Andrzej Wiśniewski

Logika II

Materiały do wykładu dla studentów kognitywistyki

Wykład 15. Trójwartościowa logika zdań Łukasiewicza

W logice trójwartościowej, obok tradycyjnych wartości logicznych, **Prawdy 1** i **Fałszu 0**, posługujemy się również trzecią wartością logiczną – zresztą rozmaicie rozumianą.

Dla potrzeb tego wykładu przyjmijmy po prostu, że zbiór wartości logicznych jest trójelementowy: {**0**, ½, **1**}.

Interesować nas będzie głównie trójwartościowy rachunek zdań, odkryty/ skonstruowany na początku XXw.[1] przez polskiego logika, Jana Łukasiewicza. Rachunek ten oznaczymy przez $\mathbf{Ł_3}$.

U podstaw rozważań Łukasiewicza leżała pewna motywacja filozoficzna (o czym na wykładzie).

[1] Pierwsza publikacja ukazała się w 1920 r.

Rachunek **Ł$_3$***: sposób rozumienia spójników*

Rachunek **Ł$_3$** jest wyrażony w takim samym języku, co *KRZ*. Jednakże sposób rozumienia spójników jest odmienny niż w przypadku *KRZ*. Dalej będziemy dalej używać symboli $\neg$, $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$ w sensie nadanym im przez rachunek **Ł$_3$**.

Ten sposób rozumienia można najprościej opisać za pomocą następujących tabelek:

A	$\neg A$
0	**1**
½	**½**
1	**0**

Rachunek **Ł$_3$***: sposób rozumienia spójników*

$\to$	0	½	1
0	1	1	1
½	½	1	1
1	0	½	1

$\vee$	0	½	1
0	0	½	1
½	½	½	1
1	1	1	1

$\wedge$	0	½	1
0	0	0	0
½	0	½	½
1	0	½	1

$\leftrightarrow$	0	½	1
0	1	½	0
½	½	1	½
1	0	½	1

Objaśnienie: Wartość logiczna formuły A znajduje się w linii pionowej, wartość formuły B w linii poziomej, natomiast wartość formuły postaci ($A \otimes B$), gdzie $\otimes$ jest spójnikiem dwuargumentowym, znajduje się na przecięciu obu linii.

Ł$_3$-*wartościowania i* **Ł$_3$**-*tautologie*

W pierwszym przybliżeniu możemy powiedzieć, że **Ł$_3$**-wartościowaniem jest funkcja przyporządkowująca formułom wartości logiczne ze zbioru {**0**, ½, **1**} i „zgodna” z powyższymi tabelkami. Z kolei **Ł$_3$**-tautologią jest formuła, która jest prawdziwa (tj. „otrzymuje” wartość **1**) przy każdym wartościowaniu.

Już takie pobieżne określenie pozwala nam zobaczyć, że następujące tautologie *KRZ* nie są **Ł$_3$**-tautologiami:

(1) $p \vee \neg p$

(2) $\neg(p \wedge \neg p)$

(3) $p \wedge \neg p \rightarrow q$

(4) $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$

(5) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$

(6) $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$

Natomiast każda **Ł$_3$**-tautologia jest tautologią *KRZ*.

Gdyby chcieć nieco dokładniej określić pojęcie **Ł$_3$**-wartościowania, należałoby na początek zdefiniować funkcje prawdziwościowe odpowiadające poszczególnym spójnikom. Przykładowo, funkcję $f_\neg$ odpowiadającą spójnikowi negacji w **Ł$_3$** da się zdefiniować tak:

(i) $f_\neg(\mathbf{0}) = \mathbf{1}$,

(ii) $f_\neg(\mathbf{½}) = \mathbf{½}$,

(iii) $f_\neg(\mathbf{1}) = \mathbf{0}$.

co możemy zresztą „odczytać” z tabelki:

A	$\neg A$
0	**1**
½	**½**
1	**0**

Natomiast funkcję $f_\to$, wyznaczającą znaczenie spójnika implikacji $\to$ w **Ł$_3$**, definiuje następujący ciąg równości:

(i) $f_\to(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{1}$,
(ii) $f_\to(\mathbf{0}, \mathbf{½}) = \mathbf{1}$,
(iii) $f_\to(\mathbf{0}, \mathbf{1}) = \mathbf{1}$,
(iv) $f_\to(\mathbf{½}, \mathbf{0}) = \mathbf{½}$,
(v) $f_\to(\mathbf{½}, \mathbf{½}) = \mathbf{1}$,
(vi) $f_\to(\mathbf{½}, \mathbf{1}) = \mathbf{1}$,
(vii) $f_\to(\mathbf{1}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$,
(viii) $f_\to(\mathbf{1}, \mathbf{½}) = \mathbf{½}$,
(ix) $f_\to(\mathbf{1}, \mathbf{1}) = \mathbf{1}$.

Porównajmy to z tabelką:

$\to$	**0**	**½**	**1**
0	**1**	**1**	**1**
½	**½**	**1**	**1**
1	**0**	**½**	**1**

Podanie definicji funkcji $f_\wedge$, $f_\vee$ i $f_\leftrightarrow$ dla **Ł**$_3$ pozostawiam Państwu jako ćwiczenie :)

Definicja 15.1. **Ł**$_3$-wartościowaniem *jest dowolna funkcja* v, *której argumentami są formuły* (*języka rachunku* **Ł**$_3$/*KRZ*), *a wartości należą do zbioru* {**0**, ½, **1**}, *spełniająca następujące warunki*:

(a) *dla dowolnej zmiennej zdaniowej* p_i: $v(p_i) = \mathbf{0}$ *albo* $v(p_i) = ½$ *albo* $v(p_i) = \mathbf{1}$,

(b) $v(\neg A) = f_\neg(v(A))$,

(c) $v(A \rightarrow B) = f_\rightarrow(v(A), v(B))$,

(c) $v(A \wedge B) = f_\wedge(v(A), v(B))$,

(d) $v(A \vee B) = f_\vee(v(A), v(B))$,

(e) $v(A \leftrightarrow B) = f_\leftrightarrow(v(A), v(B))$.

Pojęcie **Ł**$_3$-tautologii możemy teraz zdefiniować następująco:

Definicja 15.2.

Formuła A jest **Ł**$_3$-tautologią *wtw dla każdego* **Ł**$_3$-*wartościowania* v: $v(A) = \mathbf{1}$.

Niech $X \models_{Ł_3} B$ skraca „formuła B wynika na gruncie rachunku $\mathbf{Ł_3}$ ze zbioru formuł X".

Definicja 15.3. (wynikanie na gruncie $\mathbf{Ł_3}$) $X \models_{Ł_3} B$ *wtw dla każdego* $\mathbf{Ł_3}$*-wartościowania* v *zachodzi:* (#) *jeżeli* $v(A) = \mathbf{1}$ *dla każdego* $A \in X$, *to* $v(B) = \mathbf{1}$.

Wynikanie na gruncie $\mathbf{Ł_3}$ pociąga wynikanie na gruncie *KRZ*. Nie jest jednak na odwrót.

System aksjomatyczny rachunku **Ł**$_3$

Rachunek **Ł**$_3$ można przedstawić w postaci systemu aksjomatycznego. Oto jedna z aksjomatyk:

$p \to (q \to p)$

$(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$

$(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$

$((p \to \neg p) \to p) \to p$

Pierwotne reguły inferencyjne to reguła odrywania, reguła podstawiania (rozumiane standardowo) oraz *reguła zastępowania z uwagi na następujące równości definicyjne* (odmienne od znanych z *KRZ*!!!):

$$A \vee B =_{\mathrm{df}} (A \to B) \to B$$
$$A \wedge B =_{\mathrm{df}} \neg(\neg A \vee \neg B)$$
$$A \leftrightarrow B =_{\mathrm{df}} (A \to B) \wedge (B \to A).$$

Pojęcia dowodu i tezy rozumiemy w zwykły sposób. Można udowodnić:

Twierdzenie 15.1. *Formuła A jest tezą rachunku* **Ł**$_3$ *wtw A jest* **Ł**$_3$*-tautologią*.

Dodatek 1. **Ł$_3$** *jako logika modalna*

Gdy wprowadzimy do **Ł$_3$** spójnik możliwości $\Diamond$ za pomocą równości definicyjnej:

$$\Diamond A =_{df} \neg A \to A$$

i spójnik konieczności $\Box$ poprzez równość:

$$\Box A =_{df} \neg\Diamond\neg A$$

a także wprowadzimy modalny spójnik I („jest przypadkowe/modalnie obojętne, że”), kładąc:

$$\mathrm{I}A =_{df} \Diamond A \wedge \neg\Box A$$

to spójniki te będą miały następujące charakterystyki semantyczne:

A	$\Diamond A$	$\Box A$	$\mathrm{I}A$
0	**0**	**0**	**0**
½	**1**	**0**	**1**
1	**1**	**1**	**0**

Po odpowiedniej adaptacji reguły zastępowania dowodliwe będą m.in.:

(7) $p \vee \mathrm{I}p \vee \neg p$

(8) $\neg(p \wedge \mathrm{I}p \wedge \neg p)$

„wyrażające” łącznie trójwartościowość logiki **Ł$_3$**.

Dodatek 2. **Ł$_3$**-*matryca*

Warto wiedzieć, że w swoich pierwszych pracach poświęconych trójwartościowemu rachunkowi zdań Łukasiewicz charakteryzował ten rachunek semantycznie, a nie w postaci systemu aksjomatycznego (podana wyżej aksjomatyka pochodzi od ucznia Łukasiewicza, Mordechaja Wajsberga).

Taka semantyczna charakterystyka polegała na - używając współczesnej terminologii – utożsamieniu **Ł$_3$** z zawartością następującej matrycy:

$$<\{\mathbf{0}, \tfrac{1}{2}, \mathbf{1}\}, f_{\neg}, f_{\to}, f_{\wedge}, f_{\vee}, f_{\leftrightarrow}, \{\mathbf{1}\}>$$

Co to znaczy? Zapraszam na wykład :)

Dodatek 3. Logiki n-wartościowe Łukasiewicza

Spójrzmy jeszcze raz na tabelki:

$\rightarrow$	0	½	1
0	1	1	1
½	½	1	1
1	0	½	1

$$\mathbf{v}(A\rightarrow B) = \begin{cases} \mathbf{1}, \text{ gdy } \mathbf{v}(A)\leq\mathbf{v}(B) \\ (\mathbf{1}-\mathbf{v}(A))+\mathbf{v}(B), \text{ gdy } \mathbf{v}(A)>\mathbf{v}(B) \end{cases}$$

$\vee$	0	½	1
0	0	½	1
½	½	½	1
1	1	1	1

$\mathbf{v}(A\vee B) = \mathbf{max}(\mathbf{v}(A),\mathbf{v}(B))$

$\wedge$	0	½	1
0	0	0	0
½	0	½	½
1	0	½	1

$\mathbf{v}(A\wedge B) = \mathbf{min}(\mathbf{v}(A),\mathbf{v}(B))$

$\leftrightarrow$	0	½	1
0	1	½	0
½	½	1	½
1	0	½	1

$\mathbf{v}(A\leftrightarrow B) = \mathbf{1}-|\mathbf{v}(A)-\mathbf{v}(B)|$

A	$\neg A$
0	1
½	½
1	0

$\mathbf{v}(\neg A) = \mathbf{1}-\mathbf{v}(A)$

albo: $\mathbf{v}(A\rightarrow B) = \mathbf{min}(\mathbf{1}, \mathbf{1} - \mathbf{v}(A) + \mathbf{v}(B))$

Otóż zamiast definiować **Ł₃**-funkcje prawdziwościowe dla poszczególnych spójników i następnie definiować **Ł₃**-wartościowania, można wprowadzić pojęcie **Ł₃**-wartościowania następująco: **Ł₃**-wartościowaniem jest dowolna funkcja **v**, określona na zbiorze wszystkich formuł, o wartościach w zbiorze {**1**, **½**, **0**}, która przyporządkowuje każdej zmiennej zdaniowej którąś z wartości logicznych: **1**, **½**, **0**, oraz spełnia warunki wyszczególnione w narysowanych wyżej „ramkach" dla dowolnych formuł *A*, *B*. [Ponieważ jednak wartości logiczne nie są liczbami, musimy przedtem albo określić odpowiednie relacje $\leq$ i >, oraz operacje **max**, **min**, +, – i | | na wartościach logicznych, albo nadać odpowiednie miary liczbowe wartościom logicznym.]

Zauważmy, że w podobny sposób można rozważać przypadki „bogatszych" zbiorów wartości logicznych postaci {**0**, **1**/*n*–**1**, **2**/*n*–**1**, ...,**1**}, gdzie $n \in \mathbf{N}$, $n > \mathbf{3}$ oraz liczba elementów to *n*, określając odpowiednie pojęcia wartościowania poprzez zależności:

- $\mathbf{v}(\neg A) = \mathbf{1} - \mathbf{v}(A)$,
- $\mathbf{v}(A \vee B) = \mathbf{max}(\mathbf{v}(A), \mathbf{v}(B))$,
- $\mathbf{v}(A \wedge B) = \mathbf{min}(\mathbf{v}(A), \mathbf{v}(B))$,
- $\mathbf{v}(A \rightarrow B) = \begin{cases} \mathbf{1}, \text{ gdy } \mathbf{v}(A) \leq \mathbf{v}(B) \\ (\mathbf{1} - \mathbf{v}(A)) + \mathbf{v}(B), \text{ gdy } \mathbf{v}(A) > \mathbf{v}(B), \end{cases}$
- $\mathbf{v}(A \leftrightarrow B) = \mathbf{1} - |\mathbf{v}(A) - \mathbf{v}(B)|$

Otrzymamy w ten sposób semantyki dla n-wartościowych rachunków zdań Łukasiewicza, gdzie $n \in \mathbf{N}$ oraz $n > 2$. [Jest to opis intuicyjny. W praktyce określa się je za pomocą n-wartościowych matryc Łukasiewicza pewnego typu.]

***

Omówione tutaj logiki wielowartościowe Łukasiewicza nie są jedynymi logikami tego rodzaju (już w 1920, równolegle z Łukasiewiczem, pewne inne logiki wielowartościowe zostały odkryte przez Emila Posta).

Trzeba mieć nadzieję, że będzie jeszcze okazja, aby pomówić o pewnych ciekawych logikach wielowartościowych :)

Podobnie jak o innych logikach nieklasycznych.