Andrzej Wiśniewski

Logika II

Materiały do wykładu dla studentów kognitywistyki

Wykłady 9 i 10a. Wybrane modalne rachunki zdań. Ujęcie aksjomatyczne

Język aletycznych modalnych rachunków zdań

Przedstawimy tutaj pewne modalne logiki zdań poprzez konstrukcje odpowiednich modalnych rachunków zdań. Rachunki te będą miały postać systemów aksjomatycznych.

Aletyczne modalne rachunki zdań (dalej krótko: modalne rachunki zdań, jeszcze krócej: *MRZ*) budujemy w języku, który jest rozszerzeniem języka Klasycznego Rachunku Zdań.

Do alfabetu *KRZ* dodajemy dwa nowe spójniki/operatory modalne:

$\Box$ („*jest konieczne, że*")

$\Diamond$ („*jest możliwe, że*")

otrzymując w ten sposób alfabet języka *MRZ*.

Wyrażeniem języka *MRZ* jest każdy skończony ciąg elementów alfabetu języka *MRZ*.

"Sensownie zbudowane" wyrażenia języka *MRZ* to oczywiście formuły tego języka.

Pojęcie formuły języka *MRZ* definiujemy następująco:

Definicja 9.1.

(*i*) *Każda zmienna zdaniowa jest formułą języka MRZ*.

(*ii*) *Jeżeli A jest formułą języka MRZ, to wyrażenia mające postać*: $\neg A$, $\Diamond A$, $\Box A$ *są formułami języka MRZ*.

(*iii*) *Jeżeli A, B są formułami języka MRZ, to wyrażenia mające postać*: $(A \to B)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \leftrightarrow B)$ *są formułami języka MRZ.*

(*iv*) *Nie ma żadnych innych formuł języka MRZ poza zmiennymi zdaniowymi oraz tymi, które można utworzyć na mocy reguł* (*ii*) *oraz* (*iii*) *podanych wyżej*.

Notacja: Podobnie jak w przypadku *KRZ*, liter *A*, *B*, *C*, ..., ewentualnie z indeksami, używamy jako metajęzykowych zmiennych reprezentujących formuły języka *MRZ*. Zamiast p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 będę pisał *p*, *q*, *r*, *s*, *t*. Reguły dotyczące opuszczania nawiasów są podobne do tych z *KRZ*; operatory modalne $\Diamond$, $\Box$ zachowują się z tego punktu widzenia podobnie jak negacja $\neg$.

Każdy z interesujących nas tu modalnych rachunków zdań posiada *aksjomaty rachunkowozdaniowe* oraz *aksjomaty specyficzne*.

Definicja 9.3. Aksjomat rachunkowozdaniowy *to formuła języka MRZ powstająca z tautologii KRZ poprzez konsekwentne zastąpienie (występujących w tej tautologii) zmiennych zdaniowych formułami języka MRZ.*

Zauważmy, że każda tautologia *KRZ* jest aksjomatem rachunkowozdaniowym. Jednakże nie jest na odwrót. Przykładowo, formuła:

$$\Box p \wedge \Box q \rightarrow \Box p$$

jest aksjomatem rachunkowozdaniowym, ale nie jest tautologią *KRZ* (z tego powodu, że nie jest ona w ogóle formułą języka *KRZ*!). Podobnie formuła:

$$\Box p \wedge q \rightarrow \Box p$$

etc.

Notacja: Zbiór wszystkich aksjomatów rachunkowozdaniowych modalnego rachunku zdań oznaczymy symbolem **PC** (od *Propositional Calculus*, tj. Rachunek Zdań). Zamiast „aksjomat rachunkowozdaniowy” będę dalej pisał „**PC**-aksjomat”.

Dygresja 9.1. Z uwagi na pełność *KRZ,* w definicji **PC**-aksjomatów moglibyśmy równie dobrze użyć pojęcia tezy *KRZ* zamiast pojęcia tautologii *KRZ*. Wówczas pojęcie **PC**-aksjomatu stałoby się czysto syntaktyczne – *as it should be*. Przyjęte rozwiązanie jest jednak po prostu wygodniejsze. Możemy je przyjąć dlatego, że dysponujemy efektywną metodą rozstrzygania, co jest tautologią *KRZ* – a od aksjomatyki wymaga się głównie tego, aby istniała efektywna metoda rozstrzygania, czy coś jest aksjomatem, czy też nim nie jest.

Dygresja 9.2. Czasami charakteryzuje się aksjomaty rachunkowozdaniowe (modalnego rachunku zdań) jeszcze inaczej:

(a) poprzez przyjęcie, że są nimi wszystkie aksjomaty wybranego systemu aksjomatycznego *KRZ* (a systemów aksjomatycznych *KRZ* – *pełnych*, bo o takich tu mowa – jest, jak pamiętamy, wiele) lub

(b) poprzez przyjęcie, że **PC**-aksjomatami są wszystkie formuły języka *MRZ* o schematach wyznaczonych przez aksjomaty danego systemu aksjomatycznego *KRZ*.

Jakkolwiek postąpimy, końcowy efekt będzie jednak ten sam :)

Modalne rachunki zdań, o których będzie tu mowa, różnią się z uwagi na aksjomaty specyficzne, natomiast mają one taki sam zestaw pierwotnych reguł inferencyjnych (i **PC**-aksjomatów).

Pierwotne reguły inferencyjne to: *reguła odrywania*, *reguła podstawiania*, *reguła Gödla* i *reguła zastępowania*.

Reguła odrywania: Z dwóch formuł, z których pierwsza ma postać implikacji $A \to B$, a druga jest poprzednikiem tej implikacji, tj. formułą A, wolno wyprowadzić formułę B, tj. następnik rozważanej implikacji.

Schematycznie zapisujemy regułę odrywania (krótko: RO) następująco:

$$\frac{\begin{array}{l} A \to B \\ A \end{array}}{B}$$

Operację podstawiania formuły *MRZ* za zmienną zdaniową do formuły *MRZ* definiujemy podobnie jak w przypadku *KRZ.*

Napis $A[p_i/B]$ skraca wyrażenie „wynik podstawienia formuły B za zmienną p_i w formule A”.

Definicja 9.2.

(1) $p_k[p_i/B] = \begin{cases} p_k, \text{ gdy } i \neq k \\ B, \text{ gdy } i = k. \end{cases}$

(2) *Jeżeli A ma postać* $\neg C$, *to* $A[p_i/B] = \neg C[p_i/B]$.

(3) *Jeżeli A ma postać* $\Diamond C$, *to* $A[p_i/B] = \Diamond C[p_i/B]$.

(4) *Jeżeli A ma postać* $\Box C$, *to* $A[p_i/B] = \Box C[p_i/B]$.

(5) *Jeżeli A ma postać* $(C \rightarrow D)$, *to* $A[p_i/B] = (C[p_i/B] \rightarrow D[p_i/B])$.

(4) *Jeżeli A ma postać* $(C \wedge D)$, *to* $A[p_i/B] = (C[p_i/B] \wedge D[p_i/B])$.

(5) *Jeżeli A ma postać* $(C \vee D)$, *to* $A[p_i/B] = (C[p_i/B] \vee D[p_i/B])$.

(6) *Jeżeli A ma postać* $(C \leftrightarrow D)$, *to* $A[p_i/B] = (C[p_i/B] \leftrightarrow D[p_i/B])$.

Reguła podstawiania: Z formuły A wolno wyprowadzić formułę powstającą z A poprzez podstawienie za zmienną zdaniową p_i formuły B.

Schematycznie regułę podstawiania (dalej: RP) możemy zapisać następująco:

$$\frac{A}{A[p_i\,/B]}$$

Komentarz: **RO** i **RP** występują też w *KRZ*. W przypadku *MRZ* różnica polega na tym, że mamy do czynienia z „bogatszym" językiem.

W praktyce, podobnie jak w przypadku *KRZ*, będziemy stosować podstawianie jednoczesne; każdą operację takiego rodzaju można, jak wiadomo, „rozbić" na stosowanie „kanonicznej" RP, przy ewentualnym przemianowywaniu zmiennych.

Reguła Gödla: Z formuły *A* wolno wyprowadzić formułę o postaci □*A*.

Regułę Gödla (krótko: RG) możemy schematycznie zapisać następująco:

$$\frac{A}{\Box A}$$

Regułę Gödla nazywa się też czasami *regułą konieczności*.

Komentarz: Nie polecam stosowania reguły Gödla we wnioskowaniach dnia codziennego (przykładowo, przejście od *Zenobiusz ziewa na wykładzie z logiki* do *Jest konieczne, że Zenobiusz ziewa na wykładzie z logiki* nie musi być przejściem od prawdy do prawdy). Intuicja leżąca u podstaw wprowadzenia RG jest inna: jeśli tezą budowanej logiki modalnej jest *A*, to tezą jest też □*A* – ta ostatnia formuła stwierdza *explicite*, że to, co jest tezą, jest też, z tego właśnie powodu, konieczne. Reguły inferencyjne w *MRZ* są regułami budowania dowodów, a nie derywacji.

Dygresja: pojęcie podformuły

Aby wprowadzić kolejną regułę, potrzebujemy pojęcia podformuły. Intuicyjnie rzecz biorąc, podformułą danej formuły *A* języka sformalizowanego jest każdy „fragment” formuły *A,* który sam jest formułą, a ponadto przyjmuje się – z pewnych powodów „praktycznych” – że *A* jest też podformułą *A*.

W przypadku języka *MRZ* ścisła definicja wygląda następująco:

(i) formuła *A* jest podformułą formuły *A*;

(ii) jeżeli formuła *A* ma postać $\neg B$, lub postać $\Box B$, lub postać $\Diamond B$, to formuła *B* jest podformułą formuły *A*;

(iii) jeżeli formuła *A* ma postać $(B \rightarrow C)$, lub postać $(B \wedge C)$, lub postać $(B \vee C)$, lub postać $(B \leftrightarrow C)$, to formuły *B* i *C* są podformułami formuły *A*;

(iv) jeżeli formuła *B* jest podformułą formuły *A*, a formuła *C* jest podformułą formuły *B*, to formuła *C* jest podformułą formuły *A*;

(v) nie ma żadnych innych podformuł formuły *A*.

Jak pamiętamy, możliwość $\Diamond$ można zdefiniować za pomocą konieczności $\Box$ i negacji $\neg$:

$$\Diamond A \leftrightarrow_{df} \neg\Box\neg A$$

W związku z tym formułę postaci $\Diamond A$ można uważać za skrót formuły postaci $\neg\Box\neg A$, a jeśli tak, to - intuicyjnie rzecz biorąc - tam, gdzie mamy formułę postaci $\neg\Box\neg A$, możemy wpisać formułę $\Diamond A$. Mówiąc nieco bardziej ściśle, od formuły B, w której na pewnym miejscu występuje podformuła postaci $\neg\Box\neg A$, możemy przejść do formuły różniącej się od B tylko tym, że na miejscu lub miejscach (niekoniecznie wszystkich!) występowania (pod)formuły postaci $\neg\Box\neg A$ wpiszemy $\Diamond A$. Operację tego rodzaju nazywamy zastępowaniem (definicyjnym). Wynik jej zastosowania do formuły B z uwagi na formuły $\neg\Box\neg A$ i $\Diamond A$ zapiszemy schematycznie jako:

$$B[\neg\Box\neg A \,//\, \Diamond A]$$

Uwaga dla purystów: Ponieważ zastępowanie nie musi dotyczyć każdego wystąpienia (pod)formuły $\neg\Box\neg A$, powyższy napis nie wyznacza jednej formuły; w pewnych przypadkach będzie się on odnosił do wielu formuł.

Reguła zastępowania: Z formuły *B*, w której występuje podformuła postaci $\neg\Box\neg A$, wolno wyprowadzić formułę *B*', różniącą się od *B* tylko tym, że na co najmniej jednym miejscu, na którym w *B* występuje podformuła postaci $\neg\Box\neg A$, w *B'* wystąpi podformuła postaci $\Diamond A$.

Wprowadzoną regułę zastępowania, RZ, możemy schematycznie zapisać następująco:

$$\frac{B}{B[\neg\Box\neg A \,//\, \Diamond A]}$$

Przykład 9.1. Z **PC**-aksjomatu:

$$\neg\Box\neg p \rightarrow \neg\Box\neg p$$

możemy otrzymać *w jednym kroku*, stosując RZ, każdą z poniższych formuł:

$$\Diamond p \rightarrow \neg\Box\neg p$$

$$\neg\Box\neg p \rightarrow \Diamond p$$

$$\Diamond p \rightarrow \Diamond p$$

Ostrzeżenie: Należy pamiętać, że zastępowanie „działa" inaczej niż podstawianie. Stosując regułę podstawiania, wpisujemy formułę za zmienną zdaniową *wszędzie tam*, gdzie ta zmienna występowała w wyjściowej formule. Natomiast stosując regułę zastępowania, na miejsce podformuły o określonym kształcie wpisujemy formułę równoważną jej definicyjnie, przy czym nie musimy – chociaż możemy – dokonać tej operacji wszędzie tam, gdzie w wyjściowej formule występowała „podmieniana" (pod)formuła.

Dygresja: Regułę zastępowania sformułowaliśmy tutaj w dość ograniczonej postaci: zastępowanie jest możliwe tylko z uwagi na podformuły postaci $\neg\Box\neg A$. Gdybyśmy wprowadzili do języka spójnik ścisłej implikacji $\Rightarrow$, to przyjmując definicję:

$$(A \Rightarrow B) \leftrightarrow_{df} \Box(A \rightarrow B)$$

moglibyśmy określić odpowiednią regułę zastępowania w taki sposób, aby możliwe było (również) wyprowadzanie formuł postaci $A \Rightarrow B$. Szczegóły pozostawiam Państwu :)

Pozwolę sobie też przypomnieć, że istnieją systemy aksjomatyczne *KRZ*, w których operuje się (odpowiednią) regułą zastępowania – zob. wykład 12-13 kursu „Logika I”. Tym, co jest wprowadzane definicyjnie, są spójniki definiowalne w terminach spójników występujących w aksjomatach.

Aksjomaty specyficzne

Scharakteryzujemy teraz pewną grupę modalnych rachunków zdań. Będą one wyznaczone przez następujące aksjomaty specyficzne:

K: $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$

D: $\Box p \to \Diamond p$

T: $\Box p \to p$

B: $p \to \Box\Diamond p$

4: $\Box p \to \Box\Box p$

E: $\Diamond p \to \Box\Diamond p$

Rozpoczniemy od modalnej logiki zdań noszącej nazwę ***K*** (od „Kripke”). Logikę tę scharakteryzujemy prezentując pewien *system aksjomatyczny* dla tej logiki. System ten będziemy określać mianem "rachunku ***K***".

Dygresja (dla dociekliwych): zostanie wypowiedziana na wykładzie :)

Aksjomaty rachunku ***K***:

PC-aksjomaty

$\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ (*aksjomat* **K**)

(Pierwotne) reguły inferencyjne rachunku ***K***:

RO: $\dfrac{A \to B \quad A}{B}$

RP: $\dfrac{A}{A\,[p_i\,/B]}$

RG: $\dfrac{A}{\Box A}$

RZ: $\dfrac{B}{B[\neg\Box\neg A\ //\ \Diamond A]}$

Pojęcie *dowodu w rachunku* ***K*** definiujemy standardowo:

Definicja 9.4. Dowodem formuły *A* w rachunku ***K*** *nazywamy skończony ciąg formuł języka MRZ, którego ostatnim wyrazem jest formuła A, taki, że dowolna formuła będąca jego wyrazem:*

(1) *jest aksjomatem rachunku* ***K****, lub*
(2) *powstaje z jakiegoś wcześniejszego wyrazu tego ciągu poprzez zastosowanie reguły podstawiania* RP*, lub reguły Gödla* RG*, lub reguły zastępowania* RZ*, lub*
(3) *powstaje z jakichś wcześniejszych wyrazów tego ciągu poprzez zastosowanie reguły odrywania* RO*.*

Sformułowanie powyższej definicji w wersji dla purystów pozostawiam Państwu :)

Definicja 9.5. *Formuła A* (*języka MRZ*) *jest* tezą rachunku ***K*** *wtw formuła A posiada co najmniej jeden dowód w rachunku* ***K****.*

Zauważmy, że – z powodów analogicznych, jak w przypadkach *KRZ* i *KRP* – każdy aksjomat rachunku ***K*** jest tezą tego rachunku.

To, że formuła *A* jest tezą rachunku ***K***, zapisujemy skrótowo następująco:

$$\vdash_{\boldsymbol{K}} A$$

Prezentując dowody w rachunku ***K***, przyjmujemy podobne konwencje, jak w przypadku *KRZ*. Pragnąc zaznaczyć, że wykorzystujemy **PC**-aksjomat, piszemy („na marginesie”) $\mathbf{Ax_{PC}}$.

Ponieważ rachunek ***K*** jest nadbudowany nad *KRZ*, w dowodach możemy korzystać z wszystkich *wtórnych reguł inferencyjnych*, z których wolno korzystać budując dowody w *KRZ*. Istnieją jednak również pewne reguły wtórne, które są specyficzne dla rachunku ***K*** (i modalnych rachunków zdań będących rozszerzeniami ***K***). Warto zwrócić uwagę na dwie z nich:

Dwie przydatne reguły wtórne: reguła regularności

Reguła regularności:

RR:

$$\frac{A \to B}{\Box A \to \Box B}$$

Przypuśćmy bowiem, że budując dowód dochodzimy do implikacji postaci:

$$A \to B$$

Teraz możemy skorzystać z RG, otrzymując:

$$\Box(A \to B)$$

Następnie wprowadzamy odpowiednie podstawienie aksjomatu **K**:

$$\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$$

Korzystając z RO, otrzymujemy:

$$(\Box A \to \Box B)$$

Reguła ekstensjonalności:

RE:

$$\frac{A \leftrightarrow B}{\Box A \leftrightarrow \Box B}$$

Dlaczego RE jest regułą wtórną? Popatrzmy:

...	
i. $A \leftrightarrow B$	
$i+1$. $(A \leftrightarrow B) \to (A \to B)$	[**Ax$_{PC}$**]
$i+2$. $A \to B$	[$i+1$, i **RO**]
$i+3$. $\Box A \to \Box B$	[$i+2$ **RR**]
$i+4$. $(A \leftrightarrow B) \to (B \to A)$	[**Ax$_{PC}$**]
$i+5$. $B \to A$	[$i+4$, i **RO**]
$i+6$. $\Box B \to \Box A$	[$i+5$ **RR**]
$i+7$. $(\Box A \to \Box B) \to ((\Box B \to \Box A) \to (\Box A \leftrightarrow \Box B))$	[**Ax$_{PC}$**]
$i+8$. $(\Box B \to \Box A) \to (\Box A \leftrightarrow \Box B)$	[$i+7$, $i+3$ **RO**]
$i+9$. $\Box A \leftrightarrow \Box B$	[$i+8$, $i+6$ **RO**]

Podam teraz pewne przykłady dowodów w rachunku ***K***. Dla uproszczenia stosujemy podstawianie jednoczesne. W pierwszym przykładzie skorzystamy też z reguł wtórnych opartych na prawie

sylogizmu hipotetycznego i *prawie importacji* a także reguły wtórnej

RSH:

$$\frac{A \to B \qquad B \to C}{A \to C}$$

RIMP:

$$\frac{A \to (B \to C)}{A \wedge B \to C}$$

RD$_{\leftrightarrow}$:

$$\frac{A \to B \qquad B \to A}{A \leftrightarrow B}$$

oraz z reguły (wtórnej!) regularności **RR**. Przekształcenie poniższego dowodu w dowód, w którym stosowane są wyłącznie pierwotne reguły inferencyjne rachunku ***K***, pozostawiam Państwu (jako zagadnienie egzaminacyjne ?) :)

Przykład 9.2. $\vdash_K \Box(p \wedge q) \leftrightarrow \Box p \wedge \Box q$

1. $p \wedge q \rightarrow p$ [$\mathbf{Ax_{PC}}$]
2. $\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box p$ [1 **RR**]
3. $p \wedge q \rightarrow q$ [$\mathbf{Ax_{PC}}$]
4. $\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box q$ [3 **RR**]
5. $(\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box p) \rightarrow ((\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box q) \rightarrow (\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box p \wedge \Box q))$ [$\mathbf{Ax_{PC}}$]
6. $(\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box q) \rightarrow (\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box p \wedge \Box q)$ [5,2 **RO**]
7. $\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box p \wedge \Box q$ [6,4 **RO**]

8. $p \rightarrow (q \rightarrow p \wedge q)$ [$\mathbf{Ax_{PC}}$]
9. $\Box p \rightarrow \Box(q \rightarrow p \wedge q)$ [8 **RR**]
10. $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$ [**K**]
11. $\Box(q \rightarrow p \wedge q) \rightarrow (\Box q \rightarrow \Box(p \wedge q))$ [10 **RP**: p / q, $q / p \wedge q$]
12. $\Box p \rightarrow (\Box q \rightarrow \Box(p \wedge q))$ [9, 11 **RSH**]
13. $\Box p \wedge \Box q \rightarrow \Box(p \wedge q)$ [12 **RIMP**]
14. $\Box(p \wedge q) \leftrightarrow \Box p \wedge \Box q$ [7, 13 $\mathbf{RD}_{\leftrightarrow}$]

Przykład 9.3. $\vdash_K \Box\neg p \leftrightarrow \neg\Diamond p$

1. $\Box\neg p \leftrightarrow \neg\neg\Box\neg p$ [$\mathbf{Ax_{PC}}$]
2. $\Box\neg p \leftrightarrow \neg\Diamond p$ [1 **RZ**]

W kolejnym przykładzie skorzystamy z reguły (wtórnej) ekstensjonalności RE:

Przykład 9.4. $\vdash_K \Diamond\neg p \leftrightarrow \neg\Box p$

1. $\neg\neg p \leftrightarrow p$ [$\mathbf{Ax_{PC}}$]
2. $\Box\neg\neg p \leftrightarrow \Box p$ [1 **RE**]
3. $(\Box\neg\neg p \leftrightarrow \Box p) \rightarrow (\neg\Box\neg\neg p \leftrightarrow \neg\Box p)$ [$\mathbf{Ax_{PC}}$]
4. $\neg\Box\neg\neg p \leftrightarrow \neg\Box p$ [3, 2 **RO**]
5. $\Diamond\neg p \leftrightarrow \neg\Box p$ [4 **RZ**]

Podobnie jak w przypadku *KRZ*, również w rachunku ***K***, budując dowody, w praktyce korzystamy z tez uprzednio udowodnionych (jako że każdy taki „dowód” można przekształcić w dowód *lege artis*, w którym jedynymi przesłankami są aksjomaty).

Gdy korzystamy z przesłanki będącej tezą, na marginesie piszemy [**Teza**].

Przykład 9.5. $\vdash_K \Box p \leftrightarrow \neg\Diamond\neg p$

1. $\Diamond\neg p \leftrightarrow \neg\Box p$	[**Teza**]
2. $(\Diamond\neg p \leftrightarrow \neg\Box p) \to (\Box p \leftrightarrow \neg\Diamond\neg p)$	[$\mathbf{Ax_{PC}}$]
3. $\Box p \leftrightarrow \neg\Diamond\neg p$	[2, 1 **RO**]

Warto odnotować, że tezą systemu ***K*** jest również formuła $\Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p$:

Przykład 9.6. $\vdash_K \Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p$

1. $\neg\Box\neg p \leftrightarrow \neg\Box\neg p$	[$\mathbf{Ax_{PC}}$]
2. $\Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p$	[1 **RZ**]

Gdy mamy tezy o postaci równoważności, możemy od nich przejść do tez implikacyjnych, korzystając z następujących reguł wtórnych opartych na prawach: $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ oraz $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$:

$R^{*\leftrightarrow/\rightarrow}$

$$\frac{A \leftrightarrow B}{A \rightarrow B}$$

$R^{**\leftrightarrow/\rightarrow}$

$$\frac{A \leftrightarrow B}{B \rightarrow A}$$

Mamy zatem m.in.:

$\vdash_{\boldsymbol{K}} \Box(p \wedge q) \rightarrow \Box p \wedge \Box q$

$\vdash_{\boldsymbol{K}} \Box p \wedge \Box q \rightarrow \Box(p \wedge q)$

$\vdash_{\boldsymbol{K}} \Box\neg p \rightarrow \neg\Diamond p$ $\quad\quad$ $\vdash_{\boldsymbol{K}} \Box p \rightarrow \neg\Diamond\neg p$

$\vdash_{\boldsymbol{K}} \neg\Diamond p \rightarrow \Box\neg p$ $\quad\quad$ $\vdash_{\boldsymbol{K}} \neg\Diamond\neg p \rightarrow \Box p$

$\vdash_{\boldsymbol{K}} \Diamond\neg p \rightarrow \neg\Box p$ $\quad\quad$ $\vdash_{\boldsymbol{K}} \Diamond p \rightarrow \neg\Box\neg p$

$\vdash_{\boldsymbol{K}} \neg\Box p \rightarrow \Diamond\neg p$ $\quad\quad$ $\vdash_{\boldsymbol{K}} \neg\Box\neg p \rightarrow \Diamond p$

W poniższym dowodzie korzystamy z (wtórnej) reguły regularności RR:

Przykład 9.7. $\vdash_K \Box p \vee \Box q \to \Box(p \vee q)$

1. $p \to p \vee q$ [**Ax**$_{\mathbf{PC}}$]
2. $\Box p \to \Box(p \vee q)$ [1 RR]
3. $q \to p \vee q$ [**Ax**$_{\mathbf{PC}}$]
4. $\Box q \to \Box(p \vee q)$ [3 RR]
5. $(\Box p \to \Box(p \vee q)) \to ((\Box q \to \Box(p \vee q)) \to (\Box p \vee \Box q \to \Box(p \vee q)))$ [**Ax**$_{\mathbf{PC}}$]
6. $(\Box q \to \Box(p \vee q)) \to (\Box p \vee \Box q \to \Box(p \vee q))$ [5, 2 **RO**]
7. $\Box p \vee \Box q \to \Box(p \vee q)$ [6, 4 **RO**]

Uwaga: Formuła odwrotna do wyżej rozważanej (tj. $\Box(p \vee q) \to \Box p \vee \Box q$) *nie jest tezą* rachunku ***K***. Tak zresztą, intuicyjnie rzecz biorąc, powinno być.

Nad intuicyjnością poniższego faktu można jednak dyskutować:

FAKT 9.1. *Formuła $\Box p \to \Diamond p$ nie jest tezą rachunku **K**.*

(Uzasadnienie przedstawimy później). Powyższa formuła jest jednak aksjomatem kolejnego modalnego rachunku zdań, oznaczanego jako ***D***.

Modalną logikę zdań noszącą nazwę ***D*** (od „deontic”) można scharakteryzować budując następujący system aksjomatyczny (podobnie jak poprzednio, o systemie tym będziemy dalej mówić krótko "rachunek ***D***")

Aksjomaty rachunku ***D***:

PC-aksjomaty

$\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ (*aksjomat* **K**)

$\Box p \to \Diamond p$ (*aksjomat* **D**)

(Pierwotne) reguły inferencyjne rachunku ***D***:

RO:

$$\frac{A \to B \qquad A}{B}$$

RP:

$$\frac{A}{A\,[p_i\,/B]}$$

RG:

$$\frac{A}{\Box A}$$

RZ:

$$\frac{B}{B[\neg\Box\neg A\,/\!/\,\Diamond A]}$$

Mówiąc ogólnie, ***D*** różni się od ***K*** obecnością aksjomatu **D**. Odpowiednie pojęcia metalogiczne dla rachunku ***D*** określamy analogicznie jak w przypadku rachunku ***K***. Napis:

$$\vdash_{\boldsymbol{D}} A$$

znaczy, że formuła *A* (języka *MRZ*) jest tezą rachunku ***D***.

Jest oczywiste, że każda teza rachunku ***K*** jest też tezą rachunku ***D***. *Nie jest jednak na odwrót*: pewne formuły są tezami rachunku ***D***, ale nie są tezami rachunku ***K***. Innymi słowy, ***D*** jest silniejszy od ***K***.

Zachodzi (co uzasadnimy semantycznie później):

FAKT 9.2. *Formuła* $\Box p \rightarrow p$ *nie jest tezą rachunku* ***D***.

Formuła ta jest jednak aksjomatem kolejnego modalnego rachunku zdań, oznaczanego jako ***T***.

Aksjomaty rachunku ***T***:

PC-aksjomaty

$\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ (*aksjomat* **K**)

$\Box p \to p$ (*aksjomat* **T**)

(Pierwotne) reguły inferencyjne rachunku ***T***:

RO: $\dfrac{A \to B \quad A}{B}$

RP: $\dfrac{A}{A\,[p_i / B]}$

RG: $\dfrac{A}{\Box A}$

RZ: $\dfrac{B}{B[\neg\Box\neg A \mathbin{//} \Diamond A]}$

Pojęcia metalogiczne określamy jak poprzednio. To, że formuła A jest tezą rachunku ***T*** zapisujemy: $\vdash_{\boldsymbol{T}} A$.

Pokażemy teraz, że każda teza rachunku ***D*** – a zatem także rachunku ***K*** – jest tezą rachunku ***T***. W tym celu wystarczy udowodnić:

Twierdzenie 9.1. *Formuła* $\Box p \rightarrow \Diamond p$ *ma dowód w rachunku* ***T***.

Dowód twierdzenia 9.1. Dowodem formuły $\Box p \rightarrow \Diamond p$ w rachunku ***T*** jest (m.in.) następujący ciąg formuł:

1. $\Box p \rightarrow p$	[**T**]
2. $\Box\neg p \rightarrow \neg p$	[1 **RP**: p / $\neg p$]
3. $(\Box\neg p \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow \neg\Box\neg p)$	[$\mathbf{Ax_{PC}}$]
4. $p \rightarrow \neg\Box\neg p$	[3, 2 **RO**]
5. $p \rightarrow \Diamond p$	[4 **RZ**]
6. $(\Box p \rightarrow p) \rightarrow ((p \rightarrow \Diamond p) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Diamond p))$	[$\mathbf{Ax_{PC}}$]
7. $(p \rightarrow \Diamond p) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Diamond p)$	[6, 1 **RO**]
8. $\Box p \rightarrow \Diamond p$	[7, 5 **RO**]

Można pokazać, że żadna z następujących formuł:

$$p \to \Box\Diamond p$$

$$\Box p \to \Box\Box p$$

$$\Diamond p \to \Box\Diamond p$$

nie jest tezą rachunku ***T***.

Kolejne modalne rachunki zdań otrzymujemy poprzez rozszerzanie aksjomatyki rachunku ***T*** o powyższe formuły. Rachunki te oznaczamy symbolami ***B***, ***S4*** i ***S5***.

W każdym przypadku pojęcia metalogiczne są definiowane analogicznie jak dla rachunku ***K***. Napis $\vdash_L A$, gdzie ***L*** jest nazwą rozważanego rachunku, oznacza, że formuła *A* jest tezą rachunku ***L***.

Aksjomaty rachunku ***B***:

PC-aksjomaty

$\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ (*aksjomat* **K**)

$\Box p \to p$ (*aksjomat* **T**)

$p \to \Box\Diamond p$ (*aksjomat* **B**)

(Pierwotne) reguły inferencyjne rachunku ***B***:

RO:

$$\frac{A \to B \qquad A}{B}$$

RP:

$$\frac{A}{A\,[p_i\,/B]}$$

RG:

$$\frac{A}{\Box A}$$

RZ:

$$\frac{B}{B[\neg\Box\neg A\;/\!/\;\Diamond A]}$$

Jest oczywiste, że wszystkie tezy rachunków ***K***, ***D*** i ***T*** są też tezami rachunku ***B***. Nie jest jednak na odwrót: ***B*** jest silniejszy od ***K***, ***D*** i ***T***.

Aksjomaty rachunku ***S4***:

PC-aksjomaty

$\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ (*aksjomat* **K**)

$\Box p \to p$ (*aksjomat* **T**)

$\Box p \to \Box\Box p$ (*aksjomat* **4**)

(Pierwotne) reguły inferencyjne rachunku ***S4***:

RO: $\dfrac{A \to B \quad A}{B}$

RP: $\dfrac{A}{A\,[p_i\,/B]}$

RG: $\dfrac{A}{\Box A}$

RZ: $\dfrac{B}{B[\neg\Box\neg A\,//\,\Diamond A]}$

Jest oczywiste, że wszystkie tezy rachunków ***K***, ***D*** i ***T*** są też tezami rachunku ***S4***. Nie jest jednak na odwrót.

Natomiast zbiory tez rachunków ***B*** i ***S4*** krzyżują się.

W rachunku ***S4*** „konieczność konieczności” sprowadza się do konieczności, a „możliwość możliwości” do możliwości. Popatrzmy:

$\vdash_{\boldsymbol{S4}} \Box\Box p \leftrightarrow \Box p$

1. $\Box p \rightarrow p$ [**T**]
2. $\Box\Box p \rightarrow \Box p$ [1 **RP**: p / $\Box p$]
3. $\Box p \rightarrow \Box\Box p$ [**4**]
4. $\Box\Box p \leftrightarrow \Box p$ [2, 3 $\mathbf{RD}_{\leftrightarrow}$]

$\vdash_{S4} \Diamond\Diamond p \leftrightarrow \Diamond p$

1. $\Box p \rightarrow \Box\Box p$	[**4**]
2. $(\Box p \rightarrow \Box\Box p) \rightarrow (\neg\Box\Box p \rightarrow \neg\Box p)$	[**Ax$_{PC}$**]
3. $\neg\Box\Box p \rightarrow \neg\Box p$	[2, 1 **RO**]
4. $\neg\Box\Box\neg p \rightarrow \neg\Box\neg p$	[3 **RP**: p / $\neg p$]
5. $\neg\Box\Box\neg p \rightarrow \Diamond p$	[4 **RZ**]
6. $\Diamond\neg p \rightarrow \neg\Box p$	[Teza]
7. $\Diamond\neg\Box\neg p \rightarrow \neg\Box\Box\neg p$	[6 **RP**: p / $\Box\neg p$]
8. $\Diamond\Diamond p \rightarrow \neg\Box\Box\neg p$	[7 **RZ**]
9. $\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$	[8, 5 **RSH**]
10. $\Box p \rightarrow p$	[**T**]
11. $\Box\neg p \rightarrow \neg p$	[10 **RP**: p / $\neg p$]
12. $(\Box\neg p \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow \neg\Box\neg p)$	[**Ax$_{PC}$**]
13. $p \rightarrow \neg\Box\neg p$	[12, 11 **RO**]
14. $p \rightarrow \Diamond p$	[13 **RZ**]
15. $\Diamond p \rightarrow \Diamond\Diamond p$	[14 **RP**: p / $\Diamond p$]
16. $\Diamond\Diamond p \leftrightarrow \Diamond p$	[9, 15 **RD$_{\leftrightarrow}$**]

Aksjomaty rachunku ***S5***:

PC-aksjomaty

$\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$ (*aksjomat* **K**)

$\Box p \rightarrow p$ (*aksjomat* **T**)

$\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$ (*aksjomat* **E**)

(Pierwotne) reguły inferencyjne rachunku ***S5***:

RO:

$$\frac{A \rightarrow B \qquad A}{B}$$

RP:

$$\frac{A}{A\,[p_i\,/B]}$$

RG:

$$\frac{A}{\Box A}$$

RZ:

$$\frac{B}{B[\neg\Box\neg A\;/\!/\;\Diamond A]}$$

Jest oczywiste, że wszystkie tezy rachunków ***K***, ***D*** i ***T*** są też tezami rachunku ***S5***, przy czym nie jest na odwrót.

Pokażemy teraz, że każda teza rachunku ***B*** jest tezą rachunku ***S5***. W tym celu wystarczy udowodnić:

Twierdzenie 9.2. *Formuła* $p \to \Box\Diamond p$ *ma dowód w rachunku* ***S5***.

Dowód twierdzenia 9.2. Dowodem formuły $p \to \Box\Diamond p$ w rachunku ***S5*** jest:

1. $\Diamond p \to \Box\Diamond p$	[**E**]
2. $\Box p \to p$	[**T**]
3. $\Box\neg p \to \neg p$	[2 **RP**: p / $\neg p$]
4. $(\Box\neg p \to \neg p) \to (p \to \neg\Box\neg p)$	[$\mathbf{Ax_{PC}}$]
5. $p \to \neg\Box\neg p$	[4, 3 **RO**]
6. $p \to \Diamond p$	[5 **RZ**]
7. $p \to \Box\Diamond p$	[6, 1 **RSH**]

Dodajmy, że istnieją tezy rachunku ***S5***, które nie są tezami rachunku ***B***. Tak więc rachunek ***S5*** jest silniejszy od rachunku ***B***.

Można udowodnić, że każda teza rachunku ***S4*** jest tezą rachunku ***S5***. Mamy:

Twierdzenie 9.3. *Formuła $\Box p \to \Box\Box p$ ma dowód w rachunku* ***S5***.

Dowód twierdzenia 9.3. Budując dowód rozważanej formuły w rachunku ***S5***, skorzystamy – dla uproszczenia – z dostępnych reguł wtórnych (regułami takimi są m.in. wszystkie reguły wtórne, które wprowadziliśmy dla *KRZ* i dla rachunku ***K***).

1. $\Diamond\neg p \leftrightarrow \neg\Box p$	[Teza]	
2. $\Box\Diamond\neg p \leftrightarrow \Box\neg\Box p$	[1 **RE**]	
3. $\Box\neg p \leftrightarrow \neg\Diamond p$	[Teza]	
4. $\Box\neg\Box p \leftrightarrow \neg\Diamond\Box p$	[3 **RP**: p / $\Box p$]	
5. $(\Box\Diamond\neg p \leftrightarrow \Box\neg\Box p) \to ((\Box\neg\Box p \leftrightarrow \neg\Diamond\Box p) \to (\Box\Diamond\neg p \leftrightarrow \neg\Diamond\Box p))$		[$\mathbf{Ax_{PC}}$]
6. $(\Box\neg\Box p \leftrightarrow \neg\Diamond\Box p) \to (\Box\Diamond\neg p \leftrightarrow \neg\Diamond\Box p)$		[5, 2 **RO**]
7. $\Box\Diamond\neg p \leftrightarrow \neg\Diamond\Box p$		[6, 4 **RO**]
8. $\Box\Diamond\neg p \to \neg\Diamond\Box p$	[7 $\mathbf{R}^{*\to}$]	

9. $\Diamond p \to \Box\Diamond p$	[**E**]
10. $\Diamond\neg p \to \Box\Diamond\neg p$	[9 **RP**: p / $\neg p$]
11. $\Diamond\neg p \to \neg\Diamond\Box p$	[10, 8 **RSH**]
12. $(\Diamond\neg p \to \neg\Diamond\Box p) \to (\Diamond\Box p \to \neg\Diamond\neg p)$	[**Ax$_{PC}$**]
13. $\Diamond\Box p \to \neg\Diamond\neg p$	[12, 11 **RO**]
14. $\neg\Diamond\neg p \to \Box p$	[Teza]
15. $\Diamond\Box p \to \Box p$	[13, 14 **RSH**]
16. $\Box\Diamond\Box p \to \Box\Box p$	[15 RR]
17. $p \to \Box\Diamond p$	[Teza]
18. $\Box p \to \Box\Diamond\Box p$	[17 **RP**: p / $\Box p$]
19. $\Box p \to \Box\Box p$	[18, 16 **RSH**]

Widzimy, że aksjomat **4** rachunku ***S4*** jest dowodliwy w rachunku ***S5***, a zatem rachunek ***S4*** jest zawarty w rachunku ***S5***. Jednocześnie ***S5*** jest silniejszy od ***S4***, jako że aksjomat **E** nie jest dowodliwy w ***S4***.

Aksjomatyzując modalną logikę zdań ***S5***, zamiast aksjomatu **E** moglibyśmy równie dobrze przyjąć jako aksjomat formułę **5**:

$$\neg\Box p \rightarrow \Box\neg\Box p$$

Można pokazać, że powyższa formuła jest dowodliwa w ***S5*** przy podanej tu aksjomatyzacji, oraz że aksjomat **E** jest dowodliwy w systemie aksjomatycznym dla ***S5*** z powyższą formułą jako aksjomatem przyjętym na miejsce aksjomatu **E**. Pozostawiam to Państwu jako ćwiczenie.

System aksjomatyczny dla ***S5*** możemy również budować poprzez dodanie do aksjomatów rachunku ***S4*** aksjomatu **B**, tj. formuły:

$$p \rightarrow \Box\Diamond p$$

W takim systemie formuła (aksjomat) **E** byłaby dowodliwa; popatrzmy:

1. $p \to \Box\Diamond p$	[**B**]
2. $\Diamond p \to \Box\Diamond\Diamond p$	[1 RP: p / $\Diamond p$]
3. $\Diamond\Diamond p \leftrightarrow \Diamond p$	[Teza] **rachunku S4**
4. $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$	[3 $R^{*\leftrightarrow/\to}$]
5. $\Box\Diamond\Diamond p \to \Box\Diamond p$	[4 **RR**]
6. $\Diamond p \to \Box\Diamond p$	[2, 5 **RSH**]

Komentarz dotyczący różnych sposobów charakteryzowania omówionych modalnych rachunków zdań: zostanie podany na wykładzie :)

Związki zawierania między zbiorami tez rozważanych modalnych rachunków zdań – *a zatem również między wyznaczonymi/ formalizowanymi przez te rachunki modalnymi logikami zdań*! - przedstawia następujący rysunek (strzałka $\downarrow$ symbolizuje inkluzję właściwą zbiorów tez):

$$\begin{tikzcd} & \boldsymbol{K} \arrow[d] & \\ & \boldsymbol{D} \arrow[d] & \\ & \boldsymbol{T} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \boldsymbol{B} \arrow[dr] & & \boldsymbol{S4} \arrow[dl] \\ & \boldsymbol{S5} & \end{tikzcd}$$

Zbiory tez rachunków ***B*** i ***S4*** krzyżują się.

Przedstawione systemy aksjomatyczne modalnych logik zdaniowych mają takie same zestawy (pierwotnych) reguł inferencyjnych i **PC**-aksjomatów. Aksjomatem specyficznym każdego z nich jest aksjomat **K**. Systemy te różnią się doborem aksjomatów specyficznych z następującej listy:

D: $\Box p \to \Diamond p$

T: $\Box p \to p$

B: $p \to \Box\Diamond p$

4: $\Box p \to \Box\Box p$

E: $\Diamond p \to \Box\Diamond p$

Rozważane modalne rachunki zdań możemy krótko scharakteryzować poprzez wymienienie aksjomatów specyficznych:

K = **K**
D = **KD**
T = **KT**
B = **KTB**
S4 = **KT4**
S5 = **KTE** = **KTB4**

Jak widać, nie wyczerpaliśmy wszystkich możliwości.

Możliwych kombinacji zawierających aksjomat **K** jest **32**, ale różnych modalnych logik zdań aksjomatyzowalnych za pomocą aksjomatów z podanej listy (oraz aksjomatu **K**, przyjętych tu pierwotnych reguł inferencyjnych i **PC**-aksjomatów) jest tylko **15**, gdyż część kombinacji daje różne aksjomatyzacje tych samych modalnych logik zdań, z uwagi na wzajemną dowodliwość niektórych formuł.

Dodajmy na zakończenie, że każda z tych 15 modalnych logik zdań jest tzw. normalną modalną logiką zdań, tzn. modalną logiką zdań zawiera aksjomat **K** oraz domkniętą z uwagi na regułę Gödla.

Normalne modalne logiki zdań uważane są za najważniejsze modalne logiki zdań.

Mają one też bardzo intuicyjną semantykę. O tym jednak na następnym wykładzie.

Na który zapraszam :)