Wprowadzenie do logiki epistemicznej. Zdaniowa logika przekonań KDE4 i jej semantyka. Część II

(notatki do wykładów)

Andrzej Wiśniewski
Andrzej.Wisniewski@amu.edu.pl

wersja beta 1.6

Semantyka Meyera - van der Hoeka dla KDE4 i KE4

W książce J. J. Ch. Meyera i W. van der Hoek'a pt. *Epistemic Logic for AI and Computer Science* (Kluwer, Dordrecht 1995) znajdujemy bardzo interesujący wariant semantyki światów możliwych dla epistemicznych rachunków przekonań **KDE4**/**KD45** i **KE4**/**K45**.

Rozpocznijmy od przypadku rachunku **KDE4**.

Rozważmy strukturę postaci:

(#) $<\boldsymbol{W}, \{\boldsymbol{w_0}\}, \boldsymbol{R}>$

gdzie $\boldsymbol{W}$ jest zbiorem („światów możliwych"), $\boldsymbol{w}_0$ to, intuicyjnie rzecz biorąc, „nasz świat", $\boldsymbol{w}_0 \notin \boldsymbol{W}$, a $\boldsymbol{R}$ jest binarną relacją w iloczynie kartezjańskim:

$$\boldsymbol{W} \cup \{\boldsymbol{w}_0\} \times \boldsymbol{W} \cup \{\boldsymbol{w}_0\}.$$

Model określony na strukturze $<\boldsymbol{W}, \{\boldsymbol{w_0}\}, \boldsymbol{R}>$ ma postać:

(##) $$<\boldsymbol{W}, \{\boldsymbol{w_0}\}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{V}>$$

gdzie ***V*** jest funkcją wartościowania, przyporządkowującą każdej parze uporządkowanej, której pierwszym elementem jest formuła, a drugim element zbioru $\boldsymbol{W} \cup \{\boldsymbol{w}_0\}$, dokładnie jedną z wartości logicznych **1**, **0**; funkcję tę definiujemy nieomalże w standardowy sposób, podobnie jak pojęcia prawdziwości formuły w modelu postaci (##) i prawdziwości formuły w strukturze postaci (#).

„Nieomalże”, albowiem warunki dla formuł postaci $\mathbf{P}A$ oraz $\mathbf{C}A$ są następujące:

- $\boldsymbol{V}(\mathbf{P}A, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$ *wtw istnieje* $\boldsymbol{w}^* \in \boldsymbol{W} \cup \{\boldsymbol{w}_0\}$ takie, że $\boldsymbol{wRw}^*$ oraz $\boldsymbol{V}(A, \boldsymbol{w}^*) = \mathbf{1}$.
- $\boldsymbol{V}(\mathbf{C}A, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$ *wtw dla każdego* $\boldsymbol{w}^* \in \boldsymbol{W} \cup \{\boldsymbol{w}_0\}$ takiego, że $\boldsymbol{wRw}^*$: $\boldsymbol{V}(A, \boldsymbol{w}^*) = \mathbf{1}$.

Prawdziwość w modelu postaci (##) to prawdziwość w każdym świecie ze zbioru $\boldsymbol{W} \cup \{\boldsymbol{w}_0\}$. Prawdziwość w strukturze postaci (#) to prawdziwość w każdym modelu (rozważanego typu) opartym na tej strukturze.

Rozważmy teraz model $\boldsymbol{M} = <\boldsymbol{W}, \{\boldsymbol{w_0}\}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{V}>$ analizowanego rodzaju spełniający następujące warunki:

(a_1) $\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{Rw}$ *dla każdego* $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$ („każdy świat z $\boldsymbol{W}$ jest epistemicznie alternatywny względem ‘naszego’ świata $\boldsymbol{w}_0$”),

(a_2) $\boldsymbol{wRw^*}$ *dla dowolnych* $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w^*} \in \boldsymbol{W}$ („wszystkie światy epistemicznie alternatywne względem ‘naszego’ świata $\boldsymbol{w}_0$ są epistemicznie alternatywne względem siebie”).

Uwaga: Należy pamiętać, że na mocy definicji $\boldsymbol{w}_0 \notin \boldsymbol{W}$.

Zauważmy, że gdy $<\boldsymbol{w}_0, \boldsymbol{w}_0> \notin \boldsymbol{R}$, to wartość logiczna formuły postaci $\mathrm{C}A$ w „naszym” świecie $\boldsymbol{w}_0$ modelu $\boldsymbol{M}$ nie zależy od wartości logicznej formuły A w świecie $\boldsymbol{w}_0$ tego modelu. Zależy ona natomiast od wartości logicznych, jakie przyjmuje formuła A w każdym ze światów ze zbioru $\boldsymbol{W}$ modelu $\boldsymbol{M}$. Proste rozumowanie pokazuje, że dla (każdego) modelu $\boldsymbol{M}$ analizowanego rodzaju spełniającego powyższe warunki zachodzi:

- *jeśli* $<\boldsymbol{w}_0, \boldsymbol{w}_0> \notin \boldsymbol{R}$, *to* $\boldsymbol{V}(\mathrm{C}A, \boldsymbol{w}_0) = \mathbf{1}$ *wtw dla każdego* $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$: $\boldsymbol{V}(A, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$.

Można udowodnić, iż:

Formuła A jest tezą rachunku przekonań **KDE4** *wtedy i tylko wtedy, gdy formuła A jest prawdziwa w każdej strukturze postaci* $<\boldsymbol{W}, \{\boldsymbol{w_0}\}, \boldsymbol{R}>$, *w której* ***W*** *jest zbiorem niepustym, a relacja* ***R*** *spełnia łącznie następujące warunki*:

(a_1) $\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{Rw}$ *dla każdego* $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$ („każdy świat z ***W*** jest epistemicznie alternatywny względem ‘naszego’ świata $\boldsymbol{w}_0$”),

(a_2) $\boldsymbol{wRw^*}$ *dla dowolnych* $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{w^*} \in \boldsymbol{W}$ („wszystkie światy epistemicznie alternatywne względem ‘naszego’ świata $\boldsymbol{w}_0$ są epistemicznie alternatywne względem siebie”).

Uwaga: Należy pamiętać, że na mocy poprzednich ustaleń $\boldsymbol{w}_0 \notin \boldsymbol{W}$, natomiast ***R*** jest binarną relacją w iloczynie kartezjańskim:

$$\boldsymbol{W} \cup \{\boldsymbol{w}_0\} \times \boldsymbol{W} \cup \{\boldsymbol{w}_0\}.$$

W przypadku rachunku **KE4** sytuacja jest prawie taka sama; różnica polega na tym, że nie wymagamy, aby zbiór ***W*** każdej wyjściowej struktury był niepusty. Mamy zatem:

Formuła A jest tezą rachunku przekonań **KE4** *wtedy i tylko wtedy, gdy formuła A jest prawdziwa w każdej strukturze postaci* $<\boldsymbol{W}, \{\boldsymbol{w_0}\}, \boldsymbol{R}>$, *w której relacja* ***R*** *spełnia łącznie następujące warunki*:

(a$_1$) $\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{R}\boldsymbol{w}$ *dla każdego* $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$ („każdy świat z $\boldsymbol{W}$ jest epistemicznie alternatywny względem ‘naszego’ świata $\boldsymbol{w}_0$”),

(a$_2$) $\boldsymbol{wRw^*}$ *dla dowolnych* $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w^*} \in \boldsymbol{W}$ („wszystkie światy epistemicznie alternatywne względem ‘naszego’ świata $\boldsymbol{w}_0$ są epistemicznie alternatywne względem siebie”).

Komentarze: zapraszam na wykład :)

Przykłady zastosowań

Przypuśćmy teraz, że *a* jest podmiotem epistemicznym (*epistemic agent*), posiadającym m.in. przekonania żywione z całkowitą pewnością. Formuła postaci $\mathbf{C}A$ będzie zatem znaczyć tyle, co:

- ***podmiot*** *a* ***jest całkowicie przekonany*** (*convinced*), ***że*** *A*,

podobnie formuła postaci $\mathbf{P}A$ znaczy, że:

- ***podmiot*** *a* ***myśli, że jest możliwe, że*** *A* (*thinks A to be possible*).

Załóżmy, że operator epistemiczny $\mathbf{C}$ jest w rozważanym przypadku rozumiany zgodnie z logiką **KDE4** (tj. „**KDE4** jest logiką całkowitych przekonań podmiotu *a*”).

Niech $\boldsymbol{w}_0$ oznacza świat rzeczywisty – „nasz świat”.

Rozważmy trzy zdania:

(1) *Jan jest logikiem.*

(2) *Jan jest psychastenikiem.*

(3) *Jan jest paranoikiem.*

Przypuśćmy, że dla podmiotu *a* światami epistemicznie alternatywnymi wobec $\boldsymbol{w}_0$ („możliwymi scenariuszami wydarzeń”) są - wzajemnie epistemicznie alternatywne - światy $\boldsymbol{w}_1$ oraz $\boldsymbol{w}_2$ takie, że:

świat w_1	**świat w_2**
zachodzi (1)	zachodzi (1)
nie zachodzi (2)	zachodzi (2)
zachodzi (3)	nie zachodzi (3)

Powstaje pytanie: o jakich zdaniach możemy prawomocnie stwierdzić, że wyrażają one całkowite przekonania podmiotu *a*? Pytanie to możemy sprowadzić do szeregu pytań postaci:

(*) *Czy* zdanie ‘$\mathbf{C}A$’ *jest prawdą w świecie* $\boldsymbol{w}_0$?

albowiem interesują nas (całkowite) przekonania podmiotu *a* w „naszym” świecie $\boldsymbol{w}_0$.

Przyjmując, że zdania (1) – (3) są kolejno reprezentowane przez zmienne zdaniowe p, q, r, możemy powiedzieć, że powyższa sytuacja jest reprezentowana przez – dowolny - model (w sensie Meyera i van der Hoeka) $\boldsymbol{M}^{\$}$:

$$<\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}, \{\boldsymbol{w}_0\}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{V}>$$

spełniający następujące warunki:

(a) $\boldsymbol{R} = \{<\boldsymbol{w}_0, \boldsymbol{w}_1>, <\boldsymbol{w}_0, w_2>, <\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2>, <\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_1>, <\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1>, <\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_2>\}$

(b) $\boldsymbol{V}(p, \boldsymbol{w}_1) = \mathbf{1}$; $\boldsymbol{V}(q, \boldsymbol{w}_1) = \mathbf{0}$; $\boldsymbol{V}(r, \boldsymbol{w}_1) = \mathbf{1}$;

(c) $\boldsymbol{V}(p, \boldsymbol{w}_2) = \mathbf{1}$; $\boldsymbol{V}(q, \boldsymbol{w}_2) = \mathbf{1}$; $\boldsymbol{V}(r, \boldsymbol{w}_2) = \mathbf{0}$.

Odpowiednikiem pytania o schemacie (*) jest teraz pytanie mające schemat:

(**) *Czy* $\boldsymbol{V}(\mathrm{C}A, \boldsymbol{w}_0) = \mathbf{1}$?

jako że – przypomnijmy – formuła jest prawdziwa w świecie modelu wtw wartość tej formuły (w tym świecie tego modelu) wynosi **1**.

Niech $\boldsymbol{R}^{\Rightarrow}\boldsymbol{w}_i$ oznacza zbiór wszystkich światów modelu $\boldsymbol{M}^{\$}$ alternatywnych względem świata $\boldsymbol{w}_i$ tego modelu.

I. Zapytajmy:

$$\textit{Czy } \boldsymbol{V}(\mathrm{C}p, \boldsymbol{w}_0) = \mathbf{1}\ ?$$

<u>Odpowiedź</u>: **tak**, bo $\boldsymbol{R}^{\Rightarrow}\boldsymbol{w}_0 = \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$, a $\boldsymbol{V}(p, \boldsymbol{w}_1) = \mathbf{1}$ oraz $\boldsymbol{V}(p, \boldsymbol{w}_2) = \mathbf{1}$.

II. Zapytajmy:

$$\textit{Czy } \boldsymbol{V}(\mathrm{C}q, \boldsymbol{w}_0) = \mathbf{1}\ ?$$

<u>Odpowiedź</u>: **nie**, bo $\boldsymbol{R}^{\Rightarrow}\boldsymbol{w}_0 = \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$, a $\boldsymbol{V}(q, \boldsymbol{w}_1) = \mathbf{0}$.

III. Zapytajmy:

$$\textit{Czy } \boldsymbol{V}(\mathrm{C}r, \boldsymbol{w}_0) = \mathbf{1}\ ?$$

<u>Odpowiedź</u>: **nie**, bo $\boldsymbol{R}^{\Rightarrow}\boldsymbol{w}_0 = \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$, a $\boldsymbol{V}(r, \boldsymbol{w}_2) = \mathbf{0}$.

IV. Zapytajmy:

$$\textit{Czy } \boldsymbol{V}(\mathrm{P}q, \boldsymbol{w}_0) = \mathbf{1}\ ?$$

<u>Odpowiedź</u>: **tak**, bo $\boldsymbol{R}^{\Rightarrow}\boldsymbol{w}_0 = \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$, a $\boldsymbol{V}(q, \boldsymbol{w}_2) = \mathbf{1}$.

V. Zapytajmy:

$$\textit{Czy } \boldsymbol{V}(\mathbf{P}r, \boldsymbol{w}_0) = \mathbf{1} \ ?$$

<u>Odpowiedź</u>: **tak**, bo $\boldsymbol{R}^{\Rightarrow}\boldsymbol{w}_0 = \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$, a $\boldsymbol{V}(r, \boldsymbol{w}_1) = \mathbf{1}$.

VI. Zapytajmy:

$$\textit{Czy } \boldsymbol{V}(\mathbf{C}(q \vee r), \boldsymbol{w}_0) = \mathbf{1} \ ?$$

<u>Odpowiedź</u>: **tak**, bo $\boldsymbol{R}^{\Rightarrow}\boldsymbol{w}_0 = \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$, a skoro $\boldsymbol{V}(r, \boldsymbol{w}_1) = \mathbf{1}$, to również $\boldsymbol{V}(q \vee r, \boldsymbol{w}_1) = \mathbf{1}$; podobnie skoro $\boldsymbol{V}(q, \boldsymbol{w}_2) = \mathbf{1}$, to również $\boldsymbol{V}(q \vee r, \boldsymbol{w}_2) = \mathbf{1}$.

VII. Zapytajmy:

$$\textit{Czy } \boldsymbol{V}(\mathbf{C}(p \to q \vee r), \boldsymbol{w}_0) = \mathbf{1} \ ?$$

<u>Odpowiedź</u>: **tak**, bo $\boldsymbol{R}^{\Rightarrow}\boldsymbol{w}_0 = \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$, a mamy $\boldsymbol{V}(q \vee r, \boldsymbol{w}_1) = \mathbf{1}$ oraz $\boldsymbol{V}(q \vee r, \boldsymbol{w}_2) = \mathbf{1}$.

VIII. Zapytajmy:

$$Czy\ \boldsymbol{V}(\mathbf{C}q \vee \mathbf{C}r, \boldsymbol{w}_0) = \mathbf{1}\ ?$$

Odpowiedź: **nie**, bo $\boldsymbol{V}(\mathbf{C}q, \boldsymbol{w}_0) = \mathbf{0}$ oraz $\boldsymbol{V}(\mathbf{C}q, \boldsymbol{w}_0) = \mathbf{0}$.

Uwaga: Zagadnienia (**VIII** i **IX**) mają odmienny charakter od poprzednich. Dlaczego? Zapraszam na wykład :)

IX. Zapytajmy:

$$Czy\ \boldsymbol{V}(\neg\mathbf{C}q \rightarrow \mathbf{C}r, \boldsymbol{w}_0) = \mathbf{1}\ ?$$

Odpowiedź: **nie**, bo $\boldsymbol{V}(\mathbf{C}q \vee \mathbf{C}r, \boldsymbol{w}_0) = \mathbf{0}$.

Przy okazji: przykłady **VI** i **VIII** pokazują, że nie jest tak, iż tezą rachunku **KDE4** jest dowolna formuła o postaci $\mathbf{C}(A \vee B) \rightarrow \mathbf{C}A \vee \mathbf{C}B$!

X. Zapytajmy:

$$\textit{Czy } \boldsymbol{V}(\mathbf{CC}p, \boldsymbol{w}_0) = \mathbf{1}\ ?$$

<u>Odpowiedź</u>: **tak**, bo tezą rachunku **KDE4** jest każda formuła postaci:

$$\mathbf{C}A \to \mathbf{CC}A$$

a więc także formuła:

$$\mathbf{C}p \to \mathbf{CC}p.$$

Jeśli tak, to formuła $\mathbf{C}p \to \mathbf{CC}p$ jest prawdziwa w rozważanym modelu $\boldsymbol{M}^{\$}$, skąd wnosimy, że jest ona prawdziwa w każdym świecie tego modelu – a więc także w „naszym" świecie $\boldsymbol{w}_0$. Skoro jednak mieliśmy (por. przykład **I**) $\boldsymbol{V}(\mathbf{C}p, \boldsymbol{w}_0) = \mathbf{1}$, to mamy również $\boldsymbol{V}(\mathbf{CC}p, \boldsymbol{w}_0) = \mathbf{1}$.

XI. Zapytajmy:

$$\textit{Czy } \boldsymbol{V}(\mathbf{P}\neg q, \boldsymbol{w}_0) = \mathbf{1}\ ?$$

<u>Odpowiedź</u>: **tak**, bo $\boldsymbol{V}(\mathbf{C}q, \boldsymbol{w}_0) = \mathbf{0}$, czyli $\boldsymbol{V}(\neg\mathbf{C}q, \boldsymbol{w}_0) = \mathbf{1}$. Tezą rachunku **KDE4** jest każda formuła postaci:

$$\neg\mathbf{C}A \to \mathbf{P}\neg A$$

czyli także formuła:

$$\neg\mathbf{C}q \to \mathbf{P}\neg q.$$

Tak więc skoro mamy $\boldsymbol{V}(\neg\mathbf{C}q, \boldsymbol{w}_0) = \mathbf{1}$, to mamy też $\boldsymbol{V}(\mathbf{P}\neg q, \boldsymbol{w}_0) = \mathbf{1}$.

XII. Zapytajmy:

$$\textit{Czy } \boldsymbol{V}(\mathbf{P}\neg r, \boldsymbol{w}_0) = \mathbf{1}\ ?$$

<u>Odpowiedź</u>: **tak**, bo $\boldsymbol{V}(\mathbf{C}r, \boldsymbol{w}_0) = \mathbf{0}$, a dalej rozumujemy analogicznie jak w poprzednim przypadku.

XIII. Zapytajmy:

$$\textit{Czy } \boldsymbol{V}(\mathbf{C}\neg\mathbf{C}q,\ \boldsymbol{w}_0) = \mathbf{1}\ ?$$

Odpowiedź: **tak**, bo mamy $\boldsymbol{V}(\mathbf{C}q, \boldsymbol{w}_0) = \mathbf{0}$, czyli $\boldsymbol{V}(\neg\mathbf{C}q, \boldsymbol{w}_0) = \mathbf{1}$, a tezą rachunku **KDE4** jest każda formuła postaci:

$$\neg\mathbf{C}A \rightarrow \mathbf{C}\neg\mathbf{C}A.$$

XIV. Zapytajmy:

$$\textit{Czy } \boldsymbol{V}(\mathbf{C}\neg\mathbf{C}r,\ \boldsymbol{w}_0) = \mathbf{1}\ ?$$

Odpowiedź: **tak**, bo mamy $\boldsymbol{V}(\mathbf{C}r, \boldsymbol{w}_0) = \mathbf{0}$.

XV. Zapytajmy:

$$\textit{Czy } \boldsymbol{V}(\mathbf{C}(\neg(p \wedge \neg p)),\ \boldsymbol{w}_0) = \mathbf{1}\ ?$$

Odpowiedź: **tak**, bo w rachunku **KDE4** obowiązuje **RG**.

XVI. Zapytajmy:

$$\textit{Czy } \boldsymbol{V}(\mathbf{C}((p \vee q) \wedge (p \vee r)), \boldsymbol{w}_0) = \mathbf{1}\ ?$$

<u>Odpowiedź</u>: **tak**, bo tezą rachunku **KDE4** jest każda formuła postaci:

$$\text{(!)} \qquad \mathbf{C}A \wedge \mathbf{C}(B \vee C) \rightarrow \mathbf{C}((A \vee B) \wedge (A \vee C))$$

czyli także formuła:

$$\text{(!*)} \qquad \mathbf{C}p \wedge \mathbf{C}(q \vee r) \rightarrow \mathbf{C}((p \vee q) \wedge (p \vee r))$$

a mamy już $\boldsymbol{V}(\mathbf{C}p, \boldsymbol{w}_0) = \mathbf{1}$ (por. przykład **I**) oraz $\boldsymbol{V}(\mathbf{C}(q \vee r), \boldsymbol{w}_0) = \mathbf{1}$ (zob. przykład **VI**).

Gdybyśmy jednak nie wiedzieli/nie pamiętali, że formuły postaci (!) są tezami rachunku **KDE4**, odpowiedzi na zadane pytanie możemy szukać budując tabelę analityczną dla formuły (!*) lub – co na jedno wychodzi - sprawdzając metodą tabel analitycznych, czy formuła:

$$\mathbf{C}((p \vee q) \wedge (p \vee r))$$

wynika na gruncie rachunku **KDE4** ze zbioru formuł:

$$\{\mathbf{C}p, \mathbf{C}(q \vee r)\}.$$

Tabela 1.

$$\neg(\mathbf{C}p \wedge \mathbf{C}(q \vee r) \rightarrow \mathbf{C}((p \vee q) \wedge (p \vee r))),\ 0$$

$$\mathbf{C}p \wedge \mathbf{C}(q \vee r),\ 0$$

$$\neg\mathbf{C}((p \vee q) \wedge (p \vee r)),\ 0$$

$$\mathbf{C}p,\ 0$$

$$\mathbf{C}(q \vee r),\ 0$$

$$\mathbf{P}\neg((p \vee q) \wedge (p \vee r)),\ 0$$

$$0R1$$

$$\neg((p \vee q) \wedge (p \vee r)),\ 1$$

$\neg(p \vee q), 1$	$\neg(p \vee r), 1$
$\neg p,\ 1$	$\neg p,\ 1$
$\neg q,\ 1$	$\neg r,\ 1$
$p,\ 1$	$p,\ 1$

Tabela 2.

$$\mathbf{C}p,\ 0$$
$$\mathbf{C}(q \vee r),\ 0$$
$$\neg\mathbf{C}((p \vee q) \wedge (p \vee r)),\ 0$$
$$\mathbf{P}\neg((p \vee q) \wedge (p \vee r)),\ 0$$
$$0R1$$
$$\neg((p \vee q) \wedge (p \vee r)),\ 1$$

$\neg(p \vee q), 1$	$\neg(p \vee r), 1$
$\neg p,\ 1$	$\neg p,\ 1$
$\neg q,\ 1$	$\neg r,\ 1$
$p,\ 1$	$p,\ 1$

Podsumujmy, czego udało nam się jak dotąd dowiedzieć o podmiocie epistemicznym *a*:

a **jest całkowicie przekonany, że:**	**nie jest tak, że** *a* **jest całkowicie przekonany, że:**	*a* **myśli, że jest możliwe, że:**
p	q	q
$q \vee r$	r	r
$p \rightarrow q \vee r$		$\neg q$
$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$		$\neg r$
$\neg(p \wedge \neg p)$		
$\mathbf{C}p$		
$\neg\mathbf{C}q$		
$\neg\mathbf{C}r$		

Przypomnijmy, że p : ‘Jan jest logikiem’, q : ‘Jan jest psychastenikiem”, a r : ‘Jan jest paranoikiem’.

Nasza analiza doprowadziła do scharakteryzowanie pewnych nastawień sądzeniowych (*propositional attitudes*) podmiotu *a*. Ściślej rzecz biorąc, przypisaliśmy podmiotowi *a* te nastawienia, *zakładając, że* **KDE4** jest „właściwą” logiką całkowitych przekonań.

Przypisując podmiotowi *a* nastawienia sądzeniowe wobec zdań/ sądów (1) – (3) oraz pewnych zdań/sądów z nich zbudowanych, opieraliśmy się na informacji wyjściowej dotyczącej tego, jaką postać mają „alternatywy epistemiczne” rozważane/ dopuszczane przez podmiot *a*. Informacja ta *nie dotyczyła* natomiast tego, jakie są nastawienia sądzeniowe podmiotu *a* wobec zdań/ sądów (1) – (3) oraz odpowiednich zdań/sądów z nich utworzonych.

Zauważmy na koniec, że logikę **KDE4** - podobnie jak inne logiki epistemiczne – można również stosować na inne sposoby. Przedstawię tutaj jeden z nich.

Przypuśćmy, że mamy informację odnośnie tego, że rozważany podmiot *a* jest całkowicie przekonany co do (sądów) A_1, ..., A_n. Pytania, które sobie stawiamy, dotyczą tego, czy podmiot *a* jest <u>również</u> całkowicie przekonany, że B_1, ..., B_k i/ lub czy podmiot myśli, że jest możliwe, że D_1, ..., D_m. Szukając odpowiedzi, zakładamy, że **KDE4** jest „właściwą logiką przekonań” i stawiamy pytania typu:

Czy formuła $\mathbf{C}B_i$ *wynika na gruncie logiki* **KDE4** *ze zbioru formuł* $\{\mathbf{C}A_1, ..., \mathbf{C}A_n\}$?

Czy formuła $\mathbf{P}D_i$ *wynika na gruncie logiki* **KDE4** *ze zbioru formuł* $\{\mathbf{C}A_1, ..., \mathbf{C}A_n\}$?

gdzie $1 \leq i \leq k, m$; rozważamy rzecz jasna formuły języka rachunku **KDE4** reprezentujące odpowiednie sądy.

Odpowiedzi poszukujemy stosując np. metodę tabel analitycznych dla **KDE4**.

Semantyczne uzasadnienie przyjętego sposobu postępowania jest następujące: wynikanie na gruncie rachunku **KDE4** gwarantuje „transmisję prawdziwości” formuł względem dowolnego świata dowolnego modelu – a zatem również z uwagi na świat $\boldsymbol{w}_0$ reprezentujący „nasz świat”.

Zilustrujmy rzecz przykładem.

Przypuśćmy, że podmiot *a* jest całkowicie przekonany, że:

p : ‘Szef jest idiotą’.

$p \to q$: ‘Jeśli szef jest idiotą, to stanowię dla niego zagrożenie’.

$q \to r$: ‘Jeśli stanowię zagrożenie dla szefa, to szef prędzej czy później zwolni mnie z pracy’.

Czy w tej sytuacji podmiot a jest również całkowicie przekonany, że szef prędzej czy później zwolni go z pracy ?

Zatem:

Czy jest tak, że $\{\mathbf{C}p, \mathbf{C}(p \to q), \mathbf{C}(q \to r)\} \models_{\mathbf{KDE4}} \mathbf{C}r$?

Budujemy tabelę analityczną[1]:

$$\mathbf{C}p,\ 0$$
$$\mathbf{C}(p \to q),\ 0$$
$$\mathbf{C}(q \to r),\ 0$$
$$\neg\mathbf{C}r,\ 0$$
$$\mathbf{P}\neg r,\ 0$$
$$0R1$$
$$\neg r,\ 1$$
$$q \to r,\ 1$$

$\neg q,\ 1$	$r,\ 1$
$p \to q,\ 1$	

$\neg p,\ 1$	$q,\ 1$
$p,\ 1$	

[1] Chyba że pamiętamy, iż $\mathbf{C}p \wedge (\mathbf{C}(p \to q) \wedge \mathbf{C}(q \to r)) \to \mathbf{C}r$ jest tezą logiki **KDE4**.

Tabela jest zamknięta, tak więc możemy przypisać podmiotowi *a* całkowite przekonanie, że szef prędzej czy później zwolni go/ ją z pracy.

Czy podmiot *a* faktycznie żywi takie przekonanie, czy też raczej jest zobowiązany, aby je żywić (*is committed to believe*) – to sprawa odrębna.

Więcej na ten temat – na wykładzie.