Andrzej Wiśniewski

Logika II

Materiały do wykładu dla studentów kognitywistyki

Wykład 14. Wprowadzenie do logiki intuicjonistycznej

Przedstawione na poprzednich wykładach logiki modalne możemy uznać za rozszerzenia logiki klasycznej. Istnieją jednak logiki, które są alternatywne względem logiki klasycznej. Omówimy krótko tylko dwie z nich: (zdaniową) logikę intuicjonistyczną oraz logikę trójwartościową Łukasiewicza. Proszę jednak zapamiętać, że istnieje baaaardzo dużo logik alternatywnych wobec logiki klasycznej – niektórzy mówią nawet, że stanowczo za dużo :)

Z powodów, o których można długo opowiadać :), logika intuicjonistyczną cieszy się największym prestiżem spośród logik stanowiących alternatywę wobec logiki klasycznej.

Od niej zatem zaczniemy.

Intuicjonistyczna interpretacja stałych logicznych

U podstaw logiki intuicjonistycznej leży pewna podstawowa intuicja filozoficzna: fakty matematyczne są ustalane za pomocą konstrukcji. Intuicjonista sądzi, że aby wykazać, iż pewien obiekt matematyczny istnieje, trzeba ten obiekt skonstruować – nie wystarczy tutaj pokazanie, że nieistnienie rozważanego obiektu prowadzi do sprzeczności. Podobnie aby wykazać, że zachodzi pewna zależność matematyczna, nie wystarczy pokazać, że (ewentualne) nie zachodzenie tej zależności prowadzi do sprzeczności – trzeba przedstawić konstrukcję uzasadniającą zachodzenie rozważanej zależności.

W logice intuicjonistycznej stałe logiczne są rozumiane odmiennie niż w logice klasycznej – pojęcie konstrukcji i tutaj gra główną rolę.

Intuicjonistyczna interpretacja stałych logicznych

„Dowód [tego, że] ϕ” to dla intuicjonisty nic innego, jak „Konstrukcja ustalająca, że ϕ”. W konsekwencji jest (z grubsza) tak:

- dowód zdania $A \wedge B$ jest parą konstrukcji d, d^*, gdzie d jest dowodem zdania A, natomiast d^* jest dowodem zdania B,
- dowód zdania $A \vee B$ jest parą konstrukcji: d, d^*, gdzie d wybiera jedno ze zdań: A, B, natomiast d^* jest dowodem tego zdania,
- dowód zdania $A \rightarrow B$ to konstrukcja d^*, która, zastosowana do jakiegokolwiek dowodu d zdania A, daje nam dowód $d^*(d)$ zdania B, [uzupełniona sprawdzeniem, że konstrukcja ta jest istotnie dowodem zdania B],
- dowód zdania $\neg A$ to konstrukcja pokazująca, że zdanie A nie ma żadnego dowodu (tj. konstrukcja tworząca z każdego dowodu formuły A dowód formuły sprzecznej),
- dowód zdania $\exists x_i\, A(x_i)$ to konstrukcja, która wybiera obiekt α i daje dowód zdania $A[x_i / \alpha]$, gdzie α jest nazwą obiektu α,
- dowód zdania $\forall x_i\, A(x_i)$ to konstrukcja, która przypisuje każdemu obiektowi α, z rozważanego uniwersum, dowód zdania $A[x_i / \alpha]$, [poddając następnie ten dowód sprawdzeniu].

Z kolei dla intuicjonisty:

formuła *A* jest prawdą

znaczy tyle i tylko tyle, co:

formuła *A* posiada dowód.

Gdy negację i pojęcie prawdy rozumiemy klasycznie, dla dowolnego zdania *A* otrzymujemy (na mocy metalogicznej zasady wyłączonego środka):

(1) *‘A’ jest prawdą lub ‘¬A’ jest prawdą*

Jeśli natomiast negację i pojęcie prawdy rozumiemy intuicjonistycznie, to odpowiednik powyższej zależności znaczyłby tyle, co:

(1*) *‘A’ ma dowód lub istnieje dowód tego, że ‘A’ nie ma żadnego dowodu*

i z pewnością nie ma powodu, aby akceptować (1*) – nawet w odniesieniu do zdań dyscyplin formalnych.

W konsekwencji prawem intuicjonistycznej logiki zdań nie powinno być:

(2) $p \vee \neg p$

i faktycznie nim nie jest.

Logika intuicjonistyczna a niektóre prawa logiki klasycznej

Podobnie gdy negację rozumiemy klasycznie, to ze zdania postaci $\neg\neg A$ wynika - na gruncie logiki klasycznej - zdanie *A*. Przy interpretacji intuicjonistycznej stwierdzenie postaci:

(3) ‘$\neg A$’ *jest prawdą*

znaczy tyle, co:

(3*) *istnieje dowód tego, że A nie ma żadnego dowodu*

natomiast stwierdzenie postaci:

(4) ‘$\neg\neg A$’ *jest prawdą*

znaczy:

(4*) *istnieje dowód tego, że nie ma żadnego dowodu tego, że istnieje dowód tego, że A nie ma żadnego dowodu.*

To ostatnie zdanie z pewnością głosi co innego, niż:

(5) *A ma dowód (tj. A jest prawdą intuicjonistyczną)*

i nie widać powodu, aby wynikanie *A* **z** $\neg\neg A$ zachodziło na gruncie logiki intuicjonistycznej.

Logika intuicjonistyczna a niektóre prawa logiki klasycznej

W konsekwencji prawem intuicjonistycznego rachunku zdań nie powinno być – i faktycznie nie jest – prawo:

(6) $\neg\neg p \to p$

Z drugiej strony, prawo:

(7) $p \to \neg\neg p$

zdaje się nie budzić podobnych zastrzeżeń.

Patrząc od strony czysto formalnej, pewne prawa *KRZ* nie są prawami Intuicjonistycznego Rachunku Zdań.

Terminologia: Dalej zamiast „Intuicjonistyczny Rachunek Zdań" będziemy pisać krótko: *IRZ.*

Oto dalsze przykłady praw *KRZ*, które nie są prawami *IRZ*: [1]

(8) $(\neg p \to p) \to p$,

(9) $((p \to q) \to p) \to p$,

[1] Ściślej: których *odpowiedniki* nie są tezami *IRZ* ; „odpowiedniki" uzyskujemy rozumiejąc spójniki na sposób intuicjonistyczny (zob. dalej).

Logika intuicjonistyczna a niektóre prawa logiki klasycznej

(10) $(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$,

(11) $(p \to q) \to (\neg p \vee q)$,

(12) $\neg(p \wedge q) \to (\neg p \vee \neg q)$,

(13) $\neg(\neg p \wedge \neg q) \to p \vee q$,

(14) $\neg(\neg p \vee \neg q) \to p \wedge q$.

A oto przykłady (meta)tez *KRP*, których odpowiedniki nie są (meta)tezami Intuicjonistycznego Rachunku Predykatów:

(15) $\neg\forall x \neg A \to \exists x A$,

(16) $\neg\exists x \neg A \to \forall x A$,

(17) $\neg\forall x A \to \exists x \neg A$.

Implikacje odwrotne do powyższych (ściślej: ich odpowiedniki) jednak zachodzą w Intuicjonistycznym Rachunku Predykatów. Ponadto w obu rachunkach obowiązuje:

(18) $\neg\exists x A \leftrightarrow \forall x \neg A$.

Intuicjonistyczny rachunek zdań można przedstawić w postaci systemu aksjomatycznego. System taki jest wyrażony – w zasadzie – w tym samym języku, co *KRZ*: spójnikami są negacja, implikacja, koniunkcja i alternatywa, natomiast formuły są budowane przy pomocy spójników ze zmiennych zdaniowych. (Dla uproszczenia nie wprowadzamy w tej prezentacji spójnika równoważności.) Trzeba jednak pamiętać, że w *IRZ* ze spójnikami łączone są inne intuicje niż w przypadku *KRZ*. Jeśli tak, to spójniki te wypadałoby zapisywać jakoś inaczej niż spójniki *KRZ*. Jednakże nie pójdziemy tutaj tak daleko wobec *wszystkich* spójników: inaczej będziemy zapisywać tylko spójniki negacji i implikacji. Nadamy im odpowiednio postacie $\neg$ oraz $\supset$. Należy jednak pamiętać, że również spójniki koniunkcji $\wedge$ i alternatywy $\vee$ występujące w formułach *IRZ* należy rozumieć intuicjonistycznie, a nie klasycznie.

Dygresja: W literaturze przedmiotu *IRZ* często wyraża się w języku, w alfabecie którego występuje stała zdaniowa *falsum* $\perp$. Przy jej pomocy można zdefiniować negację intuicjonistyczną $\neg$ następująco:

$$\neg A =_{df} A \supset \perp.$$

A oto jedna z możliwych aksjomatyk *IRZ*:

$p \supset (q \supset p)$
$(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$
$p \wedge q \supset p$
$p \wedge q \supset q$
$(p \supset q) \supset ((p \supset r) \supset (p \supset q \wedge r))$
$p \supset p \vee q$
$q \supset p \vee q$
$(p \supset r) \supset ((q \supset r) \supset (p \vee q \supset r))$
$(p \supset \neg q) \supset (q \supset \neg p)$
$\neg p \supset (p \supset q)$

Pierwotne reguły inferencyjne prezentowanego systemy aksjomatycznego *IRZ* to reguła odrywania RO i reguła podstawiania RP (rozumiane analogicznie jak w przypadku *KRZ*). Pojęcia dowodu i tezy rozumiane są w standardowy sposób.

Pewne własności IRZ

W przeciwieństwie do spójników klasycznych, *spójniki intuicjonistyczne nie są wzajemnie definiowalne*.

W przypadku logiki intuicjonistycznej – zdaniowej i kwantyfikatorowej - zachodzi tzw. własność dyzjunkcji:

Formuła postaci $A \vee B$ jest tezą wtw co najmniej jedna z formuł: A, B jest tezą.

Odmiennie jest w przypadku logiki klasycznej.

Udowodniono, że formuła *A* języka *KRZ* jest tezą *KRZ* wtw formuła języka *IRZ* o postaci $\neg\neg A'$ jest tezą *IRZ*; A' oznacza tutaj formułę będącą *odpowiednikiem* formuły *A*, tj. taką, którą uzyskujemy z *A* zastępując spójniki klasyczne spójnikami intuicjonistycznymi.

Gdy z kolei w podanych wyżej aksjomatach *IRZ* zastąpimy spójniki intuicjonistyczne – klasycznymi, oraz dołączymy do tak otrzymanych formuł formułę $p \vee \neg p$, otrzymamy aksjomatykę *KRZ*, która wystarcza do udowodnienia – w oparciu o R0 i RP – każdej tezy/tautologii *KRZ*.

Znane są ponadto pewne dalsze ciekawe związki formalne między *IRZ* a *KRZ*. Jakie? Zapraszam na wykład :)

Modele Kripkego dla *IRZ*

Dla *IRZ* istnieje kilka adekwatnych semantyk. Jedną z nich jest *semantyka typu Kripkego*, którą się teraz zajmiemy.

Definicja 14.1. Modelem Kripkego dla *IRZ* *nazywamy dowolną trójkę uporządkowaną* <***W***, ***R***, ***V***> taką, że: (a) ***W*** *jest niepustym zbiorem*; (b) ***R*** *jest relacją binarną w* ***W***, *zwrotną i przechodnią w* ***W***; (c) ***V*** *jest funkcją, której argumentami są formuły języka IRZ i elementy zbioru* ***W***, *natomiast wartościami – prawda* **1** *i fałsz* **0**, *spełniającą następujące warunki:*

(i) *dla dowolnej zmiennej zdaniowej* p_i, *dla każdego* $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$:

$$\mathbf{V}(p_i, \mathbf{w}) = \mathbf{1} \textit{ lub } \mathbf{V}(p_i, \mathbf{w}) = \mathbf{0};$$

(**H**) *dla dowolnej zmiennej zdaniowej* p_i, *dla każdego* $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$:

$$\textit{jeżeli } \mathbf{V}(p_i, \mathbf{w}) = \mathbf{1} \textit{ oraz } \mathbf{wRw^*}, \textit{ to } \mathbf{V}(p_i, \mathbf{w^*}) = \mathbf{1};$$

(ii) *dla dowolnej formuły A języka IRZ, dla każdego* $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$: $\mathbf{V}(\neg A, \mathbf{w}) = \mathbf{1}$ *wtw dla każdego* $\mathbf{w^*} \in \mathbf{W}$ *takiego, że* $\mathbf{wRw^*}$: $\mathbf{V}(A, \mathbf{w^*}) = \mathbf{0}$;

(iii) *dla dowolnych formuł A, B języka IRZ, dla każdego* $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$:

- $\mathbf{V}(A \wedge B, \mathbf{w}) = \mathbf{1}$ *wtw* $\mathbf{V}(A, \mathbf{w}) = \mathbf{1}$ *oraz* $\mathbf{V}(B, \mathbf{w}) = \mathbf{1}$;
- $\mathbf{V}(A \vee B, \mathbf{w}) = \mathbf{1}$ *wtw* $\mathbf{V}(A, \mathbf{w}) = \mathbf{1}$ *lub* $\mathbf{V}(B, \mathbf{w}) = \mathbf{1}$;
- $\mathbf{V}(A \supset B, \mathbf{w}) = \mathbf{1}$ *wtw dla każdego* $\mathbf{w^*} \in \mathbf{W}$ *takiego, że* $\mathbf{wRw^*}$: $\mathbf{V}(A, \mathbf{w^*}) = \mathbf{0}$ *lub* $\mathbf{V}(B, \mathbf{w^*}) = \mathbf{1}$.

Intuicje zostaną omówione na wykładzie (na który oczywiście zapraszam :))

Terminologia: Warunek (**H**) to tzw. *heredity condition*. Będziemy go nazywać *warunkiem dziedziczności*.

Definicja 14.2. *Formuła A języka IRZ jest* prawdziwa w modelu Kripkego *<**W**, **R**, **V**> dla IRZ wtw dla każdego **w** $\in$ **W** jest tak, że **V**(A, **w**) =* **1**.

Zauważmy, że warunek prawdziwości dla formuły języka *IRZ* mającej kształt:

$$\neg A$$

przypomina warunek prawdziwości dla formuły *MRZ* o postaci:

$$\Box\neg A$$

w modelu Kripkego dla *MRZ*. Podobnie warunek prawdziwości dla formuły postaci:

$$A \supset B$$

przypomina warunek prawdziwości dla formuły języka *MRZ* mającej postać:

$$\Box(A \rightarrow B)$$

w semantyce Kripkego dla *MRZ*. W tej ostatniej semantyce nie występuje jednak żaden odpowiednik warunku dziedziczności (**H**).

Modele Kripkego dla IRZ

Przedstawiona semantyka jest *adekwatna* względem *IRZ*, natomiast *IRZ* jest *pełny* względem tej semantyki. Można udowodnić:

Twierdzenie 14.1. *Formuła A języka IRZ jest tezą IRZ wtw formuła A jest prawdziwa w każdym modelu Kripkego dla IRZ*.

Pojęcie *wynikania* definiujemy następująco:

Definicja 14.3. *Formuła A języka IRZ* wynika na gruncie *IRZ ze zbioru formuł X języka IRZ* (*co oznaczamy przez* $X \models_{\boldsymbol{IRZ}} A$) *wtw dla każdego modelu Kripkego* <$\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{V}$> *dla IRZ, dla każdego* $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$ *jest tak, że*:

$$(\#)\ \textit{jeżeli dla każdego } B \in X,\ \boldsymbol{V}(B, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1},\ \textit{to } \boldsymbol{V}(A, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}.$$

Innymi słowy, $X \models_{IRZ} A$ zachodzi dokładnie wtedy, gdy nie istnieją: model Kripkego <$\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{V}$> dla *IRZ* oraz „świat" $\boldsymbol{w}$ tego modelu takie, że wszystkie formuły w X są „prawdziwe" w świecie $\boldsymbol{w}$ (tj. dla każdego $B \in X$, $\boldsymbol{V}(B, \mathbf{w}) = \mathbf{1}$) i jednocześnie A nie jest prawdą w świecie $\boldsymbol{w}$ (tj. $\boldsymbol{V}(A, w) = \mathbf{0}$)).

Podobnie jak w przypadku *MRZ*, również dla *IRZ* istnieje metoda tabel analitycznych oparta – w istocie - na semantyce typu Kripkego dla *IRZ*.

Nie wchodząc zbytnio w szczegóły, powiemy tutaj kilka słów o metodzie tabel analitycznych dla *IRZ* w wersji zaproponowanej przez Grahama Priesta.

Tabela analityczna ma postać drzewa, którego węzłami są formuły etykietowane oraz formuły relacyjne.

Podobnie jak w przypadku tabel dla *MRZ*, formuła relacyjna ma postać:

(19) *iRj*

gdzie *i*, *j* są liczebnikami. Formuły etykietowane mają schematy:

(20) *A*, +*i*

(21) *A*, -*i*

gdzie *A* jest formułą języka *IRZ* oraz *i* jest liczebnikiem. Sens intuicyjny formuły etykietowanej postaci (20) jest następujący:

formuła A jest prawdziwa/dowodliwa w świecie oznaczanym przez liczebnik i

natomiast sens intuicyjny formuły etykietowanej postaci (21) to:

formuła A jest fałszywa/nie jest dowodliwa w świecie oznaczanym przez liczebnik i.

Budując tabelę analityczną dla formuły A języka *IRZ* – pragnąc ustalić, czy A jest tezą *IRZ* - rozpoczynamy od formuły etykietowanej:

$$A, -0$$

Z kolei pragnąc ustalić, czy $\{B_1, ..., B_n\} \models_{IRZ} A$, rozpoczynamy od:

$$A, -0$$
$$B_1, +0$$
$$...$$
$$B_n, +0$$

Kolejne węzły wprowadzamy (o ile to konieczne) stosując reguły. Oto one:

Metoda tabel analitycznych dla IRZ

$$\frac{A \wedge B, +i}{\begin{matrix} A, +i \\ B, +i \end{matrix}} \qquad \frac{A \wedge B, -i}{A, -i \mid B, -i} \qquad \frac{A \vee B, +i}{A, +i \mid B, +i} \qquad \frac{A \vee B, -i}{\begin{matrix} A, -i \\ B, -i \end{matrix}}$$

$$\frac{\begin{matrix} A \supset B, +i \\ iRj \end{matrix}}{A, -j \mid B, +j}$$

$$\frac{A \supset B, -i}{\begin{matrix} iRj \\ A, +j \\ B, -j \end{matrix}}$$

gdzie *j* jest nowym liczebnikiem

$$\frac{\begin{matrix} \neg A, +i \\ iRj \end{matrix}}{A, -j}$$

$$\frac{\neg A, -i}{\begin{matrix} iRj \\ A, +j \end{matrix}}$$

gdzie *j* jest nowym liczebnikiem

$$\frac{\begin{matrix} z, +i \\ iRj \end{matrix}}{z, +j}$$

gdzie *z* jest dowolną zmienną zdaniową

r_{zw}: (zwrotność)

$$\frac{\varphi(i)}{iRi}$$

r_{prz}: (przechodniość)

$$\frac{\begin{array}{c} iRj \\ jRk \end{array}}{iRk}$$

Tabela jest *zamknięta* wtw na każdej gałęzi tej tabeli występuje co najmniej jedna para komplementarnych formuł etykietowanych, tj. co najmniej jedna para formuł etykietowanych: $B, +i$, $B, -i$.

Zamkniętą tabelę dla formuły A języka *IRZ* możemy uważać za dowód tego, że A jest tezą *IRZ*.

Gdy budujemy tabelę, której celem jest wykazanie, iż $\{B_1, ..., B_n\} \models_{IRZ} A$, zamknięcie tej tabeli świadczy o tym, że A wynika na gruncie *IRZ* z $\{B_1, ..., B_n\}$.

Przykłady zostaną podane na wykładzie.

Na który, jak zawsze, zapraszam :)