Andrzej Wiśniewski

Logika II

Materiały do wykładu dla studentów kognitywistyki

Wykłady 12 i 13. Metoda tabel analitycznych dla normalnych modalnych rachunków zdań

Wprowadzenie

Podobnie jak w przypadku *KRZ* (i *KRP* !), również dla normalnych modalnych rachunków zdań (a także dla innych *MRZ*) istnieje metoda tabel analitycznych. Jest to *metoda dowodowa*: zamkniętą tabelę można uważać za dowód odpowiedniej tezy *MRZ*. Metoda ta jest motywowana semantycznie – w istocie jest ona oparta na semantyce Kripkego dla *MRZ*. Nie ma w tym nic dziwnego, jako że zachodzą odpowiednie twierdzenia o adekwatności i pełności normalnych modalnych rachunków zdań względem semantyk typu Kripkego.

Podejście tabelowe w *MRZ* ma wiele wariantów. Najbardziej popularna jest wersja metody tabel analitycznych opracowana przez Melvina Fittinga. Bardziej „przyjazna dla użytkownika" wydaje się jednak być metoda tabel analitycznych w wersji zaproponowanej przez Grahama Priesta. Właśnie ta wersja zostanie tutaj przedstawiona. Ograniczymy się do normalnych modalnych rachunków zdań ***K***, ***D***, ***T***, ***B***, ***S4*** i ***S5***.

Prezentacje tego wykładu będą miały nieco „inżynierski" charakter – skoncentruję się tutaj na tym, jak budować tabele, tylko objaśniając, dlaczego właściwie metoda tabel analitycznych działa (a więc pominę „drobiazgową" – czy też, jak kto woli, „rzetelną" - charakterystykę metalogiczną).

Budując tabele dla *MRZ*, operujemy na formułach indeksowanych. Formuła indeksowana podpada pod schemat:

(*) A, i

gdzie A jest formułą języka modalnego rachunku zdań, natomiast i jest liczebnikiem. Liczebniki to: 0, 1, 2, 3, 4, ... Intuicyjnie rzecz biorąc, liczebniki są nazwami światów możliwych w modelu Kripkego. Formułę indeksowaną postaci:

$$A, i$$

możemy intuicyjnie rozumieć następująco:

formuła A jest prawdziwa w świecie możliwym oznaczanym przez liczebnik i.

Oprócz formuł indeksowanych o schemacie (*) potrzebujemy jeszcze formuł relacyjnych podpadających pod schemat:

(**) iRj

gdzie i, j są liczebnikami, natomiast R, intuicyjnie rzecz biorąc, oznacza relację alternatywności w modelu Kripkego. Formułę relacyjną postaci (**) możemy rozumieć następująco: *świat oznaczany przez liczebnik j jest alternatywny względem świata oznaczanego przez liczebnik i.*

Intuicje

Budując tabelę analityczną dla formuły A języka *MRZ*, rozpoczynamy od formuły indeksowanej postaci:

(***) $\qquad \neg A, 0$

Takie „otwarcie” ma sens następujący: *przypuśćmy*, że formuła A *nie jest prawdziwa* w pewnym świecie możliwym, który oznaczamy sobie przez 0. Budując tabelę, mamy nadzieję, że takie założenie doprowadzi do „sprzeczności”. Gdy tak się stanie, możemy wnosić, że formuła A *jest prawdziwa* w każdym świecie dowolnego modelu Kripkego (tak dla rachunku ***K***) lub w każdym świecie dowolnego takiego modelu Kripkego, w którym relacja alternatywności spełnia określone warunki (tak dla pozostałych normalnych *MRZ*).

Dalej korzystamy z reguł, budując tabelę mającą postać drzewa. Pewne z reguł są wspólne dla wszystkich rozważanych normalnych rachunków zdań. Oto lista takich reguł:

Reguły dla spójników KRZ

r$_{\neg\neg}$:

$$\frac{\neg\neg A,\ i}{A,\ i}$$

r$_{\wedge}$:

$$\frac{A \wedge B,\ i}{\begin{array}{c} A,\ i \\ B,\ i \end{array}}$$

r$_{\neg\wedge}$:

$$\frac{\neg(A \wedge B),\ i}{\neg A,\ i \;\big|\; \neg B,\ i}$$

r$_{\vee}$:

$$\frac{A \vee B,\ i}{A,\ i \;\big|\; B,\ i}$$

r$_{\neg\vee}$:

$$\frac{\neg(A \vee B),\ i}{\begin{array}{c} \neg A,\ i \\ \neg B,\ i \end{array}}$$

r$_{\rightarrow}$:

$$\frac{A \rightarrow B,\ i}{\neg A,\ i \;\big|\; B,\ i}$$

r$_{\neg\rightarrow}$:

$$\frac{\neg(A \rightarrow B),\ i}{\begin{array}{c} A,\ i \\ \neg B,\ i \end{array}}$$

r$_{\leftrightarrow}$:

$$\frac{A \leftrightarrow B,\ i}{\begin{array}{c|c} A,\ i & \neg A,\ i \\ B,\ i & \neg B,\ i \end{array}}$$

r$_{\neg\leftrightarrow}$:

$$\frac{\neg(A \leftrightarrow B),\ i}{\begin{array}{c|c} A,\ i & \neg A,\ i \\ \neg B,\ i & B,\ i \end{array}}$$

$r_{\neg\Box}$:

$$\frac{\neg\Box A,\ i}{\Diamond\neg A,\ i}$$

$r_{\neg\Diamond}$:

$$\frac{\neg\Diamond A,\ i}{\Box\neg A,\ i}$$

$r_{\Box}$:

$$\frac{\begin{array}{l}\Box A,\ i\\ iRj\end{array}}{A,\ j}$$

$r_{\Diamond}$:

$$\frac{\Diamond A,\ i}{\begin{array}{l}iRj\\ A,\ j\end{array}}$$

gdzie j jest ***nowym***[1] *liczebnikiem*

[1] Tzn. liczebnik *j* nie występuje wcześniej na tej gałęzi (budowanej tabeli analitycznej), na której stosujemy regułę wobec rozważanej formuły indeksowanej $\Diamond A,\ i$ – zob. dalej.

Komentarze

Dygresja: Na początek zauważmy, że gdy usuniemy indeksy z reguł dla spójników *KRZ*, otrzymamy reguły takiego systemu tabel analitycznych dla *KRZ*, w którym operujemy *wprost* na formułach języka *KRZ*, a nie na formułach z oznaczeniami prawdziwościowymi.

Uwaga 12.1. Tak jak w przypadku *KRZ*, i tutaj mamy zarówno *reguły rozgałęziające* (tj. $\mathbf{r}_{\vee}$, $\mathbf{r}_{\neg\wedge}$, $\mathbf{r}_{\rightarrow}$, $\mathbf{r}_{\leftrightarrow}$, $\mathbf{r}_{\neg\leftrightarrow}$), jak i *reguły nierozgałęziające* (tj. pozostałe). Reguła $\mathbf{r}_{\Box}$ ma formułę relacyjną jako przesłankę, natomiast reguła $\mathbf{r}_{\Diamond}$ pozwala na **jednoczesne** wprowadzenie *dwóch* konkluzji: pierwsza z nich jest formułą relacyjną, natomiast druga – formułą indeksowaną. Reguła $\mathbf{r}_{\Diamond}$ jest opatrzona *warunkiem stosowalności;* dalej mówiąc o zastosowaniach tej reguły, będę milcząco zakładał, że warunek ten został spełniony.

Uwaga 12.2. Poza $\mathbf{r}_{\neg\Box}$ i $\mathbf{r}_{\neg\Diamond}$, każda z reguł ma charakter *eliminacyjny*; tym, co eliminowane, jest wystąpienie spójnika *KRZ* lub operatora modalnego. Zastosowanie reguły $\mathbf{r}_{\neg\Box}$ lub reguły $\mathbf{r}\neg_{\Diamond}$ umożliwia eliminację operatora modalnego w kolejnym kroku.

Terminologia: Aby możliwie skrócić wyjaśnienia, przyjmiemy następujące skróty:

^{z}formuła – formuła języka modalnego rachunku zdań (od „zwykła formuła”),

świat *i* – świat możliwy oznaczany przez liczebnik *i*,

i-prawdziwość – prawdziwość w świecie *i*,

składnik formuły indeksowanej *A, i* – ^{z}formuła *A* lub liczebnik *i*.

Uwaga 12.3. Dotyczące spójników *KRZ* reguły nierozgałęziające (tj. reguły $\mathbf{r}_{\neg\neg}$, $\mathbf{r}_{\wedge}$, $\mathbf{r}_{\neg\vee}$, $\mathbf{r}_{\neg\rightarrow}$) zostały tak dobrane, że *zachodzi transmisja i-prawdziwości ^{z}formuły będącej składnikiem przesłanki w i-prawdziwość ^{z}formuł wchodzących w skład konkluzji* (obu, gdy konkluzje są dwie, jednej – gdy jest tylko jedna). Przykładowo, można udowodnić, że:

> jeśli formuła postaci $A \wedge B$ jest prawdziwa w świecie *i* danego modelu Kripkego, to obie formuły, *A* oraz *B*, są prawdziwe w świecie *i* tego modelu.

Podobnie jest w przypadku pozostałych reguł rozważanego rodzaju, oraz reguł $\mathbf{r}_{\neg\Box}$ i $\mathbf{r}_{\neg\Diamond}$.

Uwaga 12.4. Reguły rozgałęziające $\mathbf{r}_{\vee}$, $\mathbf{r}_{\neg\wedge}$ i $\mathbf{r}_{\rightarrow}$ zostały natomiast tak dobrane, że *zachodzi transmisja i-prawdziwości z formuły będącej składnikiem przesłanki w i-prawdziwość co **najmniej jednej** z formuły będącej składnikiem którejś z konkluzji.* Mówiąc bardziej ściśle, można udowodnić, że:

> jeśli formuła postaci $A \vee B$ jest prawdziwa w świecie *i* danego modelu Kripkego, to co najmniej jedna z formuł, *A* lub *B*, jest prawdziwa w świecie *i* tego modelu

oraz że zachodzą analogiczne zależności dla reguł $\mathbf{r}_{\neg\wedge}$ i $\mathbf{r}_{\rightarrow}$.

Uwaga 12.5. W przypadku reguł $\mathbf{r}_{\leftrightarrow}$ i $\mathbf{r}_{\neg\leftrightarrow}$ *zachodzi transmisja i-prawdziwości* $^{\mathbf{z}}$*formuły będącej składnikiem przesłanki w i-prawdziwość obu* $^{\mathbf{z}}$*formuł wchodzących w skład co najmniej jednej pary konkluzji.* Można udowodnić, że:

> jeśli formuła postaci $A \leftrightarrow B$ jest prawdziwa w świecie *i* danego modelu Kripkego, to dla co najmniej jednej **z** par formuł: $\langle A, B\rangle$, $\langle\neg A, \neg B\rangle$, każda formuła tej pary jest prawdziwa w świecie *i* tego modelu

i podobnie dla reguły $\mathbf{r}_{\neg\leftrightarrow}$ (co pozostawiam Państwu jako ćwiczenie:))

Rozważmy teraz regułę eliminacji operatora konieczności $\mathbf{r}_{\Box}$:

$$\frac{\Box A,\ i \qquad iRj}{A,\ j}$$

Zachodzi:

Twierdzenie 12.1. *Niech* <***W***, ***R***, ***V***> *będzie modelem Kripkego*. *Niech* ***w***, ***w**** $\in$ ***W***. *Jeżeli* ***V***(□*A*, *w*) = **1** *oraz* ***wRw****, *to* ***V***(*A*, ***w****) = **1**.

Tak więc reguła $\mathbf{r}_{\Box}$ zapewnia transmisję *i*-prawdziwości [z]formuły „koniecznościowej”, □*A*, w *j*-prawdziwość [z]formuły *A* – pod warunkiem, że świat *j* jest alternatywny względem świata *i* (co jest intuicyjnym sensem formuły relacyjnej *iRj*).

Można w tym miejscu postawić pytanie: skąd brać przesłanki będące formułami relacyjnymi? Odpowiedzi dostarczają m.in. rozważania nad regułą eliminacji operatora możliwości, $\mathbf{r}_{\Diamond}$.

Semantyczne ugruntowanie reguł

Reguła eliminacji operatora możliwości, $\mathbf{r}_{\Diamond}$, ma postać:

$$\frac{\Diamond A,\ i}{\begin{array}{l} iRj \\ A,\ j \end{array}}\qquad \text{gdzie } j \text{ jest nowym liczebnikiem.}$$

Zauważmy, że jedna z konkluzji jest formułą relacyjną. Zachodzi:

Twierdzenie 12.2. *Niech* $<\boldsymbol{W}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{V}>$ *będzie modelem Kripkego*. *Niech* $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$. *Jeżeli* $\boldsymbol{V}(\Diamond A, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$, *to istnieje* $\boldsymbol{w}^* \in \boldsymbol{W}$ *takie, że* $\boldsymbol{wRw}^*$ *oraz* $\boldsymbol{V}(A, \boldsymbol{w}^*) = \mathbf{1}$.

Tak więc semantyka gwarantuje wyłącznie to, że jeżeli [z]formuła „możliwościowa”, $\Diamond A$, jest prawdziwa w świecie *i*, to jest jakiś świat, *j*, w którym [z]formuła *A* jest prawdziwa, przy czym o świecie *j* wiadomo tylko tyle, że jest on alternatywny względem świata *i*. Stąd też reguła $\mathbf{r}_{\Diamond}$ wymaga zastosowania nowego liczebnika.

Reguła $\mathbf{r}_{\Diamond}$ zapewnia transmisję *i*-prawdziwości [z]formuły $\Diamond A$ w *j*-prawdziwość [z]formuły *A*, gdzie o świecie *j* wiadomo tylko tyle, co zostało powiedziane wyżej.

Tabela analityczna dla formuły *A* języka *MRZ* (tj. ^{z}formuły) jest drzewem, którego korzeniem jest formuła indeksowana:

$$\neg A, 0$$

węzłami są formuły indeksowane i ewentualnie formuły relacyjne, przy czym formuły będące węzłami – poza formułą będącą korzeniem - są wprowadzane przy pomocy reguł. [Ścisła definicja użytego tu pojęcia drzewa zostanie podana w „Dodatku II".]

W przypadku tabel analitycznych dla modalnego rachunku zdań ***K*** jedynymi regułami są te scharakteryzowane do tej pory, tj. reguły $\mathbf{r}_{\neg\neg}$, $\mathbf{r}_{\wedge}$, $\mathbf{r}_{\neg\wedge}$, $\mathbf{r}_{\vee}$, $\mathbf{r}_{\neg\vee}$, $\mathbf{r}_{\rightarrow}$, $\mathbf{r}_{\neg\rightarrow}$, $\mathbf{r}_{\leftrightarrow}$, $\mathbf{r}_{\neg\leftrightarrow}$, $\mathbf{r}_{\neg\Box}$, $\mathbf{r}_{\neg\Diamond}$, $\mathbf{r}_{\Box}$, $\mathbf{r}_{\Diamond}$. Ten zestaw reguł oznaczymy symbolem **r**(***K***).

Skonstruujemy teraz tabelę analityczną dla formuły **K**, tj. ^{z}formuły:

$$\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$$

Przykład: tabela analityczna dla formuły **K**

$$\neg(\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)), 0$$

Komentarz: Jesteśmy w punkcie startu.

Przykład: tabela analityczna dla formuły **K**

$$\neg(\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)),\ 0$$

$$\Box(p \to q),\ 0$$

$$\neg(\Box p \to \Box q),\ 0$$

Komentarz: Zastosowano $\mathbf{r}_{\neg\to}$

Przykład: tabela analityczna dla formuły **K**

$$\neg(\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)), 0$$

$$\Box(p \to q), 0$$

$$\neg(\Box p \to \Box q), 0$$

$$\Box p, 0$$

$$\neg\Box q, 0$$

Komentarz: Zastosowano $\mathbf{r}_{\neg\to}$.

Przykład: tabela analityczna dla formuły **K**

$$\neg(\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)), 0$$

$$\Box(p \to q), 0$$

$$\neg(\Box p \to \Box q), 0$$

$$\Box p, 0$$

$$\neg\Box q, 0$$

$$\Diamond\neg q, 0$$

Komentarz: Zastosowano $\mathbf{r}_{\neg\Box}$.

Przykład: tabela analityczna dla formuły **K**

$$\neg(\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)), 0$$

$$\Box(p \to q), 0$$

$$\neg(\Box p \to \Box q), 0$$

$$\Box p, 0$$

$$\neg\Box q, 0$$

$$\Diamond\neg q, 0$$

$$0R1$$

$$\neg q, 1$$

Komentarz: Zastosowano $\mathbf{r}_{\Diamond}$.

Przykład: tabela analityczna dla formuły **K**

$$\neg(\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)), 0$$

$$\Box(p \to q), 0$$

$$\neg(\Box p \to \Box q), 0$$

$$\Box p, 0$$

$$\neg\Box q, 0$$

$$\Diamond\neg q, 0$$

$$0R1$$

$$\neg q, 1$$

$$p, 1$$

Komentarz: Zastosowano **r**$_{\Box}$.

Przykład: tabela analityczna dla formuły **K**

$$\neg(\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)),\ 0$$

$$\Box(p \to q),\ 0$$

$$\neg(\Box p \to \Box q),\ 0$$

$$\Box p,\ 0$$

$$\neg\Box q,\ 0$$

$$\Diamond\neg q,\ 0$$

$$0R1$$

$$\neg q,\ 1$$

$$p,\ 1$$

$$p \to q,\ 1$$

Komentarz: Zastosowano $\mathbf{r}_{\Box}$.

Przykład: tabela analityczna dla formuły **K**

$$\neg(\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)), 0$$

$$\Box(p \to q), 0$$

$$\neg(\Box p \to \Box q), 0$$

$$\Box p, 0$$

$$\neg\Box q, 0$$

$$\Diamond\neg q, 0$$

$$0R1$$

$$\neg q, 1$$

$$p, 1$$

$$p \to q, 1$$

$$\neg p, 1 \qquad\qquad q, 1$$

Komentarz: Zastosowano $\mathbf{r}_{\to}$.

Przykład: tabela analityczna dla formuły **K**

$$\neg(\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)), 0$$

$$\Box(p \to q), 0$$

$$\neg(\Box p \to \Box q), 0$$

$$\Box p, 0$$

$$\neg\Box q, 0$$

$$\Diamond\neg q, 0$$

$$0R1$$

$$\neg q, 1$$

$$p, 1$$

$$p \to q, 1$$

$\neg p, 1$ $\qquad\qquad\qquad$ $q, 1$

Komentarz: Na każdej gałęzi występują – z tym samym indeksem! – [z]formuła i jej negacja. Tabela jest zamknięta.

Wprowadźmy teraz pewne konwencje terminologiczne.

Definicja 12.1. Formuły indeksowane mające postać: *A, i* oraz $\neg$*A*, *i* nazywamy komplementarnymi.

Uwaga 12.6. Ważne jest, że po *A* i $\neg$*A* występuje ten sam liczebnik!!!

Definicja 12.2. *Tabela analityczna dla formuły A języka MRZ jest* zamknięta *wtw na każdej gałęzi tej tabeli występuje co najmniej jedna para formuł komplementarnych; w przeciwnym przypadku mówimy, że tabela ta jest* otwarta.

Tabele zamknięte możemy uważać za dowody. Aby wytłumaczyć, dlaczego tak jest, pokażemy najpierw, że zachodzą:

Twierdzenie 12.3. *Nie istnieją:* ^{z}*formuła C*, *model Kripkego* <***W***, ***R***, ***V***> *oraz świat w* $\in$ ***W*** *takie, że zarówno* ***V***(*C*, *w*) = **1** *jak i* ***V***($\neg$*C*, *w*) = **1**.

Dowód jest oczywisty :).

Przypomnijmy, że $\mathbf{r}(\boldsymbol{K}) = \{\mathbf{r}_{\neg\neg}, \mathbf{r}_{\wedge}, \mathbf{r}_{\neg\wedge}, \mathbf{r}_{\vee}, \mathbf{r}_{\neg\vee}, \mathbf{r}_{\rightarrow}, \mathbf{r}_{\neg\rightarrow}, \mathbf{r}_{\leftrightarrow}, \mathbf{r}_{\neg\leftrightarrow}, \mathbf{r}_{\neg\Box}, \mathbf{r}_{\neg\Diamond}, \mathbf{r}_{\Box}, \mathbf{r}_{\Diamond}\}$

Twierdzenie 12.4. *Niech* Ψ *będzie tabelą analityczną dla formuły A języka MRZ, w konstrukcji której użyto wyłącznie reguł ze zbioru* **r**(***K***). *Niech* ***M*** = <***W***, ***R***, ***V***> *będzie modelem Kripkego takim, że* ^{z}*formuła* $\neg$*A jest prawdziwa w świecie modelu* ***M*** *oznaczonym przez* 0. *Wówczas istnieje gałąź* **g** *tabeli* Ψ *taka, że dla każdej formuły indeksowanej C, j będącej węzłem gałęzi* **g**, ^{z}*formuła C jest prawdziwa w świecie modelu* ***M*** *oznaczanym przez liczebnik j.*

Szkic dowodu: W dowodzie odwołujemy się do rezultatów przeprowadzonych uprzednio rozważań dotyczących „transmisji prawdziwości” poprzez reguły (por. uwagi 12.3. 12.4, 12.5 oraz twierdzenia 12.1 i 12.2). ■

Uwaga dla purystów: Twierdzenie 12.4 zostało sformułowane dość „swobodnie”. Celem tego wykładu jest jednak pokazanie intuicji :) Gdyby chcieć postąpić *lege artis*, należałoby wprowadzić pewną *funkcję oznaczania*, przyporządkowującą liczebnikom elementy zbioru ***W***.

Dlaczego zamknięte tabele analityczne można uważać za dowody?

Budując tabelę analityczną dla ^{z}formuły *A,* rozpoczynamy od formuły indeksowanej postaci:

$$\neg A, 0$$

Sens intuicyjny takiego kroku jest następujący: zakładamy, że *A* nie jest prawdziwa w pewnym świecie jakiegoś modelu Kripkego, co wyrażamy w ten sposób, iż zakładamy, że istnieje model ***M*** taki, że $\neg A$ jest prawdziwa w pewnym świecie tego modelu, oznaczonym przez 0. W budowie tabeli korzystamy wyłącznie z reguł ze zbioru **r**(***K***). Wówczas, na mocy twierdzenia 12.4, istnieje gałąź **g** tej tabeli taka, że dla każdej formuły indeksowanej *C*, *j* będącej węzłem gałęzi **g**, ^{z}formuła *C* jest prawdziwa w świecie modelu ***M*** oznaczanym przez liczebnik *j*. Przypuśćmy teraz, że zbudowana tabela jest zamknięta. Wówczas na gałęzi **g** występuje co najmniej jedna para komplementarnych formuł indeksowanych: *B*, *j* oraz $\neg B$, *j*. Wnosimy stąd, że zarówno ^{z}formuła *B*, jak i ^{z}formuła $\neg B$ są prawdziwe w świecie modelu ***M*** oznaczanym przez liczebnik *j*. Jednakże w świetle twierdzenia 12.3 taki model nie może istnieć! Otrzymaliśmy sprzeczność. Wnosimy stąd, że wyjściowa ^{z}formuła *A* jest prawdziwa w każdym świecie każdego modelu Kripkego. Formuły o tej własności to jednak nic innego jak tezy modalnego rachunku zdań ***K***. Dlatego właśnie zamkniętą tabelę analityczną, w konstrukcji której użyto wyłącznie reguł ze zbioru **r**(***K***), można uważać za dowód tezy rachunku ***K***.

Zbudujmy teraz tabelę analityczną dla formuły **T**, tj. $\Box p \to p$, korzystając wyłącznie z reguł z **r**(***K***). Oto rezultat.

$$\neg(\Box p \to p), 0$$

$$\Box p, 0$$

$$\neg p, 0$$

Nic więcej nie możemy zrobić, jako że operator konieczności nie da się wyeliminować z tego powodu, iż nie dysponujemy żadną formuła relacyjną.

Powyższa tabela jest otwarta. Z drugiej strony, nie zaszła żadna katastrofa, ponieważ formuła **T** nie jest tezą rachunku ***K***.

Tabele analityczne dla innych normalnych rachunków zdań

Zanalizujmy formułę **4**, tj. $\Box p \to \Box\Box p$, za pomocą tych samych środków.

$$\neg(\Box p \to \Box\Box p),\ 0$$

$$\Box p,\ 0$$

$$\neg\Box\Box p,\ 0$$

$$\Diamond\neg\Box p,\ 0$$

$$0R1$$

$$\neg\Box p,\ 1$$

$$\Diamond\neg p,\ 1$$

$$1R2$$

$$\neg p,\ 2$$

I znów, tabela jest otwarta oraz nie ma możliwości jej zamknięcia. Z drugiej strony, formuła **4** nie jest tezą rachunku ***K***.

Powstaje pytanie: czy metodę tabel analitycznych można stosować do normalnych rachunków zdań różnych od ***K*** ?

Odpowiedź brzmi: tak, ale za cenę wprowadzenia nowych reguł.

Tabele analityczne dla innych normalnych rachunków zdań

Te nowe reguły w pewien sposób odzwierciedlają własności relacji alternatywności w modelach Kripkego dla analizowanych logik.

Przypomnijmy ustalenia poprzedniego wykładu:

Formuła / aksjomat	*Relacja alternatywności w strukturze modelowej / modelu*
D: $\Box p \to \Diamond p$	*seryjna*
T: $\Box p \to p$	*zwrotna*
B: $p \to \Box\Diamond p$	*symetryczna*
4: $\Box p \to \Box\Box p$	*przechodnia*
E: $\Diamond p \to \Box\Diamond p$	*euklidesowa*

Modalny rachunek zdań	*Modele Kripkego*
K = **K**	*wszystkie*
D = **KD**	*seryjne*
T = **KT**	*zwrotne*
B = **KTB**	*zarazem zwrotne i symetryczne*
S4 = **KT4**	*zarazem zwrotne i przechodnie*
S5 = **KTE** = **KTB4**	*zarazem zwrotne, symetryczne i przechodnie*

Tabele analityczne dla innych normalnych rachunków zdań

Wprowadzamy – zbiorczo – nowe reguły budowania tabel analitycznych (poprzednio rozważane nadal obowiązują!).

Symbolem $\varphi(i)$ oznaczamy dowolną formułę – relacyjną lub indeksowaną – w której występuje liczebnik *i*.

r_D: (seryjność)

$$\frac{\varphi(i)}{iRj}$$

gdzie j jest nowym liczebnikiem na budowanej właśnie gałęzi tabeli oraz na tej gałęzi nie występuje wcześniej formuła relacyjna postaci iRk

r_T: (zwrotność)

$$\frac{\varphi(i)}{iRi}$$

r_B: (symetryczność)

$$\frac{iRj}{jRi}$$

r_4: (przechodniość)

$$\frac{iRj \quad jRk}{iRk}$$

Tabele analityczne dla innych normalnych rachunków zdań

Poniżej zestawiamy zbiory reguł, przy pomocy których wolno budować tabele analityczne dla rozważanych na tym wykładzie normalnych modalnych rachunków zdań.

Przypominam, że $\mathbf{r}(\boldsymbol{K}) = \{\mathbf{r}_{\neg\neg}, \mathbf{r}_{\wedge}, \mathbf{r}_{\neg\wedge}, \mathbf{r}_{\vee}, \mathbf{r}_{\neg\vee}, \mathbf{r}_{\rightarrow}, \mathbf{r}_{\neg\rightarrow}, \mathbf{r}_{\leftrightarrow}, \mathbf{r}_{\neg\leftrightarrow}, \mathbf{r}_{\neg\Box}, \mathbf{r}_{\neg\Diamond}, \mathbf{r}_{\Box}, \mathbf{r}_{\Diamond}\}$

Rachunek	*Modele Kripkego*	*Reguły charakterystyczne*
K **= K**	*wszystkie*	$\mathbf{r}(\boldsymbol{K})$
D **= KD**	*seryjne*	$\mathbf{r}(\boldsymbol{K}) \cup \{\mathbf{r}_D\}$
T **= KT**	*zwrotne*	$\mathbf{r}(\boldsymbol{K}) \cup \{\mathbf{r}_T\}$
B **= KTB**	*zarazem zwrotne i symetryczne*	$\mathbf{r}(\boldsymbol{K}) \cup \{\mathbf{r}_T, \mathbf{r}_B\}$
S4 **= KT4**	*zarazem zwrotne i przechodnie*	$\mathbf{r}(\boldsymbol{K}) \cup \{\mathbf{r}_T, \mathbf{r}_4\}$
S5 **= KTE = KTB4**	*zarazem zwrotne, symetryczne i przechodnie*	$\mathbf{r}(\boldsymbol{K}) \cup \{\mathbf{r}_T, \mathbf{r}_B, \mathbf{r}_4\}$

Zestawienie reguł charakterystycznych

Dlaczego zamknięte tabele analityczne można uważać za dowody?

Podobnie jak poprzednio, zamkniętą tabelę analityczną (w której konstrukcji korzystamy z reguł ze zbioru **r**(***K***) i ewentualnie z „nowych” reguł) możemy uważać za dowód tezy odpowiedniego rachunku zdań. Dlaczego tak jest? Wyjaśnimy to na przykładzie rachunku ***T***; w pozostałych przypadkach rozumowanie przebiega analogicznie.

Otóż można udowodnić:

Twierdzenie 12.5. *Niech Ψ będzie tabelą analityczną dla formuły A języka MRZ, w konstrukcji której użyto wyłącznie reguł ze zbioru* **r**(***K***) $\cup$ {$\mathbf{r_T}$}. *Niech* ***M*** = <***W***, ***R***, ***V***> *będzie zwrotnym modelem Kripkego takim, że* [z]*formuła $\neg$A jest prawdziwa w świecie modelu* ***M*** *oznaczonym przez* 0. *Wówczas istnieje gałąź* **g** *tabeli Ψ taka, że dla każdej formuły indeksowanej C, j będącej węzłem gałęzi* **g**, [z]*formuła C jest prawdziwa w świecie modelu* ***M*** *oznaczanym przez liczebnik j.*

Uwaga dla purystów jest taka sama, jak w przypadku twierdzenia 12.4.

Dlaczego zamknięte tabele analityczne można uważać za dowody?

„Otwarcie" tabeli analitycznej dla ᶻformuły *A*, tj. przyjęcie formuły indeksowanej:

$$\neg A,\ 0$$

ma teraz sens następujący: zakładamy, że *A* nie jest prawdziwa w pewnym świecie jakiegoś zwrotnego modelu Kripkego, postulując istnienie zwrotnego modelu ***M***, w którym świat „weryfikujący" $\neg A$ jest oznaczany przez 0. W budowie tabeli korzystamy wyłącznie z reguł ze zbioru **r**(***K***) $\cup$ {$\mathbf{r}_\mathbf{T}$}. Na mocy twierdzenia 12.5, istnieje wówczas gałąź **g** tabeli taka, że dla każdej formuły indeksowanej *C*, *j* będącej węzłem gałęzi **g**, ᶻformuła *C* jest prawdziwa w świecie modelu ***M*** oznaczanym przez liczebnik *j*. Przypuśćmy teraz, że zbudowana tabela jest zamknięta. Wówczas na gałęzi **g** występuje co najmniej jedna para komplementarnych formuł indeksowanych: *B*, *j* oraz $\neg B$, *j*. Wnosimy stąd, że zarówno ᶻformuła *B*, jak i ᶻformuła $\neg B$ są prawdziwe w świecie modelu ***M*** oznaczanym przez liczebnik *j*. Jednakże w świetle twierdzenia 12.3 żaden taki model nie może istnieć! Otrzymaliśmy sprzeczność. Tak więc wyjściowa ᶻformuła *A* jest prawdziwa w każdym świecie każdego zwrotnego modelu Kripkego – czyli jest ona tezą modalnego rachunku zdań ***T***. Dlatego właśnie zamkniętą tabelę analityczną, w konstrukcji której użyto wyłącznie reguł ze zbioru **r**(***K***) $\cup$ {$\mathbf{r}_\mathbf{T}$}, można uważać za dowód tezy rachunku ***T***.

Zbudujmy teraz tabelę analityczną dla formuły **T**, korzystając – oprócz reguł z **r**(***K***) – także z reguły $\mathbf{r_T}$.

$$\neg(\Box p \to p), 0$$
$$\Box p, 0$$
$$\neg p, 0$$

Komentarz: Tyle daje zastosowanie reguł z **r**(***K***), *w tym przypadku reguły* $\mathbf{r}_{\neg\to}$.

$$\neg(\Box p \rightarrow p),\ 0$$

$$\Box p,\ 0$$

$$\neg p,\ 0$$

$$0R0$$

Komentarz: Zastosowaliśmy $\mathbf{r_T}$.

$$\neg(\Box p \rightarrow p), 0$$
$$\Box p, 0$$
$$\neg p, 0$$
$$0R0$$
$$p, 0$$

Komentarz: Zastosowaliśmy $\mathbf{r}_{\Box}$.

$\neg(\Box p \to p), 0$

$\Box p, 0$

$\neg p, 0$

$0R0$

$p, 0$

Komentarz: Tabela jest zamknięta

A teraz tabela analityczna dla formuły 4; korzystamy z reguł z **r**(***K***) oraz z reguły $\mathbf{r_4}$.

$$\neg(\Box p \rightarrow \Box\Box p),\ 0$$
$$\Box p,\ 0$$
$$\neg\Box\Box p,\ 0$$
$$\Diamond\neg\Box p,\ 0$$
$$0R1$$
$$\neg\Box p,\ 1$$
$$\Diamond\neg p,\ 1$$
$$1R2$$
$$\neg p,\ 2$$

Komentarz: Tyle daje zastosowanie reguł z **r**(*K*); *formuła* $\Box p$, 0 *nie została jeszcze użyta*.

A teraz tabela analityczna dla formuły 4; korzystamy z reguł z **r**(***K***) oraz z reguły $\mathbf{r_4}$.

$$\neg(\Box p \to \Box\Box p),\ 0$$

$$\Box p,\ 0$$

$$\neg\Box\Box p,\ 0$$

$$\Diamond\neg\Box p,\ 0$$

$$0R1$$

$$\neg\Box p,\ 1$$

$$\Diamond\neg p,\ 1$$

$$1R2$$

$$\neg p,\ 2$$

$$0R2$$

Komentarz: Zastosowano $\mathbf{r_4}$.

A teraz tabela analityczna dla formuły 4; korzystamy z reguł z **r**(***K***) oraz z reguły $\mathbf{r_4}$.

$$\neg(\Box p \to \Box\Box p),\ 0$$
$$\Box p,\ 0$$
$$\neg\Box\Box p,\ 0$$
$$\Diamond\neg\Box p,\ 0$$
$$0R1$$
$$\neg\Box p,\ 1$$
$$\Diamond\neg p,\ 1$$
$$1R2$$
$$\neg p,\ 2$$
$$0R2$$
$$p,\ 2$$

Komentarz: Zastosowano $\mathbf{r}_{\Box}$.

A teraz tabela analityczna dla formuły **4**; korzystamy z reguł z **r**(***K***) oraz z reguły $\mathbf{r_4}$.

$$\neg(\Box p \to \Box\Box p), 0$$

$$\Box p, 0$$

$$\neg\Box\Box p, 0$$

$$\Diamond\neg\Box p, 0$$

$$0R1$$

$$\neg\Box p, 1$$

$$\Diamond\neg p, 1$$

$$1R2$$

$$\neg p, 2$$

$$0R2$$

$$p, 2$$

Komentarz: Tabela jest zamknięta.

Rozważmy teraz ponownie pokazaną wcześniej (zob. s. 27) tabelę dla formuły **4**, zbudowaną wyłącznie za pomocą reguł z **r**(***K***):

$$\neg(\Box p \to \Box\Box p), 0$$
$$\Box p, 0$$
$$\neg\Box\Box p, 0$$
$$\Diamond\neg\Box p, 0$$
$$0R1$$
$$\neg\Box p, 1$$
$$\Diamond\neg p, 1$$
$$1R2$$
$$\neg p, 2$$

Jedyną formułą indeksowaną, do której nie zastosowano żadnej reguły, jest $\Box p$, 0. Zastosujmy teraz $\mathbf{r}_\Box$ z uwagi na liczebnik 1. Otrzymamy:

$$\neg(\Box p \to \Box\Box p),\ 0$$
$$\Box p,\ 0$$
$$\neg\Box\Box p,\ 0$$
$$\Diamond\neg\Box p,\ 0$$
$$0R1$$
$$\neg\Box p,\ 1$$
$$\Diamond\neg p,\ 1$$
$$1R2$$
$$\neg p,\ 2$$
$$p,\ 1$$

Teraz nie możemy zrobić nic więcej. Z drugiej strony, tabela jest otwarta.

Kontrmodele

Czasami jednak wynik negatywny jest też wynikiem! Korzystając z powyższej tabeli, możemy zbudować kontrmodel formuły **4**, tj. model (Kripkego), w którym formuła ta nie jest prawdziwa. Będzie nim dowolny model Kripkego:

$$<\boldsymbol{W}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{V}>$$

spełniający następujące warunki:

$\boldsymbol{W} = \{w_0, w_1, w_2\}$,
$\boldsymbol{R} = \{<w_0, w_1>, <w_1, w_2>\}$,
$\boldsymbol{V}(p, w_1) = \mathbf{1}$,
$\boldsymbol{V}(p, w_2) = \mathbf{0}$.

$\neg(\Box p \to \Box\Box p), 0$
$\Box p, 0$
$\neg\Box\Box p, 0$
$\Diamond\neg\Box p, 0$
$0R1$
$\neg\Box p, 1$
$\Diamond\neg p, 1$
$1R2$
$\neg p, 2$
$p, 1$

Istotnie, mamy:

$\boldsymbol{V}(\Box p, w_0) = \mathbf{1}$, bo w_1 jest jedynym światem alternatywnym względem w_0, a $\boldsymbol{V}(p, w_1) = \mathbf{1}$,

$\boldsymbol{V}(\Box\Box p, w_0) = \mathbf{0}$, bo $V(p, w_2) = \mathbf{0}$, czyli – skoro w_2 jest światem alternatywnym względem w_1 – $\boldsymbol{V}(\Box p, w_1) = \mathbf{0}$, skąd wnosimy – jako że w_1 jest światem alternatywnym względem w_0 – że $\boldsymbol{V}(\Box\Box p, w_0) = \mathbf{0}$.

Zatem $\boldsymbol{V}(\Box p \to \Box\Box p, w_0) = \mathbf{0}$.

Zauważmy, że model powyższego rodzaju nie jest przechodni.

W przypadku *KRZ* każda tabela analityczna jest skończona. W efekcie w *KRZ* możemy użyć metody tabel analitycznych jako metody rozstrzygania, czy dana formuła języka *KRZ* jest tezą/ tautologią *KRZ*.

W przypadku *MRZ* dołączenie do zestawu reguł reguł $\mathbf{r_D}$ i/lub $\mathbf{r_4}$ powoduje, że pojawia się możliwość konstruowania tabel nieskończonych. Na następnym slajdzie podaję przykład; jest to tabela dla ^{z}formuły:

$$\neg(\Diamond p \wedge \Box\Diamond p)$$

a wśród stosowanych reguł znajduje się $\mathbf{r_4}$.

W efekcie niekiedy nie wiadomo, czy tabela analityczna dla analizowanej ^{z}formuły kiedykolwiek się zamknie. Przekształcenie metody tabel analitycznych dla (normalnych) *MRZ* w procedurę rozstrzygania wymaga uzupełnienia metody o określone heurystyki budowania tabel – co nie jest zadaniem trywialnym :)

$\neg\neg(\Diamond p \wedge \Box\Diamond p), 0$

$\Diamond p \wedge \Box\Diamond p, 0$

$\Diamond p, 0$

$\Box\Diamond p, 0$

$0R1$

$p, 1$

$\Diamond p, 1$

$1R2$

$p, 2$

$0R2$

$\Diamond p, 2$

$2R3$

$p, 3$

$0R3$

$\Diamond p, 3$

...

Ilekroć wprowadzamy „nowy” świat *i*, reguła $\mathbf{r_4}$ daje nam $0\boldsymbol{R}i$. Ponieważ mamy $\Box\Diamond p$, 0, reguła $\mathbf{r}_{\Box}$ daje $\Diamond p$, *i*, co – z uwagi na $\mathbf{r}_{\Diamond}$ - powoduje wprowadzenia kolejnego „nowego” świata .... etc.

Wiemy już, że zamkniętą tabelę analityczną, zbudowaną przy pomocy zestawu reguł charakterystycznych (zob. zestawienie na str. 27) dla danego modalnego rachunku zdań $\boldsymbol{L}$ – gdzie $\boldsymbol{L}$ jest jednym z rachunków ***K***, ***D***, ***T***, ***B***, ***S4***, ***S5*** - możemy uznać za dowód odpowiedniej tezy rachunku $\boldsymbol{L}$. Powstaje pytanie, czy jest też na odwrót: czy każda teza danego modalnego rachunku zdań $\boldsymbol{L}$ (określonego jak wyżej) posiada dowód w postaci zamkniętej tabeli analitycznej zbudowanej za pomocą reguł charakterystycznych dla tego rachunku.

Odpowiedź na to pytanie jest **pozytywna.**

Uzasadnienie tego faktu przekracza jednak ramy tego wykładu.

Pojęcie wynikania na gruncie modalnego rachunku zdań możemy zdefiniować na dwa – nierównoważne! – sposoby.

Niech $\boldsymbol{L}$ będzie jednym z rachunków: ***K***, ***D***, ***T***, ***B*, *S4***, ***S5***.

Pod pojęciem $\boldsymbol{L}$-modelu będziemy dalej rozumieć dowolny model Kripkego charakterystyczny dla rachunku $\boldsymbol{L}$, tj. model Kripkego należący do tej klasy modeli, względem której zachodzą twierdzenia o adekwatności i pełności dla rachunku $\boldsymbol{L}$ (zob. poprzedni wykład). Oto zestawienie:

Rachunek $\boldsymbol{L}$	$\boldsymbol{L}$*-modele*
K = **K**	*wszystkie*
D = **KD**	*seryjne*
T = **KT**	*zwrotne*
B = **KTB**	*zarazem zwrotne i symetryczne*
S4 = **KT4**	*zarazem zwrotne i przechodnie*
S5 = **KTE** = **KTB4**	*zarazem zwrotne, symetryczne i przechodnie*

Wynikanie na gruncie modalnego rachunku zdań

Niech napis $X \models_L A$ skraca wyrażenie „^{z}formuła A wynika na gruncie modalnego rachunku zdań L ze zbioru ^{z}formuł X”.

Interesujące nas pojęcie można określić albo tak:

Definicja 12.3. $X \models_L A$ wtw dla każdego L-modelu $\boldsymbol{M}$, dla każdego świata $\boldsymbol{w}$ modelu $\boldsymbol{M}$ zachodzi:

($) jeżeli każda ^{z}formuła należąca do X jest prawdziwa w świecie $\boldsymbol{w}$,
to ^{z}formuła A jest prawdziwa w świecie $\boldsymbol{w}$.

albo tak:

Definicja 12.4. $X \models_L A$ wtw dla każdego L-modelu $\boldsymbol{M}$ zachodzi:

($$) jeżeli każda ^{z}formuła należąca do X jest prawdziwa w modelu $\boldsymbol{M}$, to ^{z}formuła A jest prawdziwa w modelu $\boldsymbol{M}$.

Zauważmy, że warunek ($) pociąga warunek ($$), ale nie jest na odwrót!

W dalszych rozważaniach będziemy rozumieć pojęcie wynikania na gruncie modalnego rachunku zdań w sensie precyzowanym przez definicję 12.3.

Tabele analityczne a wynikanie na gruncie modalnych rachunków zdań

Dobra wiadomość jest następująca: nieznacznie modyfikując przedstawioną metodę tabel analitycznych, uzyskujemy metodę wykazywania, że dana ^{z}formuła wynika na gruncie modalnego rachunku zdań $\boldsymbol{L}$ ze skończonego zbioru ^{z}formuł (w sensie definicji 12.3).

Modyfikacja polega na zmianie początkowego kroku.

Pragnąc wykazać, że zachodzi:

$$\{B_1, ..., B_n\} \models_{\boldsymbol{L}} A$$

budujemy tabelę analityczną dla ^{z}formuły A, w której węzłami następującymi po korzeniu $\neg A$, 0 są kolejno formuły indeksowane: B_1,0, ..., B_n,0, a następne węzły są wprowadzane – o ile to konieczne – za pomocą reguł charakterystycznych dla rachunku $\boldsymbol{L}$.

Gdy uda nam się zbudować tabelę zamkniętą, można to uznać za uzasadnienie stwierdzenia o wynikaniu - na gruncie modalnego rachunku zdań $\boldsymbol{L}$ - ^{z}formuły A ze zbioru ^{z}formuł $\{B_1, ..., B_n\}$, wynikaniu rozumianym w sensie definicji 12.3.

Uzasadnienie tego stwierdzenia pozostawiam Państwu jako ćwiczenie :).

Przykład

Pokazujemy, że zachodzi:

$$\{\Diamond p, \Box(p \to q)\} \models_{\boldsymbol{K}} \Diamond q$$

Wolno nam skorzystać z reguł z **r**(***K***).

$$\neg\Diamond q,\ 0$$
$$\Diamond p,\ 0$$
$$\Box(p \to q),\ 0$$

Przykład

$\neg\Diamond q, 0$

$\Diamond p, 0$ $\boxed{\mathbf{r}_{\Diamond}}$

$\Box(p \to q), 0$

$0R1$

$p, 1$

Przykład

$\neg\Diamond q$, 0 $\boxed{\mathbf{r}_{\neg\Diamond}}$

$\Diamond p$, 0 $\boxed{\mathbf{r}_{\Diamond}}$

$\Box(p \to q)$, 0

$0R1$

p, 1

$\Box\neg q$, 0

Przykład

$\neg\Diamond q, 0$ $\boxed{\mathbf{r}_{\neg\Diamond}}$

$\Diamond p, 0$ $\boxed{\mathbf{r}_{\Diamond}}$

$\Box(p \rightarrow q), 0$

$0R1$

$p, 1$

$\Box\neg q, 0$ $\boxed{\mathbf{r}_{\Box}}$

$\neg q, 1$

Przykład

$\neg\lozenge q, 0$ $\boxed{\mathbf{r}_{\neg\lozenge}}$

$\lozenge p, 0$ $\boxed{\mathbf{r}_{\lozenge}}$

$\Box(p \to q), 0$ $\boxed{\mathbf{r}_{\Box}}$

$0R1$

$p, 1$

$\Box\neg q, 0$ $\boxed{\mathbf{r}_{\Box}}$

$\neg q, 1$

$p \to q, 1$

Przykład

$\neg\lozenge q, 0$	$\boxed{\mathbf{r}_{\neg\lozenge}}$
$\lozenge p, 0$	$\boxed{\mathbf{r}_{\lozenge}}$
$\square(p \to q), 0$	$\boxed{\mathbf{r}_{\square}}$
$0R1$	
$p, 1$	
$\square\neg q, 0$	$\boxed{\mathbf{r}_{\square}}$
$\neg q, 1$	
$p \to q, 1$	$\boxed{\mathbf{r}_{\to}}$

$$
\begin{array}{ccc}
 & p \to q, 1 & \\
\swarrow & & \searrow \\
\neg p, 1 & & q, 1
\end{array}
$$

Przykład

$\neg\Diamond q, 0$ $\boxed{\mathbf{r}_{\neg\Diamond}}$

$\Diamond p, 0$ $\boxed{\mathbf{r}_{\Diamond}}$

$\Box(p \rightarrow q), 0$ $\boxed{\mathbf{r}_{\Box}}$

$0R1$

$p, 1$

$\Box\neg q, 0$ $\boxed{\mathbf{r}_{\Box}}$

$\neg q, 1$

$p \rightarrow q, 1$ $\boxed{\mathbf{r}_{\rightarrow}}$

$\neg p, 1$ | $q, 1$

Otrzymaliśmy tabelę zamkniętą. Zachodzi wynikanie na gruncie rachunku ***K****. A także jego rozszerzeń, albowiem reguły z* **r**(***K***) *mają zastosowanie również do nich.*

Przykład

Rozważmy, czy zachodzi:

$$\Box p \models_{\boldsymbol{D}} \Diamond p$$

Ponieważ interesuje nas wynikanie na gruncie rachunku ***D***, mamy do dyspozycji reguły z $\mathbf{r}(\boldsymbol{K}) \cup \{\mathbf{r}_{\mathbf{D}}\}$. Budujemy tabelę następująco:

$$\begin{array}{c} \neg\Diamond p,\ 0 \\ \Box p,\ 0 \\ \Box\neg p,\ 0 \\ 0R1 \\ p,\ 1 \\ \neg p,\ 1 \end{array}$$

Tabela jest zamknięta. Zatem odpowiedź jest pozytywna.

Przykład

Rozważmy, czy zachodzi:

$$\Box p \models_{T} \Diamond p$$

Ponieważ tym razem badamy wynikanie na gruncie rachunku ***T***, możemy skorzystać z reguł ze zbioru **r**(***K***) ∪ {$\mathbf{r_T}$}. A oto tabela:

$$\neg\Diamond p,\ 0$$
$$\Box p,\ 0$$
$$\Box\neg p,\ 0$$
$$0R0$$
$$p,\ 0$$
$$\neg p,\ 0$$

Tabela jest zamknięta, a odpowiedź pozytywna.

*Dodatek I: O pewnych miłych własnościach rachunku **S5***

Na poprzednim wykładzie była mowa o następującym twierdzeniu:

Twierdzenie 10.19. *Formuła A (języka MRZ) jest tezą rachunku zdań **S5** wtw formuła A jest prawdziwa w dowolnym modelu Kripkego, w którym relacja alternatywności jest uniwersalna.*

Jednym z następstw tego twierdzenia było to, że semantykę Kripkego dla rachunku ***S5*** można znacząco uprościć. Kolejnym jest natomiast to, że dla ***S5*** istnieje również bardzo prosty system tabel analitycznych. Wystarczą nam reguły dla spójników ***KRZ***, reguły $\mathbf{r}_{\neg\Box}$, $\mathbf{r}_{\neg\Diamond}$ oraz następujące reguły eliminacji operatorów modalnych:

$\mathbf{r}^*_{\Box}$:

$$\frac{\Box A,\ i}{A,\ j}$$

gdzie j jest dowolnym liczebnikiem

$\mathbf{r}^*_{\Diamond}$:

$$\frac{\Diamond A,\ i}{A,\ j}$$

*gdzie j jest **nowym** liczebnikiem*

Pojęcie drzewa pełni istotną rolę w rozważaniach z zakresu teorii dowodu (*proof-theory*). Jednakże, co może Państwa zdziwić, w literaturze przedmiotu pojęcie to bywa definiowane na wiele sposobów, przy czym zdarza się, że podawane definicje nie są równoważne.

Z pewną definicją pojęcia drzewa spotkaliśmy się już na kursie „Logika I". Graham Priest w swojej książce „An Introduction to Non-Classical Logic" (na której – z drobnymi modyfikacjami notacyjnymi – oparty jest ten wykład) rozumie pojęcie drzewa w sposób, który postaram się teraz przybliżyć.

Dodatek II: O drzewach

Niech X będzie zbiorem, natomiast $\leq$ będzie relacją binarną w X taką, że $\leq$ jest zarazem zwrotna, antysymetryczna i przechodnia w X. Parę uporządkowaną $<X, \leq>$ nazywamy *zbiorem uporządkowanym*.[2]

Element $x_0 \in X$ nazywamy *maksymalnym* wtw nie istnieje $y \in X$ takie, że:

$$x_0 \leq y \text{ oraz } x_0 \neq y.$$

Drzewem jest zbiór uporządkowany $<X, \leq>$ posiadający dokładnie jeden element maksymalny, x_0, taki, że dla dowolnego elementu $x_n \in X$ istnieje dokładnie jeden łańcuch $x_n \leq x_{n-1} \leq .... \leq x_1 \leq x_0$ elementów X. Elementy X nazywamy *węzłami*, x_0 nosi nazwę *korzenia*.

Dlaczego tak? Czy jest to poprawne? Zapraszam na wykład:)

[2] Czasami mówi się inaczej: jest to zbiór *częściowo uporządkowany* lub po prostu *częściowy porządek*. Aby przybliżyć intuicje, zauważmy, że można wprowadzić definicyjnie relację **<**:

$$x < y \text{ wtw } x \leq y \text{ oraz } x \neq y, \text{ dla dowolnych } x, y \in X$$

i taka relacja będzie przeciwzrotna i przechodnia w X, a więc również przeciwsymetryczna w X.

A oto – dla przykładu - inna definicja pojęcia drzewa (Priest nią nie operuje):

Parę uporządkowaną $<X, \sigma>$ nazywamy *drzewem o korzeniu* x wtw X jest niepustym zbiorem, σ jest przechodnią i przeciwsymetryczną relacją binarną w X, x jest jedynym elementem σ-minimalnym w X, oraz dla każdego $y \in X / \{x\}$ istnieje dokładnie jeden bezpośredni σ-poprzednik.

x jest *elementem σ-minimalnym* w X wtw

(i) $x \in X$,

(ii) $\neg\exists y \in X\ (y\sigma x)$, oraz

(iii) $\forall y \in X\ (x = y \vee x\sigma y)$

x jest *bezpośrednim σ-poprzednikiem* y wtw

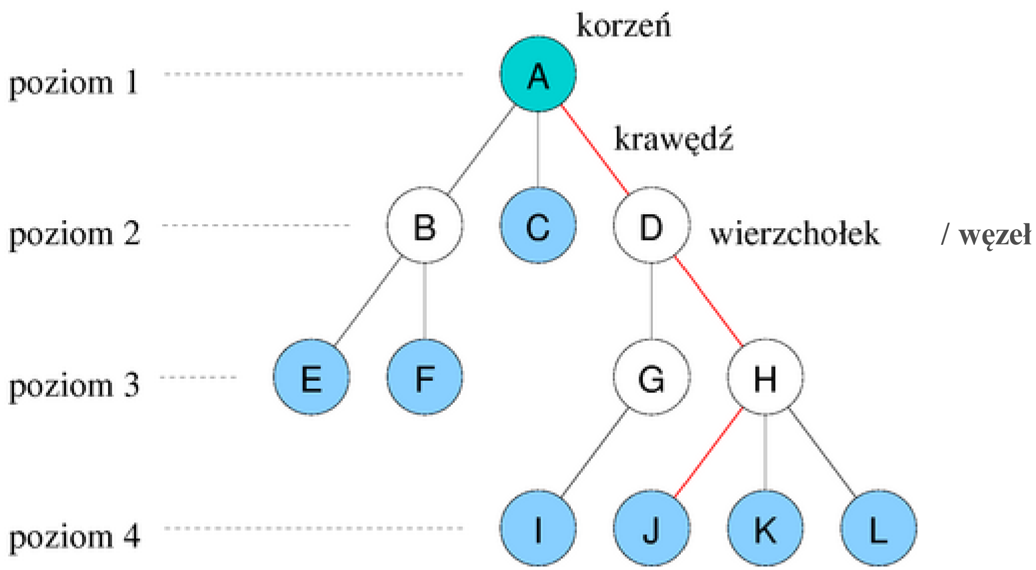
(iv) $x\sigma y$,

(v) $x \neq y$, oraz

(vi) $\forall z \in X\ (x\sigma z \wedge z\sigma y \rightarrow z = y \vee z = x)$.

A oto określenie, które ma niewątpliwie najwięcej zalet:

Drzewo, jakie jest, każdy widzi.



…