
Laurencius. de.
Voltolina pinxit

1. *Wprowadzenie do rachunku zbiorów*

Uwaga 1.1. W teorii mnogości mówimy o zbiorach w sensie dystrybutywnym; rachunek zbiorów jest fragmentem **teorii mnogości.**

Pojęcia „bycia zbiorem” oraz „należenia do zbioru” są pojęciami pierwotnymi; nie są one (wprost) definiowane, lecz ich sens określają łącznie aksjomaty teorii mnogości.

Piszemy:

Zbiór(x)	dla wyrażenia tego, że x jest zbiorem,
$x \in A$	dla wyrażenia tego, że (przedmiot, obiekt, indywiduum) x należy do zbioru A.

Gdy $x \in A$, mówimy też, że x *jest elementem* zbioru A.

Uwaga 1.2. Rozróżnienie między indywiduami a zbiorami nie ma charakteru absolutnego. W szczególności, zbiory mogą być elementami (należeć do) innych zbiorów.

Mamy dwa podstawowe sposoby określania zbioru:

1. **sporządzenie listy elementów określanego zbioru.**

Notacja: $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ oznacza zbiór, którego elementami są obiekty $a_1, a_2, ..., a_n$ i żadne inne.

$\{a\}$ oznacza zbiór, którego jedynym elementem jest obiekt a (zbiór tego rodzaju nazywamy *zbiorem jednostkowym* lub *singletonem*).

Przykład 1.1. {Zielona Góra, Gorzów Wielkopolski}

Przykład 1.2. $\{1, 3, 5, 7\}$

Przykład 1.3. $\{1, 3, \{5, 7\}\}$

Dygresja 1.1. Zbiór $\{1, 3, 5, 7\}$ ma cztery elementy, natomiast zbiór $\{1, 3, \{5, 7\}\}$ ma trzy elementy. Dlaczego?

Uwaga 1.3. Elementy listy powinny desygnować różne obiekty. Gdy, przykładowo, napiszemy $\{1, 2, 1\}$, jest to – używając eufemizmu - pretensjonalny opis zbioru $\{1, 2\}$.

2. **podanie warunku, który spełniają te i tylko te obiekty, które są elementami określanego zbioru.**

Notacja: $\{x : \Phi(x)\}$ oznacza zbiór wszystkich x-ów takich, że $\Phi(x)$

Przykład 1.4. $\{x : x$ jest studentem 1-go roku kognitywistyki$\}$

- *zbiór wszystkich studentów 1-go roku kognitywistyki*

Przykład 1.5. $\{x : x$ jest liczbą naturalną i x jest podzielne przez 2$\}$

- *zbiór wszystkich liczb naturalnych parzystych*

Przykład 1.6. $\{x : x$ jest mężczyzną w ciele kobiety$\}$

Dygresja 1.2. Czasami zamiast dwukropka używamy kreski |. Tak więc napisy $\{x : \Phi(x)\}$ oraz $\{x \mid \Phi(x)\}$ mają to samo znaczenie.

Dygresja 1.3. Gdy pragniemy scharakteryzować pewien podzbiór uprzednio scharakteryzowanego zbioru, czasami umieszczamy odniesienie do tego zbioru przed dwukropkiem/kreską. Przykładowo, napisy:

$$\{x \in N : x \text{ jest podzielne przez 2}\}$$

$$\{x : x \text{ jest liczbą naturalną i } x \text{ jest podzielne przez 2}\}$$

oznaczają ten sam zbiór, tj. zbiór liczb naturalnych parzystych.

Dygresja 1.4. Zbioru nieskończonego nie możemy scharakteryzować poprzez podanie listy jego wszystkich elementów. Niektóre zbiory skończone możemy jednak scharakteryzować zarówno poprzez podanie listy, jak i poprzez podanie warunku. Przykładowo, zbiór {1, 3, 5, 7} można również określić następująco:

$$\{x\text{: } x \text{ jest nieparzystą liczbą całkowitą dodatnią mniejszą od 9}\}$$

Niech $\boldsymbol{Z} =_{\mathrm{df}} \{X : \neg(X \in X)\}$. Zapytajmy, czy $\boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{Z}$?

Załóżmy, że $\boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{Z}$. Wówczas na mocy definicji zbioru $\boldsymbol{Z}$ dostajemy:

$$\neg(\boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{Z}).$$

Załóżmy, że $\neg(\boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{Z})$. Wówczas na mocy definicji zbioru $\boldsymbol{Z}$ dostajemy:

$$\boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{Z}.$$

Mamy zatem dwie implikacje:

$$\boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{Z} \rightarrow \neg(\boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{Z})$$

$$\neg(\boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{Z}) \rightarrow \boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{Z}$$

skąd dostajemy $\quad \boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{Z} \leftrightarrow \neg(\boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{Z})$

co na mocy KRZ daje $\quad \boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{Z} \wedge \neg(\boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{Z})$

czyli sprzeczność !!

W aksjomatycznych systemach teorii mnogości sprzeczność ta jest blokowana na różne wyrafinowane sposoby.

Notacja: wyrażenie wtw jest skrótem zwrotu „wtedy i tylko wtedy, gdy".

Następujące podstawowe zasady są albo aksjomatami teorii mnogości, albo konsekwencjami jej aksjomatów:

ZASADA EKSTENSJONALNOŚCI: *Zbiory A oraz B są identyczne wtw mają one dokładnie te same elementy; symbolicznie*:

$$A = B \ \ wtw \ \ \forall x\,(x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

Mówiąc swobodnie, wynika stąd, że określić zbiór to tyle, co określić, z jakich przedmiotów się on składa.

Przykład 1.7. Niech:

$A = \{x : x$ jest prostokątem równobocznym$\}$

$B = \{x : x$ jest kwadratem$\}$

Zbiory A oraz B są identyczne (tj. $A = B$).

ZASADA DYSTRYBUTYWNOŚCI: *Żaden zbiór nie jest identyczny z żadnym ze swoich elementów; symbolicznie*:

$$\neg(\exists y\,\exists x\,(\mathbf{Zbi\acute{o}r}(x) \wedge y \in x \wedge x = y))$$

Intuicyjnie rzecz biorąc, zbiór pusty to zbiór nie mający żadnego elementu. Pojęcie to można ściśle zdefiniować następująco:

Definicja 1.1 (*zbiór pusty*) *Zbiorem pustym nazywamy zbiór*:

$$\{x : x = x \wedge \neg(x = x)\}.$$

Zbiór pusty oznaczamy symbolem $\varnothing$.

Wniosek 1.1. *Następujące zbiory:*

$$\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\{\{\varnothing\}\}\}, \{\{\{\{\varnothing\}\}\}\}, \ldots$$

są różne między sobą.

Inkluzję zbiorów (inaczej: zawieranie się zbiorów) definiujemy następująco:

Definicja 1.2. (inkluzja) *Zbiór A zawiera się w zbiorze B wtw każdy element zbioru A jest też elementem zbioru B; symbolicznie*:

$$A \subseteq B \text{ wtw } \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$$

Definicja 1.3. (podzbiór) *Zbiór A jest podzbiorem zbioru B wtw $A \subseteq B$.*

Dygresja 1.5. Zbiór pusty jest podzbiorem każdego zbioru. Dlaczego?

Przykład 1.8. Zbiór wszystkich mężczyzn jest podzbiorem zbioru wszystkich ludzi.

Przykład 1.9. Zbiór wszystkich ludzi jest podzbiorem zbioru wszystkich ludzi.

Wniosek 1.2. *Każdy zbiór jest swoim własnym podzbiorem*

- albowiem $\forall x(x \in A \rightarrow x \in A)$

Definicja 1.3. (inkluzja właściwa) $A \subset B$ *wtw* $A \subseteq B \wedge \neg(A = B)$

Definicja 1.4. (podzbiór właściwy) *Zbiór A jest podzbiorem właściwym zbioru B wtw* $A \subset B$.

Wniosek 1.3. *Jeżeli* $A \subset B$, *to* $\exists x\, (x \in B \wedge \neg(x \in A))$.

Przykład 1.10. Zbiór wszystkich mężczyzn jest podzbiorem właściwym zbioru wszystkich ludzi.

OSTRZEŻENIE: Długoletnia posługa dydaktyczna wśród humanistów nauczyła mnie, że znaki $\in$ oraz $\subset$ (czy $\subseteq$) są nagminnie mylone, co znaczy, że nie dostrzega się różnicy między należeniem elementu do zbioru a zawieraniem się zbioru w zbiorze. Jest to poważny błąd! Z pewną taką rezygnacją zwracam więc uwagę, że napisy typu:

$$\mathbf{1} \subset \{\mathbf{1, 2, 3}\}$$

$$\mathbf{1} \in \mathbf{1}$$

nie mają sensu!!!

Definicja 1.5. (krzyżowanie się zbiorów)

Zbiór A krzyżuje się ze zbiorem B wtw

(i) $\exists x\ (x \in A \wedge x \in B)$,

(ii) $\exists y\ (y \in A \wedge \neg(y \in B))$, oraz

(iii) $\exists z\ (z \in B \wedge \neg(z \in A))$.

Przykład 1.11. Zbiór wszystkich leni krzyżuje się ze zbiorem wszystkich studentów.

Przykład 1.12. Następujące zbiory A i B krzyżują się:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{2, 3, 4\}$$

Definicja 1.6. (rozłączność zbiorów) *Zbiory A oraz B są rozłączne wtw*

$$\neg\exists x\ (x \in A \wedge x \in B).$$

Przykład 1.13. Zbiór wszystkich liczb całkowitych dodatnich jest rozłączny ze zbiorem wszystkich liczb całkowitych ujemnych.

Twierdzenie 1.1. *Niech A i B będą dowolnymi zbiorami. Wówczas:*

(i) *A i B są rozłączne lub*

(ii) *A jest identyczny z B lub*

(iii) *A jest podzbiorem właściwym B lub*

(iv) *B jest podzbiorem właściwym A lub*

(v) *A krzyżuje się z B.*

Uwaga: Słówko „lub” trzeba tu traktować poważnie – jako alternatywę, która nie musi być rozłączna. Np. zbiór pusty jest zarówno podzbiorem właściwym (dowolnego) zbioru niepustego, jak i jest z nim rozłączny.

Terminologia: Zbiór zbiorów (tj. zbiór, którego elementami są zbiory) nazywamy *rodziną zbiorów*.

Definicja 1.7. *Rodzinę wszystkich podzbiorów danego zbioru A nazywamy zbiorem potęgowym zbioru A i oznaczamy symbolem* 2^A.

Tak więc $2^A = \{X : X \subseteq A\}$.

Przykład 1.14. Niech $A = \{1, 2, 3\}$. Mamy wówczas:

$$2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Twierdzenie 1.2. *Jeżeli zbiór A jest skończony i ma n elementów, to zbiór potęgowy zbioru A ma* 2^n elementów.

2. *Działania na zbiorach*

Niech A i B będą dowolnymi zbiorami.

Definicja 2.1. (suma zbiorów) *Suma zbiorów A i B jest to zbiór $A \cup B$ spełniający warunek*:

$$x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B.$$

Tak więc

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Przykład 2.1. Niech $A = \{1, 2, 3\}$ oraz $B = \{3, 4, 5\}$. Wówczas:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Przykład 2.2. Niech $A = \{1, 2, 3\}$ oraz $B = \varnothing$. Wówczas:

$$A \cup B = \{1, 2, 3\}.$$

Ostrzeżenie: Sumy zbiorów nie należy mylić z sumą liczb. Np.

$$2 + 2 = 4$$

$$\{2\} \cup \{2\} = \{2\}$$

Przykład 2.3. Niech:

$A = \{x : x$ jest kognitywistą$\}$

$B = \{x : x$ jest filozofem$\}$.

Wówczas:

$$A \cup B = \{x : x \text{ jest kognitywistą} \vee x \text{ jest filozofem}\}.$$

Uwaga 2.1. Do powyższego zbioru należą:

(a) wszyscy kognitywiści, którzy są zarazem filozofami,

(b) wszyscy filozofowie, którzy są zarazem kognitywistami,

(c) wszyscy kognitywiści, którzy nie są filozofami, oraz

(d) wszyscy filozofowie, którzy nie są kognitywistami.

Definicja 2.2. (iloczyn zbiorów; inaczej: przekrój zbiorów, część wspólna zbiorów) *Iloczyn zbiorów A i B jest to zbiór $A \cap B$ spełniający warunek*:

$$x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B.$$

Zatem

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Przykład 2.4. Niech $A = \{1, 2, 3\}$ oraz $B = \{3, 4, 5\}$. Wówczas:

$$A \cap B = \{3\}$$

Przykład 2.5. Niech $A = \{1, 2, 3\}$ oraz $B = \varnothing$. Wówczas:

$$A \cap B = \varnothing$$

Ostrzeżenie: Iloczynu zbiorów nie należy mylić z iloczynem liczb. Np.

$$2 \times 2 = 4$$

$$\{2\} \cap \{2\} = \{2\}$$

Przykład 2.6. Niech:

$A = \{x : x \text{ jest kognitywistą}\}$

$B = \{x : x \text{ jest filozofem}\}$.

Wówczas:

$$A \cap B = \{x : x \text{ jest kognitywistą} \wedge x \text{ jest filozofem}\}.$$

Uwaga 2.2. Do powyższego zbioru należą wyłącznie:

(a) wszyscy kognitywiści, którzy są zarazem filozofami,

(b) wszyscy filozofowie, którzy są zarazem kognitywistami.

Notacja: Zamiast $\neg(x \in A)$ piszemy $x \notin A$.

Definicja 2.3. (różnica zbiorów) *Różnica zbiorów A i B jest to zbiór $A \setminus B$ spełniający warunek*:

$$x \in A \setminus B \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B.$$

Tak więc

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Przykład 2.7. Niech $A = \{1, 2, 3\}$ oraz $B = \{3, 4, 5\}$. Wówczas:

$$A \setminus B = \{1, 2\}$$

Przykład 2.8. Niech $A = \{1, 2, 3\}$ oraz $B = \varnothing$. Wówczas:

$$A \setminus B = \{1, 2, 3\}$$

Do przemyślenia: $B \setminus A = ?$

Przykład 2.9. Niech:

$A = \{x : x$ jest kognitywistą$\}$

$B = \{x : x$ jest filozofem$\}$.

Wówczas:

$$A \setminus B = \{x : x \text{ jest kognitywistą} \wedge x \text{ nie jest filozofem}\}$$

Uwaga 2.3. Do powyższego zbioru należą wyłącznie ci kognitywiści, którzy nie są filozofami.

Przykład 2.10. Niech A i B będą takie same jak poprzednio. Wówczas:

$$B \setminus A = \{x\text{: } x \text{ jest filozofem} \wedge x \text{ nie jest kognitywistą}\}$$

czyli $B \setminus A$ jest zbiorem tych wszystkich filozofów, którzy nie są kognitywistami.

Definicja 2.4. (różnica symetryczna zbiorów) *Różnica symetryczna zbiorów A i B jest to zbiór $A \div B$ spełniający warunek*:

$$x \in A \div B \leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A).$$

Zatem

$$A \div B = \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}.$$

Przykład 2.11. Niech $A = \{1, 2, 3\}$ oraz $B = \{3, 4, 5\}$. Wówczas:

$$A \div B = \{1, 2, 4, 5\}$$

Przykład 2.12. Niech $A = \{1, 2, 3\}$ oraz $B = \{3, 4, 5\}$. Wówczas:

$$B \div A = \{1, 2, 4, 5\}$$

Przykład 2.13. Niech:

$A = \{x : x \text{ jest kognitywistą}\}$

$B = \{x : x \text{ jest filozofem}\}$.

Wówczas:

$A \div B = \{x : (x \text{ jest kognitywistą} \wedge x \text{ nie jest filozofem}) \vee (x \text{ jest filozofem} \wedge x \text{ nie jest kognitywistą})\}$.

czyli elementami zbioru $A \div B$ są wszyscy kognitywiści nie-filozofowie, a także wszyscy filozofowie nie-kognitywiści.

Wniosek 2.1:

$$A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Teraz załóżmy, że ograniczamy się do rozważania podzbiorów pewnego dowolnego ale ustalonego zbioru **U**, zwanego uniwersum, przestrzenią lub zbiorem uniwersalnym.

Definicja 2.5. (dopełnienie zbioru w zbiorze) *Dopełnieniem zbioru A w zbiorze* **U** *nazywamy zbiór A' spełniający równość*:

$$A' = \mathbf{U} \setminus A.$$

Wniosek 2.2. $A' = \{x \in \mathbf{U} : x \notin A\}$.

Przykład 2.14.

Dopełnieniem zbioru {1, 2} w zbiorze {1, 2, 3, 4} jest zbiór {3, 4}.

Przykład 2.15.

Dopełnieniem zbioru liczb naturalnych parzystych w zbiorze liczb naturalnych jest zbiór liczb naturalnych nieparzystych.

Przykład 2.16.

Dopełnieniem zbioru wszystkich kognitywistów w zbiorze (wszystkich) ludzi jest zbiór tych wszystkich ludzi, którzy nie są kognitywistami.

Przykład 2.17.

Dopełnieniem zbioru wszystkich mężczyzn mających ponad 15 m wzrostu w zbiorze ludzi jest zbiór wszystkich ludzi.

Przykład 2.18.

Dopełnieniem zbioru wszystkich ludzi w zbiorze wszystkich ludzi jest zbiór pusty.

Twierdzenie 2.1. *Niech* **U** *będzie danym uniwersum i niech* $A \subseteq \mathbf{U}$ *oraz* $B \subseteq \mathbf{U}$. *Zachodzą następujące równości*:

(a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$,

(b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Twierdzenie 2.1*. *Dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzą następujące równości*:

(a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,

(b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Twierdzenie 2.2. *Dla dowolnych podzbiorów A, B, C ustalonego uniwersum* **U** *zachodzą następujące równości*:

(a)	$A \cup B = B \cup A$,	(a*)	$A \cap B = B \cap A$,
(b)	$A \cup (B \cup C) =$	(b*)	$A \cap (B \cap C) =$
	$= (A \cup B) \cup C$,		$= (A \cap B) \cap C$,
(c)	$A \cup (B \cap C) =$	(c*)	$A \cap (B \cup C) =$
	$= (A \cup B) \cap (A \cup C)$,		$= (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
(d)	$A \cup \varnothing = A$,	(d*)	$A \cap \varnothing = \varnothing$,
(e)	$A \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$,	(e*)	$A \cap \mathbf{U} = A$.

Nie wszystkie prawa rachunku zbiorów mają postać równości. Oto przykłady:

Twierdzenie 2.3. *Niech A, B będą podzbiorami danego uniwersum* **U**. *Wówczas jeśli* $A \cap B' = \emptyset$, to $A \subseteq B$.

Twierdzenie 2.4. $A \subseteq B$ *wtw* $A \setminus B = \emptyset$.

Twierdzenie 2.5. *Dla dowolnych zbiorów A i B następujące warunki są równoważne*:

(a) $A \subseteq B$,

(b) $A \cup B = B$,

(c) $A \cap B = A$.

Zbiór dwuelementowy, którego elementami są obiekty x i y, możemy scharakteryzować zarówno jako $\{x, y\}$, jak i jako $\{y, x\}$. Innymi słowy, kolejność, w jakiej wypiszemy nazwy elementów nie gra roli, albowiem

$$\{x, y\} = \{y, x\}.$$

Gdy chcemy scharakteryzować ***pary uporządkowane***, tj. mówiąc ogólnie, zbiory dwuelementowe, w których „kolejność występowania elementów jest istotna”, musimy to zrobić w taki sposób, aby spełniony był następujący warunek:

(**WPU**) $\langle x, y\rangle = \langle u, w\rangle$ *wtw* $x = u \wedge y = w$.

Warunek (**WPU**) nie jest definicją, ale kryterium adekwatności definicji!

Definicja 2.6. (para uporządkowana)

Parą uporządkowaną $\langle x, y\rangle$ *nazywamy zbiór* $\{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Obserwacja: <Zygfryd, Berta> $\neq$ <Berta, Zygfryd>

Definicja 2.7. (n-tka uporządkowana; $n \geq 2$)

(a) $<x_1, x_2> = \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}\}$,

(b) $<x_1, x_2, ..., x_{n+1}> = <<x_1, x_2, ..., x_n>, x_{n+1}>$.

Uwaga: Podane definicje nie wymagają, aby elementy były różne: mogą one być różne, ale nie muszą. Przykładowo, <1, 1> jest parą uporządkowaną (nawiasem mówiąc, $<1, 1> = \{\{1\}, \{1, 1\}\} = \{\{1\}\}$).

Definicja 2.8. (iloczyn kartezjański; inaczej produkt kartezjański)

Iloczynem kartezjańskim zbiorów A i B nazywamy zbiór:

$$A \times B = \{<x, y> : x \in A \wedge y \in B\}.$$

Przykład 2.19. Niech $A = \{1, 2\}$ oraz $B = \{3, 4\}$. Wówczas:

$$A \times B = \{<1, 3>, <1, 4>, <2, 3>, <2, 4>\}.$$

Przykład 2.20. Niech $A = \{\text{Jaś}\}$ oraz $B = \{\text{Małgosia, Zosia}\}$.

$$A \times B = \{\langle\text{Jaś, Małgosia}\rangle, \langle\text{Jaś, Zosia}\rangle\}.$$

Przykład 2.21. Niech $A = \{1, 2\}$ oraz $B = \{1, 2\}$.

$$A \times B = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}.$$

Definicja 2.9. (iloczyn kartezjański n zbiorów; $n \geq 2$) *Iloczynem kartezjańskim zbiorów* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($n \geq 2$) *nazywamy zbiór*:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle : x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \ldots \wedge x_n \in A_n\}.$$

Definicja 2.10. (n-ta potęga kartezjańska zbioru; $n \geq 1$):

(a) $A^1 = A$,

(b) $A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ razy}}$

3. Relacje i funkcje

Relacje n-członowe

Nie wdając się w – niewątpliwie głębokie – rozważania nad tym, czym są relacje i jak one istnieją, pojęcie relacji będziemy tu rozumieli teoriomnogościowo.

Definicja 3.1. (relacja n-członowa; $n \geq 2$) *Niech $n \geq 2$.* Relacją *n*-członową *nazywamy dowolny podzbiór zbioru n-tek uporządkowanych.*

Komentarz: Zbiór pusty jest podzbiorem dowolnego zbioru, a zatem i on jest relacją (tzw. *relacją pustą*). Operowanie pojęciem relacji pustej jest wygodne w pewnych zastosowaniach, dlatego też w powyższej definicji mówimy o podzbiorze zbioru *n*-tek uporządkowanych. Elementami *n*-członowej relacji niepustej są *n*-tki uporządkowane.

Terminologia: Gdy $n = 2$ i relacja jest niepusta, nazywamy ją *binarną*; gdy $n = 3$ i relacja jest niepusta, czasami mówimy o relacjach *ternarnych*.

Przykład 3.1. {<Jaś, Małgosia>, <Małgosia, Jaś>, <Piotruś, Zosia>} jest relacją binarną.

Przykład 3.2. {<Małgosia, Jaś, Zosia>, <Kasia, Piotruś, Beata>} jest relacją ternarną.

Uwaga: Mówiąc dalej o relacjach *n*-członowych, zawsze milcząco zakładamy, że $n \geq 2$.

Definicja 3.2. (relacja *n*-członowa w zbiorze; $n \geq 2$).
Mówimy, że relacja n-członowa R jest n-członową relacją w zbiorze *A wtw* $R \subseteq A^n$.

Wniosek 3.1. *R jest relacją n-członową w A wtw* $R \subseteq \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ razy}}$

Wniosek 3.2. *Niepusta n-członowa relacja w zbiorze A jest zbiorem n-tek uporządkowanych elementów zbioru A.*

Komentarz: Czasami pojęcie *n-członowej relacji w zbiorze* definiuje się następująco:

R jest n-członową relacją w zbiorze A wtw $R \subseteq A^n$.

Taka definicja dopuszcza przypadek $n = 1$, czyli tzw. relacje *unarne* (jednoczłonowe). Relacja unarna w *A* jest podzbiorem zbioru *A*. Dla tak określonego pojęcia nie zachodzi odpowiednik wniosku 3.1 (jako że pojęcie iloczynu kartezjańskiego nie ma zastosowania gdy $n = 1$).

Relacje n-członowe w iloczynie (produkcie) kartezjańskim zbiorów

> Definicja 3.3. *Mówimy, że n-członowa relacja R jest* n-członową relacją w iloczynie kartezjańskim $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ *zbiorów* $A_1, A_2, ..., A_n$ *wtw* $R \subseteq A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$.

Daną relację możemy uważać zarówno za relację w określonym zbiorze, jak i za relację w iloczynie kartezjańskim różnych zbiorów. Przykładowo, niech $R \subseteq A \times A$ i niech $A \subset B$. Wówczas R jest (też) relacją w iloczynie kartezjańskim $A \times B$.

Jest to jeden z powodów, dla którego potrzebujemy pojęć dziedziny i przeciwdziedziny relacji binarnej, oraz pojęcia i-tej dziedziny relacji n-członowej ($1 \leq i \leq n$; oraz $n > 2$). Innym powodem jest oczywiście to, że relacja w A jest też relacją w każdym B takim, że $A \subset B$, i podobnie dla iloczynów kartezjańskich.

Notacja: Zamiast $<x, y> \in R$ piszemy xRy.

Definicja 3.4. (dziedzina, przeciwdziedzina i pole relacji binarnej)

Niech R będzie relacją binarną. Dziedziną *relacji R nazywamy zbiór*:

$$\boldsymbol{D}_R = \{x : \exists y\ (xRy)\}.$$

Przeciwdziedziną *relacji R nazywamy zbiór*:

$$\boldsymbol{D}^*_R = \{y: \exists x\ (xRy)\}.$$

Polem *relacji R jest zbiór*:

$$\boldsymbol{D}_R \cup \boldsymbol{D}^*_R.$$

Przykład 3.3. R = {<Jaś, Małgosia>, <Małgosia, Jaś>, <Piotruś, Zosia>}. Wówczas:

$$\boldsymbol{D}_R = \{\text{Jaś, Małgosia, Piotruś}\},$$

$$\boldsymbol{D}^*_R = \{\text{Małgosia, Jaś, Zosia}\}.$$

Polem relacji R jest zbiór {Jaś, Małgosia, Piotruś, Zosia}.

i-ta dziedzina relacji n-członowej; $n > 2$

Notacja: Zamiast $<x_1, x_2, ..., x_n> \in R$ piszemy $R(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Definicja 3.5. (*i*-ta dziedzina relacji *n*-członowej; $n > 2$ oraz $1 \leq i \leq n$).

Niech R będzie relacją n-członową, gdzie n > 2. *Pod pojęciem i*-tej dziedziny ($1 \leq i \leq n$) *relacji R rozumiemy zbiór*:

$$\boldsymbol{D}^i_R = \{y : \exists x_1 \ldots \exists x_{i-1} \exists x_{i+1} \ldots \exists x_n \, R(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, x_n)\}.$$

Przykład 3.4. R = {<Małgosia, Jaś, Zosia>, <Kasia, Piotruś, Beata>}.

$\boldsymbol{D}^1_R$ = {Małgosia, Kasia}

$\boldsymbol{D}^2_R$ = {Jaś, Piotruś}

$\boldsymbol{D}^3_R$ = {Zosia, Beata}

Diagramy relacji binarnych

Niech *R* = {<*a*, *a*>, <*a*, *b*>, <*a*, *c*>, <*b*, *c*>, <*c*, *b*> }. O *a*, *b*, *c* zakładamy, że są one różne między sobą.

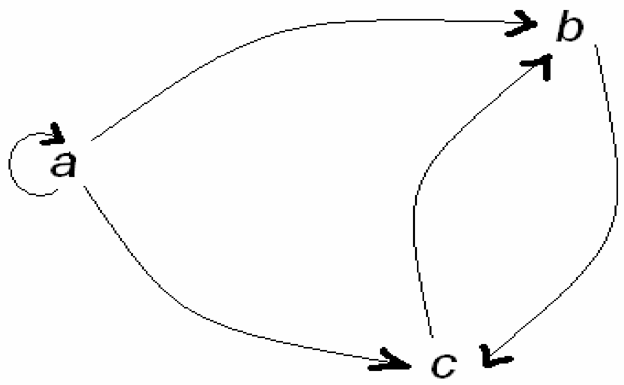


Diagram relacji R

Niech $R = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle\}$.

	a	*b*	*c*
a	1	1	1
b	0	0	1
c	0	1	0

Niech R = {<Jaś, Małgosia>, <Małgosia, Jaś>, <Piotruś, Zosia>}.

	Jaś	Małgosia	Piotruś	Zosia
Jaś	0	1	0	0
Małgosia	1	0	0	0
Piotruś	0	0	0	1
Zosia	0	0	0	0

Mamy 4 niepuste zbiory: **nazwisko** = {Kaczor Donald, Myszka Miki, Pies Pluto}, **nrkonta** $\subseteq$ ***N*****, typkonta** = {oszczędnościowe, rozliczeniowe}**, saldo** $\subseteq$ ***N*** $\cup$ {0}**.** Opisujemy pewną konkretną relację $R \subseteq$ **nazwisko** $\times$ **nrkonta** $\times$ **typkonta** $\times$ **saldo**, którą nazwiemy słowem **Klient**, za pomocą następującej tabeli:

nazwisko	**nrkonta**	**typkonta**	**saldo**
Kaczor Donald	1101	oszczędnościowe	1000
Kaczor Donald	1201	rozliczeniowe	200
Myszka Miki	1202	rozliczeniowe	900
Pies Pluto	1102	oszczędnościowe	0
Pies Pluto	1103	oszczędnościowe	100000

Informatyk powie, że **Klient** jest relacją o atrybutach: nazwisko, nrkonta, typkonta, saldo. Schemat tej relacji napisze on następująco:

Klient (nazwisko, nrkonta, typkonta, saldo).

Wiersze tabeli nazwie on krotkami.

Własności relacji binarnych: zwrotność, przeciwzwrotność i niezwrotność

Definicja 3.6. *Mówimy, że relacja binarna R jest*:

(i) zwrotna *w zbiorze A wtw* $\forall x \in A\ (xRx)$,

(ii) przeciwzwrotna *w zbiorze A wtw* $\forall x \in A\ \neg(xRx)$,

(iii) niezwrotna *w zbiorze A wtw* $\neg\forall x \in A\ (xRx)$.

Przykład 3.5. Relacja *równości = w danym zbiorze liczb* jest w nim zwrotna.

Przykład 3.6. Relacja *ojcostwa w zbiorze wszystkich ludzi* jest w nim przeciwzwrotna.

Przykład 3.7. Relacja *lubienia kogoś w zbiorze wszystkich ludzi* jest w nim niezwrotna - ale nie przeciwzwrotna :).

Własności relacji binarnych: symetryczność, przeciwsymetryczność, antysymetryczność

Definicja 3.7. *Mówimy, że relacja binarna R jest*:

(i) symetryczna *w zbiorze A wtw* $\forall x \in A\ \forall y \in A\ (xRy \rightarrow yRx)$,

(ii) przeciwsymetryczna *w zbiorze A wtw*

$$\forall x \in A\ \forall y \in A\ (xRy \rightarrow \neg(yRx)),$$

(iii) antysymetryczna *w zbiorze A wtw*

$$\forall x \in A\ \forall y \in A\ (xRy \wedge x \neq y \rightarrow \neg(yRx)).$$

Przykład 3.8. Relacja *pokrewieństwa* jest symetryczna w zbiorze ludzi.

Przykład 3.9. Relacja *większości > w zbiorze liczb rzeczywistych* jest w nim przeciwsymetryczna.

Przykład 3.10. Relacja ≥ *bycia większym lub równym w zbiorze liczb rzeczywistych* jest w nim antysymetryczna.

Przykład 3.11. Relacja określona przez warunek „*x* jest zakochany w *y*” nie jest symetryczna w zbiorze ludzi; nie jest ona też w nim ani przeciwsymetryczna, ani antysymetryczna.

Definicja 3.8. *Mówimy, że relacja binarna R jest*:

(i) przechodnia *w zbiorze A wtw*

$$\forall x \in A\ \forall y \in A\ \forall z \in A\ (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz),$$

(ii) spójna *w zbiorze A wtw* $\forall x \in A\ \forall y \in A\ (xRy \vee yRx \vee x = y)$.

Przykład 3.12. Relacja *większości > w zbiorze liczb rzeczywistych* jest w nim przechodnia.

Przykład 3.13. Relacja $\geq$ *bycia większym lub równym w zbiorze liczb rzeczywistych* jest w nim spójna.

Przykład 3.14. Relacja *lubienia kogoś w zbiorze ludzi* nie jest w nim ani przechodnia, ani spójna.

Definicja 3.9. *Mówimy, że relacja binarna R jest* relacją równoważnościową w zbiorze *A wtw R jest w A zwrotna, symetryczna i przechodnia.*

Przykład 3.15. Relacja *identyczności* = jest relacją równoważnościową w dowolnym zbiorze.

Przykład 3.16. Relacja *posiadania tego samego wzrostu* jest relacją równoważnościową w zbiorze wszystkich ludzi.

Definicja 3.10. *Niech A będzie niepustym zbiorem, zaś R będzie relacją binarną w A i zarazem równoważnościową w A.* Klasą abstrakcji *elementu $x \in A$ względem relacji R nazywamy zbiór*:

$$[x]_R = \{y \in A : xRy\}.$$

Komentarz: Do klasy abstrakcji elementu $x \in A$ względem relacji równoważnościowej R w A należą wszystkie te elementy zbioru A, które pozostają w relacji R do x, i tylko one.

Twierdzenie 3.1. *Niech A będzie niepustym zbiorem, natomiast R niech będzie relacją binarną w zbiorze A. Jeżeli R jest relacją równoważnościową w A, to dla dowolnych elementów* $x, y \in A$:

(i) $x \in [x]_R$,

(ii) $[x]_R = [y]_R$ *wtw* xRy,

(iii) *jeśli* $[x]_R \neq [y]_R$, *to* $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$.

Uwaga: Przypominam, że przyjęliśmy tutaj, że R, będąc relacją binarną, jest *niepustym* zbiorem par uporządkowanych.

Twierdzenie 3.2. (zasada abstrakcji) *Niech A będzie niepustym zbiorem i niech R będzie binarną relacją równoważnościową w A. Relacja* R *ustala podział zbioru A na rozłączne i niepuste podzbiory (mianowicie klasy abstrakcji) w taki sposób, że dwa elementy x, y zbioru A należą do tego samego podzbioru wtw xRy.*

Notacja: Przez A / R oznaczamy zbiór wszystkich klas abstrakcji relacji R w zbiorze A.

Definicja 3.11. *Niech R będzie relacją binarną w zbiorze A. Relację R nazywamy* porządkującą zbiór *A wtw R jest zwrotna, przechodnia i antysymetryczna w A. Mówimy wówczas, że R* porządkuje *zbiór A, i parę uporządkowaną <A, R> nazywamy* zbiorem uporządkowanym.

Przykład 3.17. Relacja *niewiększości* $\leq$ *w* (dowolnym) *niepustym zbiorze liczb rzeczywistych* porządkuje ten zbiór.

Relacja *inkluzji* $\subseteq$ *w* (dowolnym) *zbiorze podzbiorów danego zbioru niepustego* porządkuje ten zbiór.

Definicja 3.12. *Relację binarną R w zbiorze A nazywamy* liniowo porządkującą zbiór *A wtw R wtw R porządkuje zbiór A i ponadto R jest spójna w A. Mówimy wówczas, że relacja R* liniowo porządkuje zbiór *A, i parę uporządkowaną <A, R> nazywamy* zbiorem liniowo uporządkowanym *lub* łańcuchem*.*

Przykład 3.18: Relacja *niewiększości* $\leq$ *w* (dowolnym) *niepustym zbiorze liczb rzeczywistych* liniowo porządkuje ten zbiór.

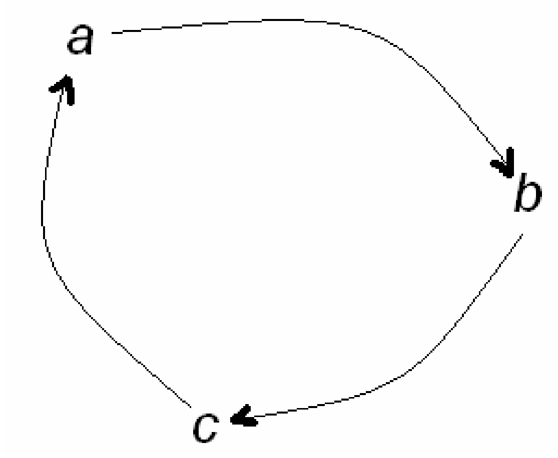
Niech $R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle\}$

$S = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle\}$

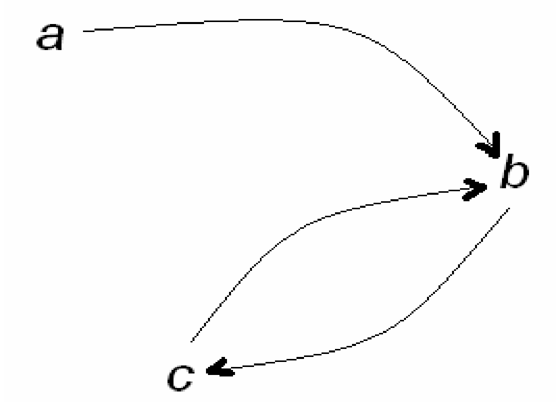
$T = \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle\}$

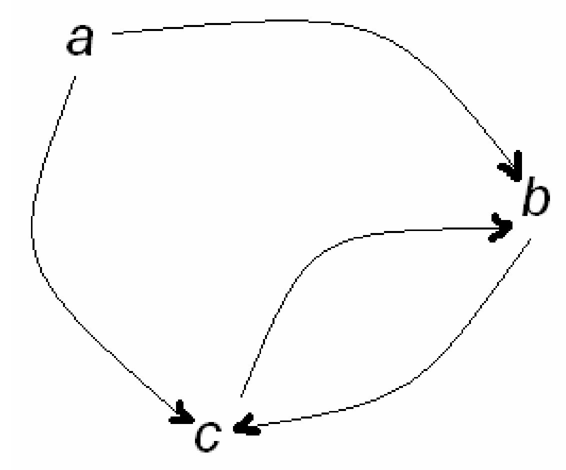
gdzie a, *b*, *c* są różne miedzy sobą. Relacje *R* i *S* są funkcjami, pod-czas gdy relacja *T* nie jest funkcją.

relacja *S*



relacja *R*





relacja *T*

Definicja 3.13. *Relację* $R \subseteq A \times B$ *nazywamy* funkcją jednoargumentową *wtw spełnione są następujące warunki*:

(i) $\forall x \in \boldsymbol{D}_R\ \exists y \in B\ (xRy)$,

(ii) $\forall x \in \boldsymbol{D}_R\ \forall y \in B\ \forall z \in B\ (xRy \wedge xRz \rightarrow y = z)$.

Komentarz: Warunki te sprowadzają się do wymagania, aby każdemu elementowi dziedziny $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{R}}$ relacji R był przyporządkowany dokładnie jeden element zbioru B. Przypomnijmy, że na mocy definicji 3.4 mamy $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{R}} \subseteq A$.

Nie wykluczają one natomiast ani tego, że dany element zbioru B jest przyporządkowany kilku elementom zbioru $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{R}}$, ani też tego, że pewne elementy zbioru B nie są przyporządkowane żadnym elementom zbioru $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{R}}$.

Terminologia i notacja: Funkcje oznaczamy symbolami f, g, ... Zbiór $\boldsymbol{D}_f$ (czyli dziedzina funkcji f traktowanej jako relacja binarna) jest zbiorem *argumentów* funkcji f, natomiast przeciwdziedziną $\boldsymbol{D}^*_f$ jest jej zbiorem *wartości*. Wartość funkcji jednoargumentowej f dla argumentu x – tj. ten jedyny element $y \in B$ taki, że $\langle x, y\rangle \in f$ – oznaczamy przez $f(x)$.

Napis:

$$f : A \mapsto B$$

mówi nam, że f jest funkcją, której zbiorem argumentów jest A (tj. $\boldsymbol{D}_f = A$) i której wartości należą do B (tj. $\boldsymbol{D}^*_f \subseteq B$); gdy f jest taką funkcją, mówimy, że f przekształca (lub odwzorowuje) zbiór A w zbiór B, albo też krótko, że f jest funkcja ze zbioru A w zbiór B. Zbiór wszystkich funkcji ze zbioru A w zbiór B oznaczamy przez B^A.

Definicja 3.14. *Funkcję f: A |→ B nazywamy* wzajemnie jednoznaczną *wtw* $\forall x_1 \in A\ \forall x_2 \in A\ (x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$.

Funkcję wzajemnie jednoznaczną nazywamy też *różnowartościową*, albo *jednojednoznaczną.* Czasami też funkcje takie określane są mianem *iniekcji* albo *monomorfizmów.*

Definicja 3.15. *Funkcję f: A |→ B nazywamy funkcją* przekształcającą zbiór *A* na zbiór *B wtw* $\forall y \in B\ \exists x \in A\ (y = f(x))$.

„Funkcje na" to inaczej *suriekcje* lub *epimorfizmy*.

Definicja 3.16. *Funkcję f: A |→ B nazywamy* bijekcją *wtw f jest wzajemnie jednoznaczna oraz f przekształca zbiór A na zbiór B.*

Definicja 3.17. *Niech A będzie dowolnym niepustym zbiorem. Funkcję $f: A^m \mapsto B$ nazywamy* funkcją *m* zmiennych *przebiegających zbiór A i o wartościach należących do zbioru B.*

Funkcje więcej niż 1 zmiennej nazywamy też *funkcjami wieloargumentowymi*.

Przykład 3.19. Funkcja $f: \boldsymbol{N}^2 \mapsto \boldsymbol{N}$ określona przez równość:

$$f(x, y) = x + y$$

jest dwuargumentowa.

Przykład 3.20. Funkcja $g: \boldsymbol{N}^3 \mapsto \boldsymbol{N}$ dana wzorem:

$$g(x, y, z) = x \bullet y + z$$

jest trójargumentowa.

Uwaga: Czasami potrzebne są nam funkcje, które przyporządkowują każdemu elementowi iloczynu kartezjańskiego różnych niepustych zbiorów $A_1, A_2, ..., A_n$ pewien element jakiegoś zbioru B. Funkcje tego typu można określić jako funkcje jednoargumentowe ze zbioru $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ w zbiór B.

Skończony ciąg n-wyrazowy elementów zbioru A możemy utożsamić z n-tką uporządkowaną elementów zbioru A.

Ciąg taki możemy też zdefiniować jako funkcję ze zbioru $\{1, ..., n\}$ w zbiór A.

W przypadku nieskończonych ciągów elementów niepustego zbioru A wygodnie jest utożsamić je z funkcjami ze zbioru (wszystkich) liczb naturalnych $\boldsymbol{N}$ w zbiór A, tj. z funkcjami typu $A^{\boldsymbol{N}}$. Funkcja taka przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej i dokładnie jeden element zbioru A; element ten nazywamy *i-tym wyrazem* ciągu. Ciąg nieskończony ma przeliczalnie nieskończenie wiele wyrazów, niekoniecznie różnych między sobą.

Jakkolwiek zrobimy, ciąg skończony, którego kolejnymi wyrazami są $a_1, a_2, ... , a_n$ zapisujemy jako $<a_1, a_2, ..., a_n>$.

Pisząc $\mathbf{s} = <s_1, s_2, ...>$, mamy na myśli to, że **s** jest ciągiem (być może nieskończonym), którego kolejnymi wyrazami są s_1, s_2, ...; i-ty wyraz ciągu **s** oznaczamy przez s_i.

Podobnie pisząc $\mathbf{s} = <s_1, s_2, ..., s_n>$, chcemy powiedzieć, że **s** jest skończonym ciągiem, którego kolejnymi wyrazami są s_1, s_2, ..., s_n.

Dodatek: Zbiory skończone i nieskończone

Przypomnienie: Jeżeli przekształcenie f zbioru A w zbiór B jest funkcją, to każdemu elementowi x zbioru A odpowiada dokładnie jeden element $f(x)$ zbioru B.

Przypomnienie: Funkcja f jest wzajemnie jednoznaczna, jeżeli dla różnych argumentów przyjmuje ona zawsze różne wartości.

Definicja 4.1. (równoliczność zbiorów). *Dwa zbiory A i B są równoliczne wtw istnieje funkcja wzajemnie jednoznaczna f, która odwzorowuje zbiór A na zbiór B. O funkcji takiej mówimy, że ustala ona równoliczność zbiorów A i B. O zbiorach równolicznych mówimy natomiast, że są one równej mocy.*

Przykład 4.1. Niech $A = \{1, 3, 5\}$ oraz $B = \{2, 4, 6\}$. Funkcja f: $A \mapsto B$ określona następująco:

$$f(x) = x + 1$$

ustala równoliczność zbiorów A i B.

Przykład 4.2. Niech $\boldsymbol{N}$ będzie zbiorem liczb naturalnych, a $\boldsymbol{N}_2$ zbiorem liczb naturalnych parzystych. Funkcja f: $\boldsymbol{N} \mapsto \boldsymbol{N}_2$ określona następująco:

$$f(x) = 2x$$

ustala równoliczność zbiorów $\boldsymbol{N}$ i $\boldsymbol{N}_2$.

Wniosek 4.1. *Zbiór liczb naturalnych jest równoliczny z pewnym swoim podzbiorem właściwym.*

Definicja 4.2 (zbiór nieskończony w sensie Dedekinda).

Zbiór A jest nieskończony wtw zbiór A jest równoliczny z jakimś swoim podzbiorem właściwym; w przeciwnym przypadku zbiór A jest skończony.

Wniosek 4.2. *Zbiór pusty jest skończony.*

Definicja 4.3. (zbiór przeliczalny) *Zbiór A jest przeliczalny wtw zbiór A jest skończony lub zbiór A jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych.*

Lemat 4.1. *Przedział* (0, 1) *nie jest przeliczalny*.

Wniosek 4.3. *Istnieją zbiory nieskończone różnych mocy.*

Lemat 4.2. *Przedział* (0, 1) *jest równoliczny ze zbiorem liczb rzeczywistych.*

Twierdzenie 4.1. *Zbiór liczb rzeczywistych jest nieskończony, ale nie jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych.*

Twierdzenie 4.2. *Dla dowolnego zbioru A, moc zbioru* 2^A (*tj. zbioru potęgowego zbioru A*) *jest większa od mocy zbioru A*.

Uwagi końcowe. Wyjściowym pojęciem, z którego korzystaliśmy w tym wykładzie, było pojęcie zbioru: *n*-tki uporządkowane, iloczyny i potęgi kartezjańskie, a następnie relacje i funkcje były definiowane krok po kroku jako szczególnego rodzaju zbiory. Mówiąc ogólnie, przedstawiliśmy tu standardowe podejście teoriomnogościowe. Czasami jednak matematycy postępują inaczej: na początek definiują pojęcie funkcji jako pewnego rodzaju odwzorowania zbioru w zbiór, następnie określają ciągi jako funkcje (w sposób, który naszkicowaliśmy wyżej), a dalej, korzystając z pojęcia ciągu, wprowadzają pojęcie iloczynu kartezjańskiego i definiują relacje jako podzbiory iloczynów kartezjańskich. Oba podejścia są równoprawne.

Na koniec dwa drobne ostrzeżenia. Po pierwsze, terminologia dotycząca relacji nie jest ustalona w tym sensie, że w różnych podręcznikach można znaleźć różne nazwy (np. zamiast „przeciwsymetryczna” mówi się „asymetryczna” etc.). Po drugie, definiując zwrotność, symetryczność etc. relacji binarnych, określaliśmy w istocie zwrotność, symetryczność etc. w – dowolnym ale ustalonym – zbiorze *A*, a nie zwrotność, symetryczność etc. relacji określonej w danym zbiorze *A* względem tego zbioru. Uważna lektura odpowiednich partii podanych niżej pozycji może uczynić to rozróżnienie bardziej zrozumiałym.

Literatura:

Poruszane na tym wykładzie zagadnienia są omówione w prawie każdym podręczniku logiki lub teorii mnogości. Z nowszych (a więc łatwiej dostępnych) pozycji można wymienić:

[1] Roman Murawski, Kazimierz Świrydowicz: *Wstęp do teorii mnogości*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2005.

[2] Helena Rasiowa, *Wstęp do matematyki współczesnej*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1984 (książka ta miała też wiele innych wydań).

[3] Barbara Stanosz, *Wprowadzenie do logiki formalnej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1999 (jest to jedno z licznych wydań tej pozycji).

[4] Jeffrey D. Ullman, Jennifer Widom: *Podstawowy wykład z systemów baz danych*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2001.

[5] Ryszard Wójcicki, *Wykłady z logiki z elementami teorii wiedzy*, Wydawnictwo Naukowe Scholar, Warszawa 2003.

Dowody lematu 4.1, lematu 4.2 oraz twierdzenia 4.1 można znaleźć m.in. w książce [1]. Bardzo sympatyczne (i pełniejsze) ujęcie bardziej zaawansowanych zagadnień poruszanych na tym wykładzie znajduje się w części pierwszej podręcznika:

[6] Geoffrey Hunter, *Metalogika*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1982.