

Andrzej Wiśniewski
Logika II

Materiały do wykładu dla studentów kognitywistyki

Wykład 8. Modalności i intensjonalność

Coś na kształt ostrzeżenia

Ta prezentacja jest nieco odmienna od poprzednich. To, co najważniejsze, zostanie powiedziane na wykładzie, a tutaj będzie tylko zaanonsowane.

Jest tak, że
Nieprawda, że
.... [prawdziwościowe]
Jest możliwe, że
Jest konieczne, że
.... [aletyczne]
Wiem, że
Jestem przekonany, że
.... [epistemiczne]
Jest nakazane, że
Jest dozwolone, że
.... [deontyczne]
Zawsze było tak, że
Niekiedy będzie tak, że
.... [temporalne]

Spójniki jednoargumentowe

Jaś goni Małgosię

Terminologia: Z pewnych powodów zamiast o spójnikach/funktorach modalnych mówi się raczej o **operatorach** modalnych, lub po prostu o **modalnościach**.

Modalności aletyczne

Pochodzenie nazwy: zapraszam na wykład :)

Jest konieczne, że Andrzej biega.

Jest możliwe, że Andrzej biega.

modalności aletyczne *de dicto*

Andrzej musi biegać.

Andrzej może biegać.

modalności aletyczne *de re*

Zauważmy, że zdanie „Jest możliwe, że Andrzej biega” nie jest równoznaczne ze zdaniem „Andrzej może biegać”;

($\$$) zagadnienie stosunku między modalnościami *de dicto* a modalnościami *de re* nie jest trywialne!

Modalności epistemiczne

Wiem, że

[osoba] a wie, że

Wiadomo, że

....

Jestem przekonany, że

[osoba] a jest przekonana, że

....

Stwierdzam, że

[osoba] a stwierdza, że

Jest stwierdzone, że

....

kognitywistyka jest fascynująca.

Mówiąc najogólniej, modalność epistemiczna odnosi się do wiedzy czy przekonań. Nie każda modalność epistemiczna jest – syntaktycznie rzecz biorąc – spójnikiem.

Modalności temporalne

Mówiąc najogólniej, modalności temporalne odnoszą się do czasu.

Zawsze jest tak, że
Niekiedy jest tak, że

....

Zawsze było tak, że
Zawsze będzie tak, że
Niekiedy było tak, że
Niekiedy będzie tak, że

....

.... od (*since*) ...

.... dopóki (*until*) ...

Następny (*next*) ...

kognitywistyka jest fascynująca

Uwaga: *Since* i *until* są – syntaktycznie rzecz biorąc – funktorami dwuargumentowymi.

Modalności deontyczne

Jest obowiązkowe [nakazane], że
Jest dozwolone, że
Jest zakazane, że
Powinno być tak, że

świadek mówi prawdę.

....

Obowiązkowe jest to, że ... pod warunkiem tego, że ...

Dozwolone jest to, że ... pod warunkiem, że ...

Zakazane jest to, że ... pod warunkiem, że ...

....

Mówiąc najogólniej, modalności deontyczne odnoszą się do powinności i zakazów.

Zauważmy, że nie każda modalność deontyczna jest – z syntaktycznego punktu widzenia – spójnikiem jednoargumentowym.

.....
Obwieszczenie: Istnieją modalności nie należące do żadnej z wyróżnionych dotychczas kategorii. Jakże? Zapraszam na wykład :)

Analiza wyrażen modalnych prowadzi do pewnych niespodzianek.

Przykład 8.1. Zdania:

Rzym leży nad Tybrem.

Rzym istnieje 2763 lata.¹

mają tę samą wartość logiczną (mianowicie są prawdziwe). Zdarzyć się jednak może, że zdanie:

Zenobiusz wie, że Rzym leży nad Tybrem.

jest prawdziwe, podczas gdy zdanie:

Zenobiusz wie, że Rzym istnieje 2763 lata.

jest fałszywe.

Widzimy więc, że w kontekście typu „[osoba] a wie, że...” nie zachodzi wymienialność *salva veritate*, tj. z zachowaniem wartości logicznej.

¹ W 2010 r.

Jest tak nawet w przypadku zdań „związanych treściowo”, co ilustruje następujący przykład.

Przykład 8.2. Zdania

$$2 + 2 = 4$$

$$\sqrt[2]{4} + \sqrt[2]{4} = 4$$

są równoważne (na gruncie arytmetyki). Natomiast zdania o schematach:

[osoba] a wie, że $2 + 2 = 4$

[osoba] a wie, że $\sqrt[2]{4} + \sqrt[2]{4} = 4$.

nie muszą mieć tej samej wartości logicznej (i mają różne wartości logiczne w przypadku znanego mi Zenobiusza, lat 5 i pół).

Przykład 8.3.

*Wiśniewski wie, że włamywacz wszedł przez okno.
Tym włamywaczem jest Urbański.*

Wiśniewski wie, że Urbański wszedł przez okno.

Przykład 8.4.

*Liczba planet Układu Słonecznego wynosi 8.
Jest konieczne, że 8 jest większe od 7.*

Jest konieczne, że liczba planet Układu Słonecznego jest większa od 7.

W obu przypadkach wniosek wydaje się fałszywy przy założeniu prawdziwości przesłanek. Z drugiej strony, odpowiednie „obiekty”, do których odnosimy się w obu przesłankach, są identyczne. Rodzi to trudność, której nie możemy rozwikłać posługując się środkami $KRP_{=}$.

Zdarza się, że wartość logiczna zdania złożonego, w którym występuje wyrażenie modalne, nie jest jednoznacznie wyznaczona przez wartości logiczne zdań składowych.

Przykład 8.5.

Zdanie:

Jest konieczne, że Platon jest uczniem Sokratesa

jest fałszywe pomimo tego, że jego zdanie składowe

Platon jest uczniem Sokratesa

jest prawdziwe. Z kolei zdanie:

Jest konieczne, że $2 + 2 = 4$

jest prawdziwe i jego zdanie składowe jest prawdziwe.

Przykład 8.6.

Zdania:

Kowalski jest przekonany, że Ziemia jest płaska

Kowalski jest przekonany, że Warszawa jest stolicą Polski

mogą być równocześnie prawdziwe, chociaż w pierwszym przypadku „argument” wyrażenia modalnego jest fałszywy, natomiast w drugim – prawdziwy.

Intensjonalność

Ponieważ wyrażenia modalne w większości są spójnikami (tj. funktorami zdaniotwórczymi od argumentów zdaniowych), *explicite* wprowadzimy tu pojęcia intensjonalności i ekstensjonalności tylko dla spójników.

n-argumentowy spójnik jest **ekstensjonalny** wtw wartość logiczna każdego zdania złożonego utworzonego za jego pomocą zależy wyłącznie od wartości logicznych zdań składowych.

n-argumentowy spójnik jest **intensjonalny** wtw spójnik ten nie jest ekstensjonalny.

Tak więc 1-argumentowy spójnik \mathcal{S} jest intensjonalny wtedy, gdy istnieją co najmniej dwa zdania, A i B , o identycznych wartościach logicznych, takie, że odpowiednie zdania złożone, powstające ze zdań A i B za pomocą spójnika \mathcal{S} , mają różne wartości logiczne.

Spójniki negacji \neg oraz asercji („jest tak, że”) są ekstensjonalne; spójniki „jest konieczne, że”, „jest możliwe, że”, „wiem, że” etc. są intensjonalne.

Ogólnie (i nieco nieściśle) możemy powiedzieć tak:

n -argumentowy spójnik \mathcal{S} jest *intensjonalny* wtw istnieją układy zdań $\langle A_1, \dots, A_n \rangle$ i $\langle A_1^*, \dots, A_n^* \rangle$ takie, że:

(*) zdania powstające poprzez zastosowanie spójnika \mathcal{S} do zdań A_1, \dots, A_n i do zdań A_1^*, \dots, A_n^* mają różne wartości logiczne, podczas gdy odpowiednie układy wartości logicznych, $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ i $\langle \mathbf{v}_1^*, \dots, \mathbf{v}_n^* \rangle$, układów zdań $\langle A_1, \dots, A_n \rangle$ i $\langle A_1^*, \dots, A_n^* \rangle$, są identyczne.

Spójniki występujące w *KRZ* (a także wszystkie definiowalne za ich pomocą) są ekstensjonalne.

Pojęcia ekstensjonalności i intensjonalności można uogólnić na funktory dowolnej kategorii. Idea jest następująca: funktor \mathbb{F} jest ekstensjonalny wtw „wartość semantyczna” wyrażenia złożonego, zbudowanego z funktora \mathbb{F} oraz jego argumentów, zależy wyłącznie od „wartości semantycznych” tychże argumentów; w przeciwnym przypadku funktor \mathbb{F} jest intensjonalny.

Zauważmy, że w świetle semantyki teoriomodelowej dla języków pierwszego rzędu, zarówno predykaty, jak i symbole funkcyjne są funktorami ekstensjonalnymi.

Czy młody kognitywista powinien tracić czas na zajmowanie się logikami analizującymi wyrażenia intensjonalne?

Zaiste tak, i to **co najmniej** z dwóch powodów.

Powód pierwszy wyjaśnię odwołując się do przykładów.

Przykład 8.7.

Warszawa jest stolicą Polski.

Jest możliwe, że Warszawa jest stolicą Polski.

Przykład 8.8.

Jest konieczne, że zdam egzamin z logiki.

Zdam egzamin z logiki.

Jest oczywiste, że w obu przypadkach mamy do czynienia z wynikiem. Z drugiej strony, analiza środkami *KRZ* czy nawet *KRP* tego nie pokazuje i pokazać nie może. Potrzebujemy **logiki modalnej**, ściślej: modalnej logiki aletycznej.

Czy młody kognitywista powinien tracić czas na zajmowanie się logikami analizującymi wyrażenia intensjonalne?

Powód drugi: pojęcia wiedzy i przekonania są ważne dla nauk kognitywnych. Stąd też logika analizująca modalności epistemiczne – **logika epistemiczna** – może być przydatna w analizach kognitywistycznych.

Przypomnę teraz slajd do wykładu „Pojęcie wiedzy” kursu „Wprowadzenie do filozofii” :)

Niech K_a skraca „(osoba) a wie, że”.

1. $K_a p \rightarrow p$
2. $K_a(p \rightarrow q) \rightarrow (K_a p \rightarrow K_a q)$
3. $K_a(p \wedge q) \rightarrow (K_a p \wedge K_a q)$
4. ...

- I. $K_a p \rightarrow K_a K_a p$ (pozytywna introspekcja)
- II. $\neg K_a p \rightarrow K_a \neg K_a p$ (negatywna introspekcja)

??? Jeżeli $K_a p$ oraz q wynika logicznie z p , to $K_a q$
(wszechwiedza logiczna)

??? $K_a p \rightarrow K_a(p \vee q)$

??? ...

 ~~$p \rightarrow K_a p$~~
 ~~$K_a p \vee K_a \neg p$~~

Możliwość i konieczność

Na początek zajmiemy się **modalnościami aletycznymi** i (aletycznymi) modalnymi rachunkami zdaniowymi

.... a raczej pewnymi takimi rachunkami, albowiem przykra wiadomość jest taka, że zamiast jednej modalnej logiki zdań mamy wiele modalnych logik zdaniowych

.... przy czym istnieją ku temu istotne powody :)

Przypomnijmy:

Modalności aletyczne

Jest konieczne, że Andrzej biega.
Jest możliwe, że Andrzej biega.

modalności aletyczne *de dicto*

Andrzej musi biegać.
Andrzej może biegać.

modalności aletyczne *de re*

Na poziomie modalnych rachunków zdań interesują nas modalności aletyczne *de dicto*.

Możliwość i konieczność

Możliwość (*de dicto*) jest czasami rozumiana jako **możliwość obustronna**:

możliwe, że $A \leftrightarrow_{df}$ nie jest konieczne, że A oraz nie jest konieczne, że $\neg A$

a czasami jako **możliwość jednostronna**:

jest możliwe, że $A \leftrightarrow_{df}$ nie jest konieczne, że $\neg A$.

W modalnych rachunkach zdań, które będą nas tu interesować, operujemy spójnikiem możliwości jednostronnej i związanym z nim spójnikiem konieczności.

Jest konieczne, że zapisujemy jako \Box

Jest możliwe, że zapisujemy jako \Diamond

Możliwość i konieczność

Za pierwotne możemy przyjąć zarówno pojęcie (jednostronnej) możliwości – wtedy konieczność \square zdefiniujemy za pomocą możliwości \diamond :

$$\square A \leftrightarrow_{df} \neg \diamond \neg A$$

jak i możemy uznać za pierwotne odpowiednie pojęcie konieczności \square i zdefiniować za jego pomocą pojęcie możliwości jednostronnej \diamond :

$$\diamond A \leftrightarrow_{df} \neg \square \neg A.$$

Można też oba pojęcia wprowadzić jako pierwotne.

Jakkolwiek postąpimy, „sens” wprowadzonych modalności aletrycznych będzie charakteryzowany przez budowaną **modalną logikę zdaniową**.

Logika taka będzie **rozszerzeniem KRZ**.

Po pierwsze, będzie to rozszerzenie z uwagi na język.

Po drugie, z uwagi na bazę aksjomatyczną i (zwykle) reguły inferencyjne.

Ścisła implikacja

Zanim przystąpimy do budowania modalnych logik zdaniowych, wspomnijmy jeszcze o pojęciu ścisłej implikacji.

Otóż korzystając z operatora konieczności \Box , możemy zdefiniować pojęcie (spójnik) ścisłej implikacji:

$$(A \Rightarrow B) \leftrightarrow_{df} \Box(A \rightarrow B)$$

Podobnie dla operatora możliwości:

$$(A \Rightarrow B) \leftrightarrow_{df} \neg\Diamond(A \wedge \neg B)$$

Historycznie rzecz biorąc, modalne aletryczne logiki zdań powstały jako systemy aksjomatyczne charakteryzujące różne sposoby rozumienia ścisłej implikacji.

Opowieść historyczna – na wykładzie :)