Andrzej Wiśniewski

Logika II

Materiały do wykładu dla studentów kognitywistyki

Wykłady 10b i 11. Semantyka relacyjna dla normalnych modalnych rachunków zdań

Przedstawimy teraz pewien wariant semantyki typu Kripkego (zwanej też *semantyką światów możliwych*, lub *semantyką relacyjną*) dla normalnych modalnych rachunków zdań (zob. poprzedni wykład).

Podstawowym pojęciem będzie struktura modelowa (ang. *frame*).

Definicja 10.1. Strukturą modelową n*azywamy dowolną parę uporządkowaną* <***W***, ***R***>, *gdzie* ***W*** *jest niepustym zbiorem*, *natomiast* ***R*** *jest binarną relacją w* ***W****.*

Terminologia. Gdy <***W***, ***R***> jest strukturą modelową, to zbiór ***W*** nazywamy zbiorem *światów możliwych* (*ang. possible worlds*), natomiast relację ***R*** nazywamy relacją *alternatywności* lub relacją *dostępności* (*ang. alternativeness*, *accessibility*).

Komentarz: Zapraszam na wykład :)

Terminologia. Napis ***wRw**** czytamy „*świat* ***w**** *jest alternatywny względem świata* ***w***” lub „*świat* ***w**** *jest dostępny ze świata* ***w***”.

Wartościowanie na strukturze modelowej

Kolejne pojęcie to wartościowanie określone na strukturze modelowej.

Definicja 10.2. *Niech <**W**, **R**> będzie strukturą modelową.* Wartościowaniem określonym na strukturze modelowej *<**W**, **R**> nazywamy dowolną funkcję **V**, której argumentami są formuły języka MRZ i elementy zbioru **W**, natomiast wartościami – prawda* **1** *i fałsz* **0**, *spełniającą następujące warunki:*

(1) *dla dowolnej zmiennej zdaniowej* p_i , *dla każdego* $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$: $\boldsymbol{V}(p_i, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$ *lub* $\boldsymbol{V}(p_i, \boldsymbol{w}) = \mathbf{0}$;

(2) *dla dowolnej formuły A języka MRZ, dla każdego* $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$: $\boldsymbol{V}(\neg A, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$ *wtw* $\boldsymbol{V}(A, \boldsymbol{w}) = \mathbf{0}$;

(3) *dla dowolnych formuł A, B języka MRZ, dla każdego* $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$:

- $\boldsymbol{V}(A \wedge B, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$ *wtw* $\boldsymbol{V}(A, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$ *oraz* $\boldsymbol{V}(B, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$;
- $\boldsymbol{V}(A \vee B, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$ *wtw* $\boldsymbol{V}(A, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$ *lub* $\boldsymbol{V}(B, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$;
- $\boldsymbol{V}(A \rightarrow B, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$ *wtw* $\boldsymbol{V}(A, \boldsymbol{w}) = \mathbf{0}$ *lub* $\boldsymbol{V}(B, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$;
- $\boldsymbol{V}(A \leftrightarrow B, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$ *wtw* $\boldsymbol{V}(A, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{V}(B, \boldsymbol{w})$;

(4) *dla dowolnej formuły A języka MRZ, dla każdego* $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$:

- $\boldsymbol{V}(\Diamond A, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$ *wtw istnieje* $\boldsymbol{w^*} \in \boldsymbol{W}$ *takie, że* $\boldsymbol{wRw^*}$ *oraz* $\boldsymbol{V}(A, \boldsymbol{w^*}) = \mathbf{1}$;
- $\boldsymbol{V}(\Box A, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$ *wtw dla każdego* $\boldsymbol{w^*} \in \boldsymbol{W}$ *takiego, że* $\boldsymbol{wRw^*}$: $\boldsymbol{V}(A, \boldsymbol{w^*}) = \mathbf{1}$.

Możemy teraz określić pojęcie *modelu Kripkego*, zwanego też *modelem relacyjnym*.

Definicja 10.3. Modelem Kripkego *nazywamy trójkę uporządkowaną* <***W***, ***R***, ***V***>, *gdzie* <***W***, ***R***> *tworzy strukturę modelową, natomiast* ***V*** *jest wartościowaniem określonym na strukturze modelowej* <***W***, ***R***>.

Uwaga: Interesują nas tutaj wyłącznie normalne modalne rachunki zdań i modele Kripkego dla tych rachunków. Semantyki „typu Kripkego" istnieją także dla innych modalnych rachunków zdań, z tym, że w tych semantykach nieco inaczej należy określić pojęcie modelu i/lub pewne dalsze pojęcia semantyczne. Modele takie są jednak również nazywane „modelami Kripkego". Należy zatem pamiętać, że pojęcia modelu Kripkego używamy tutaj w jednym z jego możliwych znaczeń, związanym z rozpatrywaną klasą logik.

Terminologia. Gdy <***W***, ***R***> jest strukturą modelową, a ***V*** jest wartościowaniem określonym na tej strukturze modelowej, to powiemy, że model Kripkego <***W***, ***R***, ***V***> jest modelem Kripkego *opartym na* strukturze modelowej <***W***, ***R***>.

Prawdziwość formuły w świecie danego modelu i w modelu

Terminologia. Dalej zamiast „model Kripkego” będziemy mówili po prostu „model” (zawsze jednak rozumiejąc to pojęcie w sensie definicji 10.3). Podobnie mówiąc o formułach, będziemy mieli zawsze na myśli formuły języka *MRZ*. Pod pojęciem *światów modelu* $\boldsymbol{M} = \langle \boldsymbol{W}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{V} \rangle$ rozumiemy elementy zbioru $\boldsymbol{W}$. Tak więc $\boldsymbol{w}$ jest światem modelu $\boldsymbol{M} = \langle \boldsymbol{W}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{V} \rangle$ wtw $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$. Analogicznie rozumiemy pojęcie świata struktury modelowej $\langle \boldsymbol{W}, \boldsymbol{R} \rangle$.

Definicja 10.4. *Mówimy, że formuła A jest* prawdziwa w świecie $\boldsymbol{w}$ modelu $\langle \boldsymbol{W}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{V} \rangle$ *wtw* $\boldsymbol{V}(A, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$.

Definicja 10.5. *Mówimy, że formuła A* jest prawdziwa w modelu $\langle \boldsymbol{W}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{V} \rangle$ *wtw formuła A jest prawdziwa w każdym świecie modelu* $\langle \boldsymbol{W}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{V} \rangle$.

To, że formuła *A* jest prawdziwa w modelu $\boldsymbol{M} = \langle \boldsymbol{W}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{V} \rangle$, zapisujemy:

$$\boldsymbol{M} \models A.$$

Prawdziwość (validity) formuły w strukturze modelowej

Na danej strukturze modelowej możemy określić wiele wartościowań, i w konsekwencji zbudować wiele modeli opartych na tej strukturze.

Definicja 10.6. *Mówimy, że formuła A jest* prawdziwa w strukturze modelowej <***W***, ***R***> *wtw formuła A jest prawdziwa w każdym modelu opartym na strukturze modelowej* <***W***, ***R***>.

Komentarz: Prawdziwość formuły *A* w strukturze modelowej sprowadza się, intuicyjnie rzecz biorąc, do: „niezależnie od tego, jakie wartościowanie ***V*** określimy na [rozważanej] strukturze modelowej oraz jaki świat ***w*** tej struktury weźmiemy pod uwagę, i tak mamy ***V***(*A*, ***w***) = **1**."

Uwaga językowa: Użycie pojęcia „prawdziwy" w definicji 10.6 może razić. Język angielski radzi sobie tutaj lepiej, jako że mamy w nim, obok *true*, również *valid*. Definicja 10.6 określa w istocie pojęcie *is valid in a frame* <***W***, ***R***>.

Z podobnym kłopotem językowym spotkamy się również za chwilę.

Prawdziwość (validity)formuły w klasie struktur modelowych

Uogólniając dalej, dostajemy następujące pojęcie:

Definicja 10.7. *Mówimy, że formuła A jest* prawdziwa w (*niepustej*) klasie struktur modelowych Φ *wtw formuła A jest prawdziwa w każdej strukturze modelowej należącej do klasy* Φ.

Komentarz: Tym razem intuicja jest następująca: „niezależnie od tego, którą strukturę modelową należącą do Φ weźmiemy pod uwagę, jakie wartościowanie ***V*** określimy na [rozważanej] strukturze modelowej oraz jaki świat ***w*** tej struktury weźmiemy pod uwagę, i tak mamy ***V***(*A*, ***w***) = **1**”.

Można postawić pytanie:

Czy istnieją formuły (języka MRZ), które są prawdziwe w klasie ***wszystkich*** *struktur modelowych?*

Odpowiedź na to pytanie jest **twierdząca**.

Jak zobaczymy, są nimi wszystkie tezy rachunku/ logiki ***K*** – i tylko one.

Zacznijmy od reguł inferencyjnych. Zagadnienie transmisji prawdziwości relatywizujemy do ustalonej klasy struktur modelowych (i w konsekwencji opartych na nich modeli).

Twierdzenie 10.1. *Niech Φ będzie niepustą klasą struktur modelowych. Jeżeli formuła postaci $A \rightarrow B$ jest prawdziwa w Φ oraz formuła A jest prawdziwa w Φ, to formuła B jest prawdziwa w Φ.*

Dowód: Zapraszam na wykład :)

Twierdzenie 10.2. *Niech Φ będzie niepustą klasą struktur modelowych. Jeżeli formuła B powstaje z formuły A poprzez zastosowania reguły podstawiania* RP, *lub reguły zastępowania* RZ, *lub reguły Gödla* RG, *oraz formuła A jest prawdziwa w Φ, to formuła B jest prawdziwa w Φ.*

Dowód: Rozważymy tylko przypadek RG – pozostałe przypadki są oczywiste.

Dowód twierdzenia 10.2

Załóżmy, że A jest prawdziwa w Φ oraz że $\Box A$ nie jest prawdziwa w Φ.

Z tego drugiego założenia wnosimy, że istnieją: struktura modelowa <***W***, ***R***> należąca do Φ, model <***W***, ***R***, ***V***> oparty na <***W***, ***R***> oraz świat ***w*** tego modelu takie, że ***V***($\Box A$, ***w***) = **0**. Korzystając z definicji 10.2, dostajemy, że dla pewnego świata ***w**** $\in$ ***W*** takiego, że ***wRw**** (a więc alternatywnego względem ***w***) zachodzi ***V***(A, ***w****) = **0**. To już jednak znaczy, że formuła A nie jest prawdziwa w rozważanym modelu <***W***, ***R***, ***V***>, skąd wnosimy – na mocy definicji 10.6 – że nie jest ona prawdziwa w strukturze modelowej <***W***, ***R***>. Zatem, na mocy definicji 10.7, formuła A nie jest prawdziwa w analizowanej klasie struktur modelowych Φ. Otrzymaliśmy sprzeczność. ■

Następstwem twierdzeń 10.1 i 10.2 jest:

Wniosek 10.1. *Formuła powstająca za pomocą reguł:* **RO, RP, RG, RZ** *z formuły lub formuł, która/które są prawdziwe w danej klasie struktur modelowych, jest też prawdziwa w tej klasie struktur modelowych.*

Status semantyczny **PC**-*aksjomatów i aksjomatu* **K**

Bez dowodu podamy:

Twierdzenie 10.3. *Każdy* **PC**-*aksjomat jest prawdziwy w klasie wszystkich struktur modelowych.*

Natomiast udowodnimy:

Twierdzenie 10.4. *Aksjomat* **K**, *tj. formuła*

$$\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$$

jest prawdziwy w dowolnej niepustej klasie struktur modelowych.

Dowód: Zapraszam na wykład :)

Zauważmy, że z twierdzenia 10.4 otrzymujemy:

Wniosek 10.2. *Aksjomat* **K** *jest prawdziwy w klasie wszystkich struktur modelowych.*

Widzimy zatem, że wszystkie aksjomaty modalnego rachunku zdań ***K*** są prawdziwe w klasie wszystkich struktur modelowych. Wnosimy stąd, że ***każdy aksjomat rachunku K jest prawdziwy w każdym świecie dowolnego modelu Kripkego*** (dla normalnych modalnych rachunków zdań).

Ostatecznie otrzymujemy:

Twierdzenie 10.5. *Każda teza modalnego rachunku zdań **K** jest prawdziwa w klasie wszystkich struktur modelowych.*

Dowód: Jest to oczywisty wniosek z twierdzeń 10.1, 10.2, 10.3 i 10.4.■

Bez dowodu (albowiem dowód jest znacznie trudniejszy) podamy natomiast:

Twierdzenie 10.6 (o pełności rachunku ***K***). *Każda formuła (języka MRZ), która jest prawdziwa w klasie wszystkich struktur modelowych, jest tezą modalnego rachunku zdań **K**.*

Wniosek 10.3. *Tezami rachunku **K** są te – i wszystkie te ! – formuły języka MRZ, które są prawdziwe w **każdym świecie dowolnego modelu** Kripkego.*

W przypadku kolejnych modalnych rachunków zdań musimy nałożyć pewne ograniczenia na klasę odpowiednich struktur modelowych/ modeli Kripkego.

Wprowadźmy teraz:

Definicja 10.8. *Strukturę modelową* <***W***, ***R***>, *w której relacja alternatywności **R** jest seryjna w **W**, tj. spełnia warunek:*

(**srj**) *dla każdego* ***w*** $\in$ ***W*** *istnieje* ***w**** $\in$ ***W*** *takie, że* ***wRw****

nazywamy seryjną.

Modelem seryjnym *nazywamy dowolny model oparty na seryjnej strukturze modelowej.*

Udowodnimy:

Twierdzenie 10.7. *Formuła* **D**, *tj. formuła:*

$$\Box p \rightarrow \Diamond p$$

jest prawdziwa w klasie wszystkich seryjnych struktur modelowych.

Dowód (twierdzenia 10.7): Załóżmy, że dla pewnej seryjnej struktury modelowej <***W***, ***R***> i dla pewnego modelu <***W***, ***R***, ***V***> opartego na tej strukturze mamy ***V***(□*A*, ***w***) = **1** dla pewnego (dowolnego) ***w*** ∈ ***W***. Wnosimy stąd, że formuła *A* jest prawdziwa w każdym świecie (rozważanego modelu), który jest alternatywny do świata ***w***. Skoro ***R*** jest seryjna w ***W***, to (jakiś) świat ***w**** alternatywny do świata ***w*** z pewnością istnieje. Zatem ***V***(◊*A*, ***w***) = **1**. Tak więc dla formuły **D**, tj. formuły:

$$\Box p \rightarrow \Diamond p$$

zachodzi ***V***(□*p* → ◊*p*, ***w***) = **1**. Wobec dowolności ***w*** wnosimy, że formuła **D** jest prawdziwa w modelu <***W***, ***R***, ***V***>, skąd – z uwagi na dowolność ***V*** – wnosimy, że **D** jest prawdziwa w każdym modelu seryjnym, a zatem także w każdej seryjnej strukturze modelowej. ■

Przypomnę teraz, że ***D*** = **KD.**

Można udowodnić:

Twierdzenie 10.8. *Każda teza modalnego rachunku zdań **D** jest prawdziwa w klasie wszystkich seryjnych struktur modelowych.*

Dowód: Zapraszam na wykład :)

Można również udowodnić:

Twierdzenie 10.9. (o pełności rachunku ***D***). *Każda formuła (języka MRZ), która jest prawdziwa w klasie wszystkich seryjnych struktur modelowych, jest tezą modalnego rachunku zdań **D**.*

Ostateczny wniosek jest następujący:

Wniosek 10.4. *Tezami rachunku **D** są te – i wszystkie te ! – formuły języka MRZ, które są prawdziwe w każdym świecie dowolnego takiego modelu Kripkego, w którym to modelu relacja alternatywności jest **seryjna**.*

Jak zobaczymy aksjomat **T** rachunku ***T*** „wymusza” zwrotność relacji alternatywności.

> Definicja 10.9. *Strukturę modelową <**W**, **R**>, w której relacja alternatywności **R** jest zwrotna w **W**, nazywamy* zwrotną.
>
> Modelem zwrotnym *nazywamy dowolny model oparty na zwrotnej strukturze modelowej.*

Udowodnimy:

Twierdzenie 10.10. *Formuła* **T**, *tj. formuła:*

$$\Box p \to p$$

jest prawdziwa w klasie wszystkich zwrotnych struktur modelowych.

Dowód (twierdzenia 10.10): Załóżmy, że dla pewnej zwrotnej struktury modelowej <***W***, ***R***> i dla pewnego modelu <***W***, ***R***, ***V***> opartego na tej strukturze zachodzi $\boldsymbol{V}(\Box A, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$ dla pewnego (dowolnego) $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$. Zatem $\boldsymbol{V}(A, \boldsymbol{w}^*) = \mathbf{1}$ dla dowolnego $\boldsymbol{w}^* \in \boldsymbol{W}$ takiego, że $\boldsymbol{wRw}^*$. Skoro ***R*** jest zwrotna w ***W***, to ***wRw***. Tak więc $\boldsymbol{V}(A, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$. Wnosimy stąd, że $\boldsymbol{V}(\Box p \rightarrow p, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$. Wobec dowolności ***w***, modelu <***W***, ***R***, ***V***> i struktury modelowej <***W***, ***R***> - o których założyliśmy tylko, że są to modele/ struktury modelowe zwrotne – dostajemy, że formuła **T** jest prawdziwa w każdej zwrotnej strukturze modelowej. ■

Dygresja. Nie jest tak, że formuła **T** jest prawdziwa w klasie wszystkich w ogóle struktur modelowych. Weźmy model <***W***, ***R***, ***V***> taki, że $\boldsymbol{W} = \{\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}^*\}$, $\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{w}^*$, $\boldsymbol{R} = \{<\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}^*>, <\boldsymbol{w}^*, \boldsymbol{w}>\}$ oraz $\boldsymbol{V}(p, \boldsymbol{w}) = \mathbf{0}$ i $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{w}^*) = \mathbf{1}$. W tym modelu mamy $\boldsymbol{V}(\Box p, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$, czyli też $\boldsymbol{V}(\Box p \rightarrow p, \boldsymbol{w}) = \mathbf{0}$. Zauważmy jednak, że ***R*** nie jest zwrotna w $\{\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}^*\}$.

Jak pamiętamy (? :)), ***T*** = **KT**. Podobnie jak poprzednio, dostajemy:

Twierdzenie 10.11. *Każda teza modalnego rachunku zdań **T** jest prawdziwa w klasie wszystkich zwrotnych struktur modelowych.*

Dowód: Zapraszam na wykład :)

Można udowodnić (chociaż tego dzisiaj nie zrobimy :))

Twierdzenie 10.12 (o pełności rachunku ***T***). *Każda formuła (języka MRZ), która jest prawdziwa w klasie wszystkich zwrotnych struktur modelowych, jest tezą modalnego rachunku zdań **T**.*

Zatem:

Wniosek 10.5. *Tezami rachunku **T** są te – i wszystkie te ! – formuły języka MRZ, które są prawdziwe w każdym świecie dowolnego takiego modelu Kripkego, w którym to modelu relacja alternatywności jest **zwrotna**.*

Przypomnijmy formułę **B**:

$$p \to \Box\Diamond p$$

Mówiąc ogólnie, dla prawdziwości formuły **B** potrzebna jest symetryczność relacji alternatywności.

Definicja 10.10. *Strukturę modelową* <***W***, ***R***>, *w której relacja alternatywności* ***R*** *jest symetryczna w* ***W***, *nazywamy* symetryczną.

Modelem symetrycznym *nazywamy dowolny model oparty na symetrycznej strukturze modelowej.*

Twierdzenie 10.13. *Formuła* **B** *jest prawdziwa w klasie wszystkich symetrycznych struktur modelowych*.

Dowód (twierdzenia 10.13): Przypuśćmy, że istnieje model symetryczny $\langle \boldsymbol{W}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{V} \rangle$ taki, że dla pewnego $\boldsymbol{w} \in \mathbf{W}$ mamy $\boldsymbol{V}(p \to \Box\Diamond p, \boldsymbol{w}) = \mathbf{0}$. Wówczas $\boldsymbol{V}(p, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$ oraz $\boldsymbol{V}(\Box\Diamond p, \boldsymbol{w}) = \mathbf{0}$. Zatem dla pewnego $\boldsymbol{w^*} \in \boldsymbol{W}$ takiego, że $\boldsymbol{wRw^*}$ mamy $\boldsymbol{V}(\Diamond p, \boldsymbol{w^*}) = \mathbf{0}$, skąd wnosimy, że dla każdego $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{W}$ takiego, że $\boldsymbol{w^*Rx}$ zachodzi $\boldsymbol{V}(p, \boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$. Ponieważ jest tak, że $\boldsymbol{wRw^*}$, a $\boldsymbol{R}$ jest relacją symetryczną w zbiorze $\boldsymbol{W}$ (albowiem rozważamy model symetryczny), to mamy też $\boldsymbol{w^*Rw}$. Zatem $\boldsymbol{V}(p, \boldsymbol{w}) = \mathbf{0}$. Otrzymaliśmy sprzeczność. ■

Dygresja: I znów, nie jest tak, że formuła **B** jest prawdziwa w każdej strukturze modelowej. Skonstruowanie odpowiedniego „kontrmodelu” pozostawiam Państwu :)

Przypominam, że ***B*** = **KTB**. Zachodzi:

Twierdzenie 10.14. *Każda teza modalnego rachunku zdań **B** jest prawdziwa w klasie tych wszystkich struktur modelowych, które są zarazem zwrotne i symetryczne.*

Dowód można łatwo przeprowadzić korzystając z tego, co zostało powiedziane wyżej :) ■

Zachodzi również:

Twierdzenie 10.15 (o pełności rachunku ***B***). *Każda formuła (języka MRZ), która jest prawdziwa w klasie wszystkich zarazem zwrotnych i symetrycznych struktur modelowych, jest tezą modalnego rachunku zdań **B**.*

Podsumowując:

Wniosek 10.6. *Tezami rachunku **B** są te – i wszystkie te ! – formuły języka MRZ, które są prawdziwe w każdym świecie dowolnego takiego modelu Kripkego, w którym to modelu relacja alternatywności jest **zwrotna i symetryczna**.*

Formuła **4** to:

$$\Box p \to \Box\Box p$$

Pokażemy, że dla prawdziwości formuły **4** potrzeba i wystarcza, aby relacja alternatywności była przechodnia.

Definicja 10.11. *Strukturę modelową* <***W***, ***R***>, *w której relacja alternatywności* ***R*** *jest przechodnia w* ***W***, *nazywamy* przechodnią.

Modelem przechodnim *nazywamy dowolny model oparty na przechodniej strukturze modelowej.*

Udowodnimy teraz:

Twierdzenie 10.16. *Formuła* **4** *jest prawdziwa w klasie wszystkich przechodnich struktur modelowych*.

Dowód (twierdzenia 10.16): Przypuśćmy, że istnieje model przechodni <***W***, ***R***, ***V***>, w którym dla pewnego $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$ mamy $\boldsymbol{V}(\Box p \to \Box\Box p, \boldsymbol{w}) = \mathbf{0}$. Zatem $\boldsymbol{V}(\Box p, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$ oraz $\boldsymbol{V}(\Box\Box p, \boldsymbol{w}) = \mathbf{0}$. Wnosimy stąd, że dla pewnego świata ***w**** alternatywnego wobec świata ***w*** zachodzi $\boldsymbol{V}(\Box p, \boldsymbol{w^*}) = \mathbf{0}$, czyli dla pewnego świata ***w***** alternatywnego wobec świata ***w**** mamy $\boldsymbol{V}(p, \boldsymbol{w^{**}}) = \mathbf{0}$. Ponieważ ***R*** jest przechodnia w zbiorze ***W***, na podstawie ***wRw**** i ***w*Rw***** dostajemy ***wRw*****. Tak więc $\boldsymbol{V}(\Box p, \boldsymbol{w}) = \mathbf{0}$. Sprzeczność.

■

Dygresja: Oto przykład modelu (nieprzechodniego!), w którym formuła **4** nie jest prawdziwa. O modelu <***W***, ***R***, ***V***> zakładamy co następuje:

- $\boldsymbol{W} = \{\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w^*}, \boldsymbol{w^{**}}\}$, gdzie ***w***, ***w****, ***w***** są różne między sobą.
- $\boldsymbol{R} = \{\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}\rangle, \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w^*}\rangle, \langle \boldsymbol{w^*}, \boldsymbol{w^{**}}\rangle\}$.
- ***V*** spełnia (m.in.) następujące warunki: $\boldsymbol{V}(p, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$; $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{w^*}) = \mathbf{1}$; $\boldsymbol{V}(p, \boldsymbol{w^{**}}) = \mathbf{0}$.

Mamy:

$\boldsymbol{V}(\Box p, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$ – ponieważ $\boldsymbol{V}(p, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$ oraz $\boldsymbol{V}(p, \boldsymbol{w^*}) = \mathbf{1}$, a ***w*** i ***w**** to jedyne światy alternatywne względem ***w***.

$\boldsymbol{V}(\Box p, \boldsymbol{w^*}) = \mathbf{0}$ – ponieważ $\boldsymbol{V}(p, \boldsymbol{w^{**}}) = \mathbf{0}$ oraz ***w*Rw*****.

$\boldsymbol{V}(\Box\Box p, \boldsymbol{w}) = \mathbf{0}$ – ponieważ $\boldsymbol{V}(\Box p, \boldsymbol{w^*}) = \mathbf{0}$ oraz ***wRw****.

Tak więc $\boldsymbol{V}(\Box p \to \Box\Box p, \boldsymbol{w}) = \mathbf{0}$.

Korzystając z dotychczasowych ustaleń, można udowodnić:

Twierdzenie 10.17. *Każda teza modalnego rachunku zdań **S4** jest prawdziwa w klasie tych wszystkich struktur modelowych, które są zarazem zwrotne i przechodnie.*

Zachodzi również (co podajemy bez dowodu):

Twierdzenie 10.18 (o pełności rachunku ***S4***). *Każda formuła (języka MRZ), która jest prawdziwa w klasie wszystkich zarazem zwrotnych i przechodnich struktur modelowych, jest tezą modalnego rachunku zdań **S4**.*

Tak więc:

Wniosek 10.7. *Tezami rachunku **S4** są te – i wszystkie te ! – formuły języka MRZ, które są prawdziwe w każdym świecie dowolnego takiego modelu Kripkego, w którym to modelu relacja alternatywności jest **zwrotna i przechodnia.***

*Semantyka dla modalnego rachunku zdań **S5***

Jak pamiętamy z poprzedniego wykładu, ***S5*** = **KTE** = **KTB4**.

Ponieważ dla prawdziwości aksjomatów **T**, **B** i **4** potrzebne są, kolejno, zwrotność, symetryczność i przechodniość relacji alternatywności, przeprowadzone dotychczas rozważania pozwalają nam udowodnić:

Twierdzenie 10.19. *Każda teza modalnego rachunku zdań **S5** jest prawdziwa w klasie tych wszystkich struktur modelowych, w których relacja alternatywności jest relacją równoważnościową.*

Bez dowodu podamy:

Twierdzenie 10.20 (o pełności rachunku ***S5***). *Każda formuła (języka MRZ), która jest prawdziwa w klasie wszystkich takich struktur modelowych, w których relacja alternatywności jest relacją równoważnościową, jest tezą modalnego rachunku zdań **S5**.*

Wniosek 10.8. *Tezami rachunku **S5** są te – i wszystkie te ! – formuły języka MRZ, które są prawdziwe w każdym świecie dowolnego takiego modelu Kripkego, w którym to modelu relacja alternatywności jest **równoważnościowa**.*

Z uwagi na pewne szczególne własności rachunku ***S5*** (o których na wykładzie – zapraszam :)) semantykę światów możliwych dla ***S5*** można znacząco uprościć. Otóż zachodzi:

Twierdzenie 10.21. *Formuła A (języka MRZ) jest tezą rachunku zdań* ***S5*** *wtw formuła A jest prawdziwa w dowolnym modelu Kripkego, w którym relacja alternatywności jest uniwersalna.*

Mówiąc, że relacja alternatywności ***R*** modelu <***W***, ***R***, ***V***> jest uniwersalna, mamy na myśli to, że dla dowolnych ***w***, ***w**** $\in$ ***W*** (niekoniecznie różnych) zachodzi ***wRw****.

Jeśli tak, to można uprościć pojęcie modelu dla ***S5***, przyjmując, że modelem jest para uporządkowana <***W***, ***V***>, gdzie ***W*** jest niepustym zbiorem, natomiast ***V*** jest wartościowaniem definiowanym „prawie tak" jak poprzednio – to „prawie" znaczy tylko tyle, że w warunkach dla formuł postaci $\Box A$ oraz $\Diamond A$ pomijamy relatywizacje do ***R***.

.

Rachunek ***S5*** zaksjomatyzowaliśmy poprzez przyjęcie jako aksjomatów specyficznych formuł **K**, **T** oraz **E**, tj. $\Diamond p \to \Box\Diamond p$. Powstaje pytanie, jakie własności relacji alternatywności „wymusza" sama formuła **E**.

Własnością tą jest tzw. euklidesowość w zbiorze światów możliwych.

Definicja 10.12. *Strukturę modelową* <***W***, ***R***>, *w której relacja alternatywności* ***R*** *jest euklidesowa w* ***W****, tj. spełnia warunek:*

(**euc**) *dla dowolnych* ***w***, ***w****, ***w***** $\in$ ***W***: *jeżeli* ***wRw**** *oraz* ***wRw*****, *to* ***w*Rw*****

nazywamy euklidesową.

Modelem euklidesowym *nazywamy dowolny model oparty na euklidesowej strukturze modelowej.*

Udowodnimy:

Twierdzenie 10.20. *Formuła* **E** *jest prawdziwa w klasie wszystkich euklidesowych struktur modelowych*.

Dowód: Załóżmy, że istnieje model euklidesowy <***W***, ***R***, ***V***> taki, że ***V***(◊*p* → □◊*p*, ***w***) = **0** dla pewnego ***w*** ∈ ***W***. Wówczas ***V***(◊*p*, ***w***) = **1** oraz ***V***(□◊*p*, ***w***) = **0**. Z tego drugiego założenia wnosimy, że istnieje ***w**** ∈ ***W*** takie, że ***wRw**** oraz ***V***(◊*p*, ***w****) = **0**. Jeśli tak, to dla każdego świata ***x*** alternatywnego względem ***w**** mamy ***V***(*p*, ***x***) = **0**. Z drugiej strony, skoro ***V***(◊*p*, ***w***) = **1**, to istnieje ***w***** ∈ ***W*** takie, że ***wRw***** oraz ***V***(*p*, ***w*****) = **1**. Skoro ***wRw**** oraz ***wRw*****, to z euklidesowości ***R*** wnosimy ***w*Rw*****. Zatem istnieje świat alternatywny ***x*** względem ***w**** (mianowicie ***w*****) taki, że ***V***(*p*, ***x***) = **1**. Otrzymaliśmy sprzeczność. ■

Komentarz: Zapraszam na wykład :)

Dla celów mnemotechnicznych zestawmy schematycznie uzyskane wyniki.

Formuła / aksjomat	*Relacja alternatywności w strukturze modelowej / modelu*
D: $\Box p \rightarrow \Diamond p$	*seryjna*
T: $\Box p \rightarrow p$	*zwrotna*
B: $p \rightarrow \Box\Diamond p$	*symetryczna*
4: $\Box p \rightarrow \Box\Box p$	*przechodnia*
E: $\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$	*euklidesowa*

Tabela 1.

Modalny rachunek zdań	*Modele Kripkego*
K = **K**	*wszystkie*
D = **KD**	*seryjne*
T = **KT**	*zwrotne*
B = **KTB**	*zarazem zwrotne i symetryczne*
S4 = **KT4**	*zarazem zwrotne i przechodnie*
S5 = **KTE** = **KTB4**	*zarazem zwrotne, symetryczne i przechodnie*

Tabela 2.

Pamiętając, że normalne modalne rachunki zdań są wyznaczone przez kombinacje aksjomatów **K**, **D**, **T**, **B**, **4** i **E** (zob. poprzedni wykład), mogą się teraz Państwo z łatwością domyślić, jakie modele Kripkego charakteryzują – i są charakteryzowane przez – pozostałe 10 rachunków :)

Komentarz dotyczący innych ujęć semantyki Kripkego dla normalnych modalnych rachunków zdań: Zapraszam na wykład :)