

Andrzej Wiśniewski
Logika II

Materiały do wykładu dla studentów kognitywistyki

*Wykłady 10b i 11. Semantyka relacyjna dla normalnych
modalnych rachunków zdań*

Struktury modelowe

Przedstawimy teraz pewien wariant **semantyki** typu **Kripkego** (zwaną też **semantyką światów możliwych**, lub **semantyką relacyjną**) dla normalnych modalnych rachunków zdań (zob. poprzedni wykład).

Podstawowym pojęciem będzie struktura modelowa (ang. *frame*).

Definicja 10.1. **Strukturą modelową** nazywamy dowolną parę uporządkowaną $\langle \mathbf{W}, \mathbf{R} \rangle$, gdzie \mathbf{W} jest niepustym zbiorem, natomiast \mathbf{R} jest binarną relacją w \mathbf{W} .

Terminologia. Gdy $\langle \mathbf{W}, \mathbf{R} \rangle$ jest strukturą modelową, to zbiór \mathbf{W} nazywamy zbiorem **światów możliwych** (ang. *possible worlds*), natomiast relację \mathbf{R} nazywamy relacją **alternatywności** lub relacją **dostępności** (ang. *alternativeness*, *accessibility*).

Komentarz: Zapraszam na wykład :)

Terminologia. Napis wRw^* czytamy „świat w^* jest alternatywny względem świata w ” lub „świat w^* jest dostępny ze świata w ”.

Wartościowanie na strukturze modelowej

Kolejne pojęcie to wartościowanie określone na strukturze modelowej.

Definicja 10.2. Niech $\langle W, R \rangle$ będzie strukturą modelową. Wartościowaniem określonym na strukturze modelowej $\langle W, R \rangle$ nazywamy dowolną funkcję V , której argumentami są formuły języka MRZ i elementy zbioru W , natomiast wartościami – prawda 1 i fałsz 0 , spełniająca następujące warunki:

(1) dla dowolnej zmiennej zdaniowej p_i , dla każdego $w \in W$: $V(p_i, w) = 1$ lub $V(p_i, w) = 0$;

(2) dla dowolnej formuły A języka MRZ, dla każdego $w \in W$: $V(\neg A, w) = 1$ wtw $V(A, w) = 0$;

(3) dla dowolnych formuł A, B języka MRZ, dla każdego $w \in W$:

- $V(A \wedge B, w) = 1$ wtw $V(A, w) = 1$ oraz $V(B, w) = 1$;
- $V(A \vee B, w) = 1$ wtw $V(A, w) = 1$ lub $V(B, w) = 1$;
- $V(A \rightarrow B, w) = 1$ wtw $V(A, w) = 0$ lub $V(B, w) = 1$;
- $V(A \leftrightarrow B, w) = 1$ wtw $V(A, w) = V(B, w)$;

(4) dla dowolnej formuły A języka MRZ, dla każdego $w \in W$:

- $V(\Diamond A, w) = 1$ wtw istnieje $w^* \in W$ takie, że wRw^* oraz $V(A, w^*) = 1$;
- $V(\Box A, w) = 1$ wtw dla każdego $w^* \in W$ takiego, że wRw^* : $V(A, w^*) = 1$.

Modele Kripkego (modele relacyjne)

Możemy teraz określić pojęcie *modelu Kripkego*, zwanego też *modelem relacyjnym*.

Definicja 10.3. Modelem Kripkego nazywamy trójkę uporządkowaną $\langle W, R, V \rangle$, gdzie $\langle W, R \rangle$ tworzy strukturę modelową, natomiast V jest wartościowaniem określonym na strukturze modelowej $\langle W, R \rangle$.

Uwaga: Interesują nas tutaj wyłącznie normalne modalne rachunki zdań i modele Kripkego dla tych rachunków. Semantyki „typu Kripkego” istnieją także dla innych modalnych rachunków zdań, z tym, że w tych semantykach nieco inaczej należy określić pojęcie modelu i/lub pewne dalsze pojęcia semantyczne. Modele takie są jednak również nazywane „modelami Kripkego”. Należy zatem pamiętać, że pojęcia modelu Kripkego używamy tutaj w jednym z jego możliwych znaczeń, związanym z rozpatrywaną klasą logik.

Terminologia. Gdy $\langle W, R \rangle$ jest strukturą modelową, a V jest wartościowaniem określonym na tej strukturze modelowej, to powiemy, że model Kripkego $\langle W, R, V \rangle$ jest modelem Kripkego *opartym na* strukturze modelowej $\langle W, R \rangle$.

Prawdziwość formuły w świecie danego modelu i w modelu

Terminologia. Dalej zamiast „model Kripkego” będziemy mówili po prostu „model” (zawsze jednak rozumiejąc to pojęcie w sensie definicji 10.3). Podobnie mówiąc o formułach, będziemy mieli zawsze na myśli formuły języka *MRZ*. Pod pojęciem *światów modelu* $M = \langle W, R, V \rangle$ rozumiemy elementy zbioru W . Tak więc w jest światem modelu $M = \langle W, R, V \rangle$ wtw $w \in W$. Analogicznie rozumiemy pojęcie świata struktury modelowej $\langle W, R \rangle$.

Definicja 10.4. *Mówimy, że formuła A jest prawdziwa w świecie w modelu $\langle W, R, V \rangle$ wtw $V(A, w) = 1$.*

Definicja 10.5. *Mówimy, że formuła A jest prawdziwa w modelu $\langle W, R, V \rangle$ wtw formuła A jest prawdziwa w każdym świecie modelu $\langle W, R, V \rangle$.*

To, że formuła A jest prawdziwa w modelu $M = \langle W, R, V \rangle$, zapisujemy:

$$M \models A.$$

Prawdziwość (validity) formuły w strukturze modelowej

Na danej strukturze modelowej możemy określić wiele wartościowań, i w konsekwencji zbudować wiele modeli opartych na tej strukturze.

Definicja 10.6. *Mówimy, że formuła A jest prawdziwa w strukturze modelowej $\langle W, R \rangle$ wtw formuła A jest prawdziwa w każdym modelu opartym na strukturze modelowej $\langle W, R \rangle$.*

Komentarz: Prawdziwość formuły A w strukturze modelowej sprowadza się, intuicyjnie rzecz biorąc, do: „niezależnie od tego, jakie wartościowanie V określimy na [rozważanej] strukturze modelowej oraz jaki świat w tej struktury weźmiemy pod uwagę, i tak mamy $V(A, w) = 1$.”

Uwaga językowa: Użycie pojęcia „prawdziwy” w definicji 10.6 może razić. Język angielski radzi sobie tutaj lepiej, jako że mamy w nim, obok *true*, również *valid*. Definicja 10.6 określa w istocie pojęcie *is valid in a frame* $\langle W, R \rangle$.

Z podobnym kłopotem językowym spotkamy się również za chwilę.

Prawdziwość (validity) formuły w klasie struktur modelowych

Uogólniając dalej, dostajemy następujące pojęcie:

Definicja 10.7. *Mówimy, że formuła A jest prawdziwa w (niepustej) klasie struktur modelowych Φ wtw formuła A jest prawdziwa w każdej strukturze modelowej należącej do klasy Φ .*

Komentarz: Tym razem intuicja jest następująca: „niezależnie od tego, którą strukturę modelową należąca do Φ weźmiemy pod uwagę, jakie wartościowanie \mathbf{V} określimy na [rozważanej] strukturze modelowej oraz jaki świat \mathbf{w} tej struktury weźmiemy pod uwagę, i tak mamy $\mathbf{V}(A, \mathbf{w}) = 1$ ”.

Można postawić pytanie:

Czy istnieją formuły (języka MRZ), które są prawdziwe w klasie wszystkich struktur modelowych?

Odpowiedź na to pytanie jest **twierdząca**.

Jak zobaczymy, są nimi wszystkie tezy rachunku/ logiki \mathbf{K} – i tylko one.

Reguły inferencyjne MRZ a transmisja prawdziwości

Zacznijmy od reguł inferencyjnych. Zagadnienie transmisji prawdziwości **relatywizujemy** do ustalonej klasy struktur modelowych (i w konsekwencji opartych na nich modeli).

Twierdzenie 10.1. *Niech Φ będzie niepustą klasą struktur modelowych. Jeżeli formuła postaci $A \rightarrow B$ jest prawdziwa w Φ oraz formuła A jest prawdziwa w Φ , to formuła B jest prawdziwa w Φ .*

Dowód: Zapraszam na wykład :)

Twierdzenie 10.2. *Niech Φ będzie niepustą klasą struktur modelowych. Jeżeli formuła B powstaje z formuły A poprzez zastosowania reguły podstawiania RP, lub reguły zastępowania RZ, lub reguły Gödla RG, oraz formuła A jest prawdziwa w Φ , to formuła B jest prawdziwa w Φ .*

Dowód: Rozważymy tylko przypadek RG – pozostałe przypadki są oczywiste.

Dowód twierdzenia 10.2

Założmy, że A jest prawdziwa w Φ oraz że $\Box A$ nie jest prawdziwa w Φ .

Z tego drugiego założenia wnosimy, że istnieją: struktura modelowa $\langle W, R \rangle$ należąca do Φ , model $\langle W, R, V \rangle$ oparty na $\langle W, R \rangle$ oraz świat w tego modelu takie, że $V(\Box A, w) = 0$. Korzystając z definicji 10.2, dostajemy, że dla pewnego świata $w^* \in W$ takiego, że wRw^* (a więc alternatywnego względem w) zachodzi $V(A, w^*) = 0$. To już jednak znaczy, że formuła A nie jest prawdziwa w rozważanym modelu $\langle W, R, V \rangle$, skąd wnosimy – na mocy definicji 10.6 – że nie jest ona prawdziwa w strukturze modelowej $\langle W, R \rangle$. Zatem, na mocy definicji 10.7, formuła A nie jest prawdziwa w analizowanej klasie struktur modelowych Φ . Otrzymaliśmy sprzeczność. ■

Następstwem twierdzeń 10.1 i 10.2 jest:

Wniosek 10.1. *Formuła powstająca za pomocą reguł: RO, RP, RG, RZ z formuły lub formuł, która/które są prawdziwe w danej klasie struktur modelowych, jest też prawdziwa w tej klasie struktur modelowych.*

Status semantyczny **PC**-aksjomatów i aksjomatu **K**

Bez dowodu podamy:

Twierdzenie 10.3. *Każdy **PC**-aksjomat jest prawdziwy w klasie wszystkich struktur modelowych.*

Natomiast udowodnimy:

Twierdzenie 10.4. *Aksjomat **K**, tj. formuła*

$$\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$$

jest prawdziwy w dowolnej niepustej klasie struktur modelowych.

Dowód: Zapraszam na wykład :)

Zauważmy, że z twierdzenia 10.4 otrzymujemy:

Wniosek 10.2. *Aksjomat **K** jest prawdziwy w klasie wszystkich struktur modelowych.*

Widzimy zatem, że wszystkie aksjomaty modalnego rachunku zdań **K** są prawdziwe w klasie wszystkich struktur modelowych. Wnosimy stąd, że **każdy aksjomat rachunku **K** jest prawdziwy w każdym świecie dowolnego modelu Kripkego** (dla normalnych modalnych rachunków zdań).

Semantyka dla modalnego rachunku zdań \mathbf{K}

Ostatecznie otrzymujemy:

Twierdzenie 10.5. *Każda teza modalnego rachunku zdań \mathbf{K} jest prawdziwa w klasie wszystkich struktur modelowych.*

Dowód: Jest to oczywisty wniosek z twierdzeń 10.1, 10.2, 10.3 i 10.4. ■

Bez dowodu (albowiem dowód jest znacznie trudniejszy) podamy natomiast:

Twierdzenie 10.6 (o pełności rachunku \mathbf{K}). *Każda formuła (języka MRZ), która jest prawdziwa w klasie wszystkich struktur modelowych, jest tezą modalnego rachunku zdań \mathbf{K} .*

Wniosek 10.3. *Tezami rachunku \mathbf{K} są te – i wszystkie te ! – formuły języka MRZ, które są prawdziwe w **każdym świecie dowolnego modelu** Kripkego.*

W przypadku kolejnych modalnych rachunków zdań musimy nałożyć pewne ograniczenia na klasę odpowiednich struktur modelowych/ modeli Kripkego.

Semantyka dla modalnego rachunku zdań **D**

Wprowadźmy teraz:

Definicja 10.8. *Strukturę modelową $\langle W, R \rangle$, w której relacja alternatywności R jest seryjna w W , tj. spełnia warunek:*

(srj) dla każdego $w \in W$ istnieje $w^ \in W$ takie, że wRw^**

nazywamy seryjną.

Modelem seryjnym nazywamy dowolny model oparty na seryjnej strukturze modelowej.

Udowodnimy:

Twierdzenie 10.7. *Formuła **D**, tj. formuła:*

$$\Box p \rightarrow \Diamond p$$

jest prawdziwa w klasie wszystkich seryjnych struktur modelowych.

*Semantyka dla modalnego rachunku zdań **D***

Dowód (twierdzenia 10.7): Załóżmy, że dla pewnej seryjnej struktury modelowej $\langle \mathbf{W}, \mathbf{R} \rangle$ i dla pewnego modelu $\langle \mathbf{W}, \mathbf{R}, \mathbf{V} \rangle$ opartego na tej strukturze mamy $\mathbf{V}(\Box A, \mathbf{w}) = 1$ dla pewnego (dowolnego) $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$. Wnosimy stąd, że formuła A jest prawdziwa w każdym świecie (rozważanego modelu), który jest alternatywny do świata \mathbf{w} . Skoro \mathbf{R} jest seryjna w \mathbf{W} , to (jakiś) świat \mathbf{w}^* alternatywny do świata \mathbf{w} z pewnością istnieje. Zatem $\mathbf{V}(\Diamond A, \mathbf{w}) = 1$. Tak więc dla formuły **D**, tj. formuły:

$$\Box p \rightarrow \Diamond p$$

zachodzi $\mathbf{V}(\Box p \rightarrow \Diamond p, \mathbf{w}) = 1$. Wobec dowolności \mathbf{w} wnosimy, że formuła **D** jest prawdziwa w modelu $\langle \mathbf{W}, \mathbf{R}, \mathbf{V} \rangle$, skąd – z uwagi na dowolność \mathbf{V} – wnosimy, że **D** jest prawdziwa w każdym modelu seryjnym, a zatem także w każdej seryjnej strukturze modelowej. ■

Semantyka dla modalnego rachunku zdań **D**

Przypomnę teraz, że **D = KD**.

Można udowodnić:

Twierdzenie 10.8. *Każda teza modalnego rachunku zdań **D** jest prawdziwa w klasie wszystkich seryjnych struktur modelowych.*

Dowód: Zapraszam na wykład :)

Można również udowodnić:

Twierdzenie 10.9. (o pełności rachunku **D**). *Każda formuła (języka MRZ), która jest prawdziwa w klasie wszystkich seryjnych struktur modelowych, jest tezą modalnego rachunku zdań **D**.*

Ostateczny wniosek jest następujący:

Wniosek 10.4. *Tezami rachunku **D** są te – i wszystkie te ! – formuły języka MRZ, które są prawdziwe w każdym świecie dowolnego takiego modelu Kripkego, w którym to modelu relacja alternatywności jest **seryjna**.*

Semantyka dla modalnego rachunku zdań **T**

Jak zobaczymy aksjomat **T** rachunku **T** „wymusza” zwrotność relacji alternatywności.

Definicja 10.9. *Strukturę modelową $\langle W, R \rangle$, w której relacja alternatywności R jest zwrotna w W , nazywamy **zwrotną**.*

Modelem zwrotnym nazywamy dowolny model oparty na zwrotnej strukturze modelowej.

Udowodnimy:

Twierdzenie 10.10. *Formuła **T**, tj. formuła:*

$$\Box p \rightarrow p$$

jest prawdziwa w klasie wszystkich zwrotnych struktur modelowych.

Semantyka dla modalnego rachunku zdań **T**

Dowód (twierdzenia 10.10): Załóżmy, że dla pewnej zwrotnej struktury modelowej $\langle \mathbf{W}, \mathbf{R} \rangle$ i dla pewnego modelu $\langle \mathbf{W}, \mathbf{R}, \mathbf{V} \rangle$ opartego na tej strukturze zachodzi $\mathbf{V}(\Box p, \mathbf{w}) = \mathbf{1}$ dla pewnego (dowolnego) $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$. Zatem $\mathbf{V}(p, \mathbf{w}^*) = \mathbf{1}$ dla dowolnego $\mathbf{w}^* \in \mathbf{W}$ takiego, że $\mathbf{w} \mathbf{R} \mathbf{w}^*$. Skoro \mathbf{R} jest zwrotna w \mathbf{W} , to $\mathbf{w} \mathbf{R} \mathbf{w}$. Tak więc $\mathbf{V}(p, \mathbf{w}) = \mathbf{1}$. Wnosimy stąd, że $\mathbf{V}(\Box p \rightarrow p, \mathbf{w}) = \mathbf{1}$. Wobec dowolności \mathbf{w} , modelu $\langle \mathbf{W}, \mathbf{R}, \mathbf{V} \rangle$ i struktury modelowej $\langle \mathbf{W}, \mathbf{R} \rangle$ - o których założyliśmy tylko, że są to modele/ struktury modelowe zwrotne – dostajemy, że formuła **T** jest prawdziwa w każdej zwrotnej strukturze modelowej. ■

Dygresja. Nie jest tak, że formuła **T** jest prawdziwa w klasie wszystkich w ogóle struktur modelowych. Weźmy model $\langle \mathbf{W}, \mathbf{R}, \mathbf{V} \rangle$ taki, że $\mathbf{W} = \{\mathbf{w}, \mathbf{w}^*\}$, $\mathbf{w} \neq \mathbf{w}^*$, $\mathbf{R} = \{\langle \mathbf{w}, \mathbf{w}^* \rangle, \langle \mathbf{w}^*, \mathbf{w} \rangle\}$ oraz $\mathbf{V}(p, \mathbf{w}) = \mathbf{0}$ i $\mathbf{V}(p, \mathbf{w}^*) = \mathbf{1}$. W tym modelu mamy $\mathbf{V}(\Box p, \mathbf{w}) = \mathbf{1}$, czyli też $\mathbf{V}(\Box p \rightarrow p, \mathbf{w}) = \mathbf{0}$. Zauważmy jednak, że \mathbf{R} nie jest zwrotna w $\{\mathbf{w}, \mathbf{w}^*\}$.

Semantyka dla modalnego rachunku zdań T

Jak pamiętamy (? :)), $T = \mathbf{KT}$. Podobnie jak poprzednio, dostajemy:

Twierdzenie 10.11. *Każda teza modalnego rachunku zdań T jest prawdziwa w klasie wszystkich zwrotnych struktur modelowych.*

Dowód: Zapraszam na wykład :)

Można udowodnić (choć tego dzisiaj nie zrobimy :))

Twierdzenie 10.12 (o pełności rachunku T). *Każda formuła (języka MRZ), która jest prawdziwa w klasie wszystkich zwrotnych struktur modelowych, jest tezą modalnego rachunku zdań T .*

Zatem:

Wniosek 10.5. *Tezami rachunku T są te – i wszystkie te ! – formuły języka MRZ, które są prawdziwe w każdym świecie dowolnego takiego modelu Kripkego, w którym to modelu relacja alternatywności jest **zwrotna**.*

Semantyka dla modalnego rachunku zdań **B**

Przypomnijmy formułę **B**:

$$p \rightarrow \Box \Diamond p$$

Mówiąc ogólnie, dla prawdziwości formuły **B** potrzebna jest symetryczność relacji alternatywności.

Definicja 10.10. *Strukturę modelową $\langle W, R \rangle$, w której relacja alternatywności R jest symetryczna w W , nazywamy **symetryczną**.*

Modelem symetrycznym nazywamy dowolny model oparty na symetrycznej strukturze modelowej.

Twierdzenie 10.13. *Formuła **B** jest prawdziwa w klasie wszystkich symetrycznych struktur modelowych.*

Semantyka dla modalnego rachunku zdań **B**

Dowód (twierdzenia 10.13): Przypuśćmy, że istnieje model symetryczny $\langle W, R, V \rangle$ taki, że dla pewnego $w \in W$ mamy $V(p \rightarrow \Box\Diamond p, w) = 0$. Wówczas $V(p, w) = 1$ oraz $V(\Box\Diamond p, w) = 0$. Zatem dla pewnego $w^* \in W$ takiego, że wRw^* mamy $V(\Diamond p, w^*) = 0$, skąd wnosimy, że dla każdego $x \in W$ takiego, że w^*Rx zachodzi $V(p, x) = 0$. Ponieważ jest tak, że wRw^* , a R jest relacją symetryczną w zbiorze W (albowiem rozważamy model symetryczny), to mamy też w^*Rw . Zatem $V(p, w) = 0$. Otrzymaliśmy sprzeczność. ■

Dygresja: I znów, nie jest tak, że formuła **B** jest prawdziwa w każdej strukturze modelowej. Skonstruowanie odpowiedniego „kontrmodelu” pozostawiam Państwu :)

Semantyka dla modalnego rachunku zdań **B**

Przypominam, że $\mathbf{B} = \mathbf{KTB}$. Zachodzi:

Twierdzenie 10.14. *Każda teza modalnego rachunku zdań **B** jest prawdziwa w klasie tych wszystkich struktur modelowych, które są zarazem zwrotne i symetryczne.*

Dowód można łatwo przeprowadzić korzystając z tego, co zostało powiedziane wyżej :) ■

Zachodzi również:

Twierdzenie 10.15 (o pełności rachunku **B**). *Każda formuła (języka MRZ), która jest prawdziwa w klasie wszystkich zarazem zwrotnych i symetrycznych struktur modelowych, jest tezą modalnego rachunku zdań **B**.*

Podsumowując:

Wniosek 10.6. *Tezami rachunku **B** są te – i wszystkie te ! – formuły języka MRZ, które są prawdziwe w każdym świecie dowolnego takiego modelu Kripkego, w którym to modelu relacja alternatywności jest **zwrotna i symetryczna**.*

Semantyka dla modalnego rachunku zdań **S4**

Formuła **4** to:

$$\Box p \rightarrow \Box \Box p$$

Pokażemy, że dla prawdziwości formuły **4** potrzeba i wystarcza, aby relacja alternatywności była przechodnia.

Definicja 10.11. *Strukturę modelową $\langle W, R \rangle$, w której relacja alternatywności R jest przechodnia w W , nazywamy **przechodnią**.*

Modelem przechodnim nazywamy dowolny model oparty na przechodniej strukturze modelowej.

Udowodnimy teraz:

Twierdzenie 10.16. *Formuła **4** jest prawdziwa w klasie wszystkich przechodnich struktur modelowych.*

Semantyka dla modalnego rachunku zdań S4

Dowód (twierdzenia 10.16): Przypuśćmy, że istnieje model przechodni $\langle W, R, V \rangle$, w którym dla pewnego $w \in W$ mamy $V(\Box p \rightarrow \Box\Box p, w) = 0$. Zatem $V(\Box p, w) = 1$ oraz $V(\Box\Box p, w) = 0$. Wnosimy stąd, że dla pewnego świata w^* alternatywnego wobec świata w zachodzi $V(\Box p, w^*) = 0$, czyli dla pewnego świata w^{**} alternatywnego wobec świata w^* mamy $V(p, w^{**}) = 0$. Ponieważ R jest przechodnia w zbiorze W , na podstawie wRw^* i w^*Rw^{**} dostajemy wRw^{**} . Tak więc $V(\Box p, w) = 0$. Sprzeczność.

■

Dygresja: Oto przykład modelu (nieprzechodniego!), w którym formuła 4 nie jest prawdziwa. O modelu $\langle W, R, V \rangle$ zakładamy co następuje:

- $W = \{w, w^*, w^{**}\}$, gdzie w, w^*, w^{**} są różne między sobą.
- $R = \{\langle w, w \rangle, \langle w, w^* \rangle, \langle w^*, w^{**} \rangle\}$.
- V spełnia (m.in.) następujące warunki: $V(p, w) = 1$; $V(p, w^*) = 1$; $V(p, w^{**}) = 0$.

Mamy:

$V(\Box p, w) = 1$ – ponieważ $V(p, w) = 1$ oraz $V(p, w^*) = 1$, a w i w^* to jedyne światy alternatywne względem w .

$V(\Box p, w^*) = 0$ – ponieważ $V(p, w^{**}) = 0$ oraz w^*Rw^{**} .

$V(\Box\Box p, w) = 0$ – ponieważ $V(\Box p, w^*) = 0$ oraz wRw^* .

Tak więc $V(\Box p \rightarrow \Box\Box p, w) = 0$.

Semantyka dla modalnego rachunku zdań **S4**

Korzystając z dotychczasowych ustaleń, można udowodnić:

Twierdzenie 10.17. *Każda teza modalnego rachunku zdań **S4** jest prawdziwa w klasie tych wszystkich struktur modelowych, które są zarazem zwrotne i przechodnie.*

Zachodzi również (co podajemy bez dowodu):

Twierdzenie 10.18 (o pełności rachunku **S4**). *Każda formuła (języka MRZ), która jest prawdziwa w klasie wszystkich zarazem zwrotnych i przechodnich struktur modelowych, jest tezą modalnego rachunku zdań **S4**.*

Tak więc:

Wniosek 10.7. *Tezami rachunku **S4** są te – i wszystkie te ! – formuły języka MRZ, które są prawdziwe w każdym świecie dowolnego takiego modelu Kripkego, w którym to modelu relacja alternatywności jest **zwrotna i przechodnia**.*

Semantyka dla modalnego rachunku zdań **S5**

Jak pamiętamy z poprzedniego wykładu, **S5** = **KTE** = **KTB4**.

Ponieważ dla prawdziwości aksjomatów **T**, **B** i **4** potrzebne są, kolejno, zwrotność, symetryczność i przechodniość relacji alternatywności, przeprowadzone dotychczas rozważania pozwalają nam udowodnić:

Twierdzenie 10.19. *Każda teza modalnego rachunku zdań **S5** jest prawdziwa w klasie tych wszystkich struktur modelowych, w których relacja alternatywności jest relacją równoważnościową.*

Bez dowodu podamy:

Twierdzenie 10.20 (o pełności rachunku **S5**). *Każda formuła (języka MRZ), która jest prawdziwa w klasie wszystkich takich struktur modelowych, w których relacja alternatywności jest relacją równoważnościową, jest tezą modalnego rachunku zdań **S5**.*

Wniosek 10.8. *Tezami rachunku **S5** są te – i wszystkie te ! – formuły języka MRZ, które są prawdziwe w każdym świecie dowolnego takiego modelu Kripkego, w którym to modelu relacja alternatywności jest **równoważnościowa**.*

Dygresja o rachunku **S5**

Z uwagi na pewne szczególne własności rachunku **S5** (o których na wykładzie – zapraszam :)) semantykę światów możliwych dla **S5** można znacząco uprościć. Otóż zachodzi:

Twierdzenie 10.21. *Formuła A (języka MRZ) jest tezą rachunku zdań **S5** wtw formuła A jest prawdziwa w dowolnym modelu Kripkego, w którym relacja alternatywności jest uniwersalna.*

Mówiąc, że relacja alternatywności R modelu $\langle W, R, V \rangle$ jest uniwersalna, mamy na myśli to, że dla dowolnych $w, w^* \in W$ (niekoniecznie różnych) zachodzi wRw^* .

Jeśli tak, to można uprościć pojęcie modelu dla **S5**, przyjmując, że modelem jest para uporządkowana $\langle W, V \rangle$, gdzie W jest niepustym zbiorem, natomiast V jest wartościowaniem definiowanym „prawie tak” jak poprzednio – to „prawie” znaczy tylko tyle, że w warunkach dla formuł postaci $\Box A$ oraz $\Diamond A$ pomijamy relatywizacje do R .

Dygresja o aksjomacie **E**

Rachunek **S5** zaksjomatyzowaliśmy poprzez przyjęcie jako aksjomatów specyficznych formuł **K**, **T** oraz **E**, tj. $\Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$. Powstaje pytanie, jakie własności relacji alternatywności „wymusza” sama formuła **E**.

Własnością tą jest tzw. euklidesowość w zbiorze światów możliwych.

Definicja 10.12. *Strukturę modelową $\langle W, R \rangle$, w której relacja alternatywności R jest euklidesowa w W , tj. spełnia warunek:*

(euc) dla dowolnych $w, w^, w^{**} \in W$: jeżeli wRw^* oraz wRw^{**} , to w^*Rw^{**} nazywamy euklidesową.*

Modelem euklidesowym nazywamy dowolny model oparty na euklidesowej strukturze modelowej.

Dygresja o aksjomacie **E**

Udowodnimy:

Twierdzenie 10.20. *Formuła **E** jest prawdziwa w klasie wszystkich euklidesowych struktur modelowych.*

Dowód: Załóżmy, że istnieje model euklidesowy $\langle W, R, V \rangle$ taki, że $V(\diamond p \rightarrow \Box \diamond p, w) = 0$ dla pewnego $w \in W$. Wówczas $V(\diamond p, w) = 1$ oraz $V(\Box \diamond p, w) = 0$. Z tego drugiego założenia wnosimy, że istnieje $w^* \in W$ takie, że wRw^* oraz $V(\diamond p, w^*) = 0$. Jeśli tak, to dla każdego świata x alternatywnego względem w^* mamy $V(p, x) = 0$. Z drugiej strony, skoro $V(\diamond p, w) = 1$, to istnieje $w^{**} \in W$ takie, że wRw^{**} oraz $V(p, w^{**}) = 1$. Skoro wRw^* oraz wRw^{**} , to z euklidesowości R wnosimy w^*Rw^{**} . Zatem istnieje świat alternatywny x względem w^* (mianowicie w^{**}) taki, że $V(p, x) = 1$. Otrzymaliśmy sprzeczność. ■

Komentarz: Zapraszam na wykład :)

Zestawienia

Dla celów mnemotechnicznych zestawmy schematycznie uzyskane wyniki.

<i>Formuła / aksjomat</i>	<i>Relacja alternatywności w strukturze modelowej / modelu</i>
D: $\Box p \rightarrow \Diamond p$	<i>seryjna</i>
T: $\Box p \rightarrow p$	<i>zwrotna</i>
B: $p \rightarrow \Box \Diamond p$	<i>symetryczna</i>
4: $\Box p \rightarrow \Box \Box p$	<i>przechodnia</i>
E: $\Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$	<i>euklidesowa</i>

Tabela 1.

<i>Modalny rachunek zdań</i>	<i>Modele Kripkego</i>
$K = K$	<i>wszystkie</i>
$D = KD$	<i>seryjne</i>
$T = KT$	<i>zwrotne</i>
$B = KTB$	<i>zarazem zwrotne i symetryczne</i>
$S4 = KT4$	<i>zarazem zwrotne i przechodnie</i>
$S5 = KTE = KTB4$	<i>zarazem zwrotne, symetryczne i przechodnie</i>

Tabela 2.

Pamiętając, że normalne modalne rachunki zdań są wyznaczone przez kombinacje aksjomatów **K**, **D**, **T**, **B**, **4** i **E** (zob. poprzedni wykład), mogą się teraz Państwo z łatwością domyślić, jakie modele Kripkego charakteryzują – i są charakteryzowane przez – pozostałe 10 rachunków :)

Komentarz dotyczący innych ujęć semantyki Kripkego dla normalnych modalnych rachunków zdań: Zapraszam na wykład :)