tj. zbioru **Id**. Reguły inferencyjne są takie same w obu systemach, różna jest tylko baza aksjomatyczna.

Postąpmy teraz następująco: w formułach z **Id** wpiszmy P_1^2 zamiast = i zapytajmy, czy każdy model tak powstałego zbioru formuł, **Id***, jest interpretacją języka *KRP*, przy której wartością funkcji denotowania dla predykatu P_1^2 (czyli, w pewnym sensie, =) jest relacja identyczności w uniwersum interpretacji ? Innymi słowy, czy prawdziwość wszystkich formuł w **Id*** „wymusza", aby predykat identyczności rozumieć jako identyczność właśnie?

Odpowiedź brzmi: NIE.

Relacja przyporządkowana predykatowi identyczności w każdej interpretacji rozważanego rodzaju musi być co prawda kongruencją, ale zdarza się, że nie jest ona (w pewnych przypadkach) identycznością.

Czym jest kongruencja? Cóż, zapraszam na wykład :)

Predykat identyczności w świetle semantyki teoriomodelowej

Postawmy teraz kolejne pytanie: Czy elementy zbioru **Id*** są tautologiami? (w sensie definicji 5.1).

Odpowiedź znowu brzmi: NIE.

Natomiast wszystkie formuły ze zbioru **Id*** są prawdziwe przy każdej takiej interpretacji ***M*** = <**U**, Δ> języka KRP, przy której $\Delta(P_1^2)$ jest relacją identyczności, **=,** w **U**. Innymi słowy, są one prawdziwe przy każdej interpretacji, przy której predykat P_1^2 jest rozumiany w *sposób zamierzony*, jako identyczność właśnie.

Rozważmy teraz dowolny język pierwszego rzędu z identycznością (zob. wykład 12-13 kursu „Logika I”).

W języku takim możemy zbudować – „czysty” lub „stosowany” – *Klasyczny Rachunek Predykatów z Identycznością.*

Wszystkie wprowadzone na poprzednich wykładach pojęcia semantyczne: interpretacji, wartościowania, wartości termu, spełniania, prawdziwości etc. możemy stosować do języków pierwszego rzędu z identycznością.

Predykat identyczności w świetle semantyki teoriomodelowej

Mówiąc dalej o formułach, będę miał na myśli – jeśli tylko nie zostanie to *explicite* odwołane - formuły zdaniowe dowolnego ale ustalonego języka pierwszego rzędu z identycznością, ***L***.

Definicja 9.1. *Niech **M*** = <**U**, Δ> *będzie interpretacją języka pierwszego rzędu z identycznością. Mówimy, że **M** jest* interpretacją z absolutnym pojęciem identyczności *wtw* Δ(=) *jest relacją identyczności w* **U**.

Definicja 9.2. *Niech* **L** *będzie językiem pierwszego rzędu z identycznością.* Modelem z absolutnym pojęciem identyczności *zbioru formuł zdaniowych X języka* **L** *nazywamy każdą interpretację* (*tego języka*) *z absolutnym pojęciem identyczności, przy której wszystkie formuły należące do zbioru X są prawdziwe.*

Dygresja zostanie przedstawiona za moment :)

Teraz natomiast wprowadzimy kolejne pojęcie.

Predykat identyczności w świetle semantyki teoriomodelowej

Definicja 9.3. *Formuła zdaniowa A języka pierwszego rzędu z identycznością, **L**, jest* tautologią logiki z identycznością *wtw formuła A jest prawdziwa przy każdej interpretacji języka **L** z absolutnym pojęciem identyczności*.

Tautologie rozumiane w sensie definicji 9.3 będę dalej nazywał $^{=}$tautologiami.

Jest oczywiste, że każda tautologia (rozumiana w zwykłym sensie) zapisana w języku ***L*** jest $^{=}$tautologią. Jest niemniej oczywiste, że nie zachodzi zależność odwrotna.

Można udowodnić

Twierdzenie 9.1. *Niech **L** będzie językiem pierwszego rzędu z identycznością. Formuła A języka **L** jest $^{=}$tautologią wtw formuła A jest tezą klasycznego rachunku predykatów z identycznością, zbudowanego w języku **L**.*

Komentarz: Zostanie podany na wykładzie :)

Definicja 9.4. *Formuła zdaniowa A języka pierwszego rzędu z identycznością* ***L*** wynika na gruncie logiki z identycznością *ze zbioru formuł zdaniowych X języka* ***L*** *wtw zachodzi:*

(#) dla każdej interpretacji ***M*** *języka* ***L z*** *absolutnym pojęciem identyczności: jeżeli wszystkie formuły ze zbioru X są prawdziwe przy interpretacji* ***M****, to formuła A jest prawdziwa przy interpretacji* ***M****.*

Jest oczywiste, że gdy *A* wynika logicznie z *X*, to *A* wynika na gruncie logiki z identycznością z *X*. Nie zachodzi jednak zależność odwrotna! Powód jest prosty: to, że nie ma takiej interpretacji z absolutnym pojęciem identyczności, przy której wszystkie formuły w *X* są prawdziwe, a formuła *A* nie jest prawdziwa, nie znaczy, że w ogóle nie ma interpretacji o powyższej własności.

Dygresja (*dla Leniwych, a także dla Spostrzegawczych*): W wielu podręcznikach logiki znajdą Państwo następujące podejście do semantyki teoriomodelowej języków pierwszego rzędu z identycznością (a często do semantyki teoriomodelowej w ogóle).

I. W definicji interpretacji/modelu języka pomija się warunek dla predykatu identyczności =.

II. W definicji spełniania wprowadza się osobny warunek dla „identycznościowych” formuł atomowych, tj. formuł postaci $\tau_1 = \tau_2$ (symbolem $\mathbf{=}$ oznaczamy relację identyczności w uniwersum):

$$\boldsymbol{M} \models \tau_1 = \tau_2\,[\mathbf{s}] \text{ wtw } \tau_1^{\boldsymbol{M}}[\mathbf{s}] \mathbf{=} \tau_2^{\boldsymbol{M}}[\mathbf{s}].$$

III. Pojęcia prawdziwości, modelu i wynikania logicznego definiuje się wedle schematów podanych na poprzednich wykładach.

Wówczas jednak tautologiami są wyłącznie ${}^{=}$tautologie, każdy model jest w istocie modelem z absolutnym pojęciem identyczności oraz wynikanie logiczne jest w istocie wynikaniem na gruncie logiki z identycznością.

Jakie są motywy (i konsekwencje) przyjęcia takiego rozwiązania? Zapraszam na wykład :)

Wynikanie „zrelatywizowane”

Zasadnicza intuicja leżąca u podstaw pojęcia wynikania formuły ze zbioru formuł jest następująca:

Formuła zdaniowa (zdanie) *A* **wynika** ze zbioru formuł zdaniowych (zdań) *X* wówczas, gdy **nie może być tak, że**: wszystkie formuły (zdania) w *X* są prawdą, natomiast formuła (zdanie) *A* nie jest prawdą.

W przypadku logiki pierwszego rzędu zwrot „nie może być tak, że” jest oddawany przez „nie ma takiej interpretacji języka, że” – powstaje pojęcie *wynikania logicznego*.

W przypadku logiki pierwszego rzędu z identycznością „nie może być tak, że” znaczy „nie ma takiej interpretacji z absolutnym pojęciem identyczności, że” – powstaje pojęcie *wynikania w logice z identycznością*.

Interpretacje z absolutnym pojęciem identyczności są jednak zamierzonymi (lub standardowymi) interpretacjami języka pierwszego rzędu z identycznością.

Wynikanie „zrelatywizowane”

Postąpmy teraz następująco: w klasie wszystkich interpretacji rozważanego języka pierwszego rzędu – z identycznością lub bez - wyróżnijmy pewną niepustą podklasę **interpretacji standardowych** (lub zamierzonych - terminologia nie jest tu ustalona). Wprowadźmy następujący schemat definicji:

> (Wn_1) *Niech **L** będzie językiem pierwszego rzędu (z identycznością lub bez), natomiast **K** niech będzie* (*niepustą*) *klasą wszystkich interpretacji standardowych języka **L**. Niech X będzie zbiorem formuł zdaniowych języka **L**, natomiast A będzie pojedynczą formułą zdaniową języka **L**.*
>
> *X $\models_{\boldsymbol{K}}$ A wtw dla każdej interpretacji **M** języka **L** będącej elementem klasy **K**: jeżeli wszystkie formuły ze zbioru X są prawdziwe przy interpretacji **M**, to formuła A jest prawdziwa przy interpretacji **M**.*

Symbol $\models_{\boldsymbol{K}}$ czytamy „wynika z uwagi na klasę interpretacji standardowych ***K*** (języka ***L***)” lub „wynika w (rozważanym) języku”; ten drugi sposób czytania jest uprawniony wówczas, gdy – odmiennie niż poprzednio – pojmiemy język jako parę uporządkowaną, której elementami są kolejno: język rozumiany syntaktycznie oraz klasa interpretacji standardowych tego języka. Mówiąc krótko, gdy język ujmiemy syntaktyczno-semantycznie, a nie tylko syntaktycznie.

Wynikanie „zrelatywizowane”

Gdy stosujemy schemat (Wn_1), zwrot „nie może być tak, że”, mający kluczową role w intuicyjnym rozumieniu wynikania (zob. wyżej) eksplikujemy przez:

nie ma takiej interpretacji standardowej, że.

Zanim pójdziemy dalej, odnotujmy:

Wniosek 9.1. *Jeżeli A wynika logicznie z X*, *to* $X \models_{\boldsymbol{K}} A$.

Innymi słowy, wynikanie logiczne jest zawsze szczególnym przypadkiem wynikania w języku/ wynikania w klasie interpretacji standardowych języka. Dlaczego? Ponieważ jeśli odpowiedni warunek zachodzi dla wszystkich interpretacji, to zachodzi on również dla wszystkich interpretacji standardowych.

Zależność odwrotną otrzymamy wówczas, gdy każdą interpretację uznamy za standardową. Tak właśnie jest w logice pierwszego rzędu.

Wynikanie „zrelatywizowane”

Klasy interpretacji standardowych możemy wyróżniać z różnych powodów i, co więcej, w różny sposób. Ponieważ jest to temat-rzeka, ograniczę się do zilustrowania go kilkoma przykładami.

Może być tak, że o pewnych stałych pozalogicznych pragniemy założyć coś więcej, niż zakłada „czysta” logika. Takie założenia dadzą się wyrazić w semantyce w formie definicji klasy interpretacji standardowych.

Przykład 9.1 (niezbyt realistyczny). Przypuśćmy, że używamy pewnego języka pierwszego rzędu, ***L****, do opisu jakiejś dziedziny przedmiotowej i, budując taki opis, wprowadzamy następujący postulat znaczeniowy/definicję:

$$(*) \qquad \forall x\, (P(x) \leftrightarrow Q(x) \wedge S(x))$$

gdzie P, Q, S są ustalonymi predykatami jednoargumentowymi języka ***L****. Naturalnym staje się uznanie za interpretacje standardowe języka ***L**** tych wszystkich interpretacji, przy których zdanie (*) jest prawdziwe. W efekcie chociaż zdanie $P(a)$ nie wynika logicznie ze zdania $Q(a) \wedge S(a)$, to zdanie $P(a)$ wynika w języku ***L**** ze zdania $Q(a) \wedge S(a)$.

Przykład 7.2. (nieco bardziej realistyczny) Budujemy teorię w danym języku pierwszego rzędu taką, że predykat identyczności = jest w niej rozumiany jako oznaczający identyczność w dziedzinie, którą pragniemy „opisać”, natomiast (występujące w języku) stałe pozalogiczne arytmetyki liczb naturalnych Peano: **0**, **S**, **+**, • są w niej rozumiane tak, jak to charakteryzują aksjomaty tej arytmetyki (zob. wykład 14 kursu „Logika I”). Klasę interpretacji standardowych definiujemy jako klasę wszystkich interpretacji z absolutnym pojęciem identyczności, które są modelami zbioru wszystkich aksjomatów arytmetyki Peano. Odpowiednia relacja wynikania nie będzie identyczna z wynikaniem logicznym: obok wniosków „wynikających logicznie” będziemy również mieli wnioski „wynikające arytmetycznie”.

Przykład 9.3 (znajomy). Potrzebny jest nam język pierwszego rzędu, w którym predykat identyczności = (występujący w tym języku) jest rozumiany jako odnoszący się do identyczności w rozważanej dziedzinie. Jako interpretacje standardowe bierzemy zatem interpretacje z absolutnym pojęciem identyczności. Oznaczmy teraz przez $\boldsymbol{K}_=$ zbiór wszystkich interpretacji (rozważanego języka) z absolutnym pojęciem identyczności. Pojęcie wynikania w języku, $\models_{\boldsymbol{K}_=}$, definiujemy zgodnie ze schematem (Wn_1). Zauważmy, że dostajemy:

Wniosek 9.2. *$X \models_{\boldsymbol{K}_=} A$ wtw A wynika na gruncie logiki z identycznością z X.*

Przykład 9.4. Jednym z dyskretnych uroków semantyki teoriomodelowej jest to, że dopuszcza ona istnienie interpretacji, w uniwersach których występują obiekty „nie mające nazw”, tj. takie, które nie są desygnatami żadnych termów domkniętych. Czasami jednak przydatne jest ograniczenie się do rozważania wyłącznie takich interpretacji, w uniwersach których wszystkie obiekty „mają swoje nazwy”. Załóżmy, że w rozważanym języku występuje co najmniej jeden term domknięty. Wówczas interpretacje standardowe możemy zdefiniować np. tak:

Interpretacja $\boldsymbol{M} = \langle \mathbf{U}, \Delta \rangle$ jest *standardowa* wtw dla każdego $y \in \mathbf{U}$ istnieje term domknięty τ taki, że dla każdego $\boldsymbol{M}$-wartościowania $\mathbf{s}$ zachodzi $y = \tau^{\boldsymbol{M}}[\mathbf{s}]$.

Gdy teraz zdefiniujemy wynikanie w języku zgodnie ze schematem (Wn_1), pokryje się ono z wynikaniem logicznym w przypadku skończonych zbiorów przesłanek, natomiast nie pokryje się dla przypadku nieskończonych zbiorów przesłanek.

Przykład 7.5. Niech ***L*** będzie językiem pierwszego rzędu z identycznością, w alfabecie którego występuje co najmniej jedna stała indywiduowa i co najmniej jeden jednoargumentowy symbol funkcyjny. Zdefiniujmy pojęcie interpretacji standardowej rozważanego języka następująco:

Interpretacja ***M*** = <**U**, Δ> języka ***L*** jest *standardowa* wtw ***M*** jest interpretacją z absolutnym pojęciem identyczności oraz

- **U** *jest* zbiorem wszystkich termów domkniętych języka ***L***,
- dla każdej stałej indywiduowej a języka ***L***: $\Delta(a) = a$,
- dla każdego symbolu funkcyjnego F języka ***L***: $\Delta(F)$ jest funkcją definiowaną przez

$$\Delta(F)(\tau_1, \ldots, \tau_n) = F(\tau_1, \ldots, \tau_n)$$

[gdzie $\tau_1, \ldots, \tau_n$ są termami domkniętymi języka ***L***].

Interpretacje tego rodzaju noszą nazwę Herbandowskich. Są one ważne w rozważaniach dotyczących metod automatycznego dowodzenia twierdzeń – o czym więcej przy innej okazji (i trochę na wykładzie – zapraszam :))

Wynikanie wielownioskowe

Na zakończenie uogólnijmy jeszcze pojęcie wynikania w nieco innym kierunku, wprowadzając pojęcie wynikania wielownioskowego (*multiple-conclusion*). Oto schemat definicji:

(Wn$_2$) *Niech* ***L*** *będzie językiem pierwszego rzędu (z identycznością lub bez), natomiast* ***K*** *niech będzie (niepustą) klasą wszystkich interpretacji standardowych języka* ***L***. *Niech X, Y będą zbiorami formuł zdaniowych języka* ***L****.*

$X \Vdash_{\boldsymbol{K}} Y$ *wtw dla każdej interpretacji* ***M*** *języka* ***L*** *będącej elementem klasy* ***K***: *jeżeli wszystkie formuły ze zbioru X są prawdziwe przy interpretacji* ***M****, to co najmniej jedna formuła należąca do zbioru Y jest prawdziwa przy interpretacji* ***M****.*

Napis $X \Vdash_{\boldsymbol{K}} Y$ czytamy „zbiór formuł zdaniowych *Y* wynika wielownioskowo ze zbioru formuł zdaniowych *X* z uwagi na klasę interpretacji standardowych ***K*** (języka ***L***)" lub „*Y* wynika wielownioskowo w (rozważanym) języku z ***X***".

Komentarze i przykłady zostaną podane na wykładzie. Zapraszam :)

Dodatek 1: Kongruencja w uniwersum interpretacji

Definicja

Niech $M = \langle U, \Delta \rangle$ *będzie interpretacją języka pierwszego rzędu L. Relacja* $\cong\ \subseteq U \times U$ *jest* ***kongruencją w*** *M wtw*

1. $\cong$ *jest relacją równoważnościową w U,*
2. *dla dowolnego n-argumentowego* ($n \geq 1$) *symbolu funkcyjnego F języka L, dla dowolnych* $y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, , z_n \in U$ *spełniony jest warunek:*
   - *jeśli* $y_1 \cong z_1$ *oraz ... oraz* $y_n \cong z_n$, *to* $\Delta(F)(y_1, \ldots, y_n) \cong \Delta(F)(z_1, \ldots, z_n)$,
3. *dla dowolnego n-argumentowego* ($n \geq 1$) *predykatu P jezyka L spełniony jest warunek:*
   - *jeśli* $y_1 \cong z_1$ *oraz ... oraz* $y_n \cong z_n$, *to* $\Delta(P)(y_1, \ldots, y_n)$ *wtw* $\Delta(P)(z_1, \ldots, z_n)$.

Dodatek 2

Tabele analityczne dla klasycznego rachunku predykatów z identycznością

Do przedstawionego na wykładzie 5 systemu tabel analitycznych dla klasycznego rachunku predykatów dodajemy dwie nowe reguły:

$R_{=1}$:

$$\frac{\ldots}{c = c}$$

c jest tu dowolnym termem* (kropki wskazują, że jest to reguła "bezprzesłankowa" - możemy ją zastosować w każdym momencie).

$R_{=2}$:

$$\frac{\begin{array}{c}\phi[x_i/c]\\ c = c_1\end{array}}{\phi[x_i/c_1]}$$

c, c_1 są tu termami*, a ϕ jest formułą *atomową* w której występuje zmienna x_i lub negacją takiej formuły atomowej, przy czym $\phi[x_i/c]$ jest różna od $c = c_1$.

Formuły występujące w przedstawionych przykładach to wyrażenia języka przedmiotowego, z tym, że zastosowano następujące konwencje notacyjne:

- zamiast x_1 i x_2 piszemy, odpowiednio, x i y.
- zamiast P_1^1 piszemy P.

(Gdyby jednak przyjąć, że x i y zastępują inne zmienne indywiduowe, a P inny predykat jednoargumentowy, prezentowabe tabele dotyczą odpowiednich formuł języka przedmiotowego.)

Tabela analityczna dla $x = x$

$$\neg(x = x)$$
$$x = x$$

Tabela analityczna dla $\forall x(x = x)$

$$\neg\forall x(x = x)$$
$$\exists x\neg(x = x)$$
$$\neg(b = b)$$
$$b = b$$

Tabela analityczna dla $\forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x)$

$$\neg \forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x)$$
$$\exists x \neg \forall y (x = y \rightarrow y = x)$$
$$\neg \forall y (b = y \rightarrow y = b)$$
$$\exists y \neg (b = y \rightarrow y = b)$$
$$\neg (b = b_1 \rightarrow b_1 = b)$$
$$b = b_1$$
$$\neg (b_1 = b)$$
$$\neg (b = b)$$
$$b = b$$

Tabela analityczna dla $P(a_1) \rightarrow \exists x(P(x) \wedge x = a_1)$

$$\neg(P(a_1) \rightarrow \exists x(P(x) \wedge x = a_1))$$
$$P(a_1)$$
$$\neg\exists x(P(x) \wedge x = a_1)$$
$$\forall x \neg(P(x) \wedge x = a_1)$$
$$\neg(P(a_1) \wedge a_1 = a_1)$$
$$\neg P(a_1) \qquad\qquad \neg(a_1 = a_1)$$
$$a_1 = a_1$$

Tabela analityczna dla $\exists x(P(x) \wedge x = a_1) \to P(a_1)$

$$\neg(\exists x(P(x) \wedge x = a_1) \to P(a_1))$$
$$\exists x(P(x) \wedge x = a_1)$$
$$\neg P(a_1)$$
$$P(b) \wedge b = a_1$$
$$P(b)$$
$$b = a_1$$
$$P(a_1)$$

Tabela analityczna dla $P(a_1) \to \forall x(x = a_1 \to P(x))$

$$\neg(P(a_1) \to \forall x(x = a_1 \to P(x))$$
$$P(a_1)$$
$$\neg\forall x(x = a_1 \to P(x)))$$
$$\exists x \neg(x = a_1 \to P(x))$$
$$\neg(b = a_1 \to P(b))$$
$$b = a_1$$
$$\neg P(b)$$
$$\neg P(a_1)$$

Tabela analityczna dla $\forall x(x = a_1 \vee x = a_2 \to P(x)) \to P(a_1) \wedge P(a_2)$.

$$\neg(\forall x(x = a_1 \vee x = a_2 \to P(x)) \to P(a_1) \wedge P(a_2))$$
$$\forall x(x = a_1 \vee x = a_2 \to P(x))$$
$$\neg(P(a_1) \wedge P(a_2))$$

$\neg P(a_1)$	$\neg P(a_2)$
$a_1 = a_1 \vee a_1 = a_2 \to P(a_1)$	$a_2 = a_1 \vee a_2 = a_2 \to P(a_2)$
$\neg(a_1 = a_1 \vee a_1 = a_2)$ $P(a_1)$	$\neg(a_2 = a_1 \vee a_2 = a_2)$ $P(a_2)$
$\neg(a_1 = a_1)$	$\neg(a_2 = a_1)$
$\neg(a_1 = a_2)$	$\neg(a_2 = a_2)$
$a_1 = a_1$	$a_2 = a_2$

Tabela analityczna dla $P(a_1) \wedge P(a_2) \to \forall x(x = a_1 \vee x = a_2 \to P(x))$.

$$\neg(P(a_1) \wedge P(a_2) \to \forall x(x = a_1 \vee x = a_2 \to P(x)))$$
$$P(a_1) \wedge P(a_2)$$
$$\neg\forall x(x = a_1 \vee x = a_2 \to P(x))$$
$$P(a_1)$$
$$P(a_2)$$
$$\exists x \neg(x = a_1 \vee x = a_2 \to P(x))$$
$$\neg(b = a_1 \vee b = a_2 \to P(b))$$
$$b = a_1 \vee b = a_2$$
$$\neg P(b)$$

$b = a_1$	$b = a_2$
$\neg P(a_1)$	$\neg P(a_2)$

Tabela analityczna dla $P(a_1) \vee P(a_2) \rightarrow \exists x (P(x) \wedge (x = a_1 \vee x = a_2))$

$$\neg(P(a_1 \vee P(a_2) \rightarrow \exists x (P(x) \wedge (x = a_1 \vee x = a_2)))$$
$$P(a_1) \vee P(a_2)$$
$$\neg \exists x (P(x) \wedge (x = a_1 \vee x = a_2))$$
$$\forall x \neg (P(x) \wedge (x = a_1 \vee x = a_2))$$

$$\begin{array}{cc}
P(a_1) & P(a_2) \\
\neg(P(a_1) \wedge (a_1 = a_1 \vee a_1 = a_2)) & \neg(P(a_2) \wedge (a_2 = a_1 \vee a_2 = a_2)) \\
\begin{array}{cc} \neg P(a_1) & \neg(a_1 = a_1 \vee a_1 = a_2) \\ & \neg(a_1 = a_1) \\ & \neg(a_1 = a_2) \\ & a_1 = a_1 \end{array} & \begin{array}{cc} \neg P(a_2) & \neg(a_2 = a_1 \vee a_2 = a_2) \\ & \neg(a_2 = a_1) \\ & \neg(a_2 = a_2) \\ & a_2 = a_2 \end{array}
\end{array}$$

Tabela analityczna dla $\exists x(P(x) \wedge (x = a_1 \vee x = a_2)) \rightarrow P(a_1) \vee P(a_2)$

$$\neg(\exists x(P(x) \wedge (x = a_1 \vee x = a_2)) \rightarrow P(a_1) \vee P(a_2))$$
$$\exists x(P(x) \wedge (x = a_1 \vee x = a_2))$$
$$\neg(P(a_1) \vee P(a_2))$$
$$\neg P(a_1)$$
$$\neg P(a_2)$$
$$P(b) \wedge (b = a_1 \vee b = a_2)$$
$$P(b)$$
$$b = a_1 \vee b = a_2$$

$b = a_1$	$b = a_2$
$P(a_1)$	$P(a_2)$

Podobnie jak w przypadku KRP, metody tabel analitycznych możemy używać w celu wykazania, że /sprawdzenia, czy zachodzi relacja wynikania logicznego na gruncie KRP z identycznością (dotyczyć to może również wynikania wielownioskowego).

Tabela analityczna dla $\{P(a_1), a_1 = a_2\} \models P(a_2)$

$$\begin{array}{c} P(a_1) \\ a_1 = a_2 \\ \neg P(a_2) \\ P(a_2) \end{array}$$

Tabela analityczna dla $\{P(a_1), a_1 = a_2 \vee a_1 = a_3\} \Vdash \{P(a_2), P(a_3)\}$

$$P(a_1)$$
$$a_1 = a_2 \vee a_1 = a_3$$
$$\neg P(a_2)$$
$$\neg P(a_3)$$

$a_1 = a_2$	$a_1 = a_3$
$P(a_2)$	$P(a_3)$

Tabela analityczna dla $\{P(a_1), a_1 = a_2 \lor a_1 = a_3\} \models P(a_2)$

$$
\begin{array}{ccc}
 & P(a_1) & \\
 & a_1 = a_2 \lor a_1 = a_3 & \\
 & \neg P(a_2) & \\
a_1 = a_2 & & a_1 = a_3 \\
P(a_2) & & P(a_3)
\end{array}
$$

Zauważmy, że powyższa tabela jest otwarta i nie posiada rozszerzeń. Tak więc w rozważanym przypadku wynikanie na gruncie logiki z identycznością nie zachodzi.

Dodatek 3

Wynikanie wielownioskowe - przykłady

$$\emptyset \mathrel{|}\!\models \{P(a_1), \neg P(a_1)\}$$

$$\{P(a_1) \vee P(a_2)\} \mathrel{|}\!\models \{P(a_1), P(a_2)\}$$

$$\{P(a_1) \vee R(a_1)\} \mathrel{|}\!\models \{P(a_1), R(a_1)\}$$

$$\{\forall x(P(x) \to (R(x) \vee Q(x)), P(a_1)\} \mathrel{|}\!\models \{R(a_1), Q(a_1)\}$$

$$\{\forall x(P(x) \to (R(x) \vee Q(x)), P(a_1)\} \mathrel{|}\!\models$$
$$\{R(a_1) \wedge \neg Q(a_1), \neg R(a_1) \wedge Q(a_1), R(a_1) \wedge Q(a_1)\}$$

$$\{\neg P(a_1)\} \mathrel{|}\!\models \{\exists x P(x), \forall x \neg P(x)\}$$

$$\{\exists x P(x)\} \mathrel{|}\!\models \{\forall x P(x), \exists x P(x) \wedge \exists x \neg P(x)\}$$

$$\{P(a_1), \neg P(a_1)\} \mathrel{|}\!\models \emptyset$$