

Andrzej Wiśniewski

Wynikanie logiczne.
Elementy semantyki Klasycznego Rachunku Zdań

Materiały dla studentów

1. Wynikanie logiczne - intuicje

Wynikanie logiczne

Intuicja leżąca u podstaw definicji tego pojęcia jest następująca: zdanie A wynika [logicznie] ze zbioru zdań X dokładnie wtedy, gdy **nie może być tak, że wszystkie zdania ze zbioru X są prawdziwe, a zdanie A nie jest prawdziwe.**

Warunek typu „nie może być tak, że” jest oczywiście **silniejszy** od warunku typu „nie jest tak, że”.

W przypadku wynikania logicznego mamy do czynienia z efektem „transmisji prawdziwości” (*transmission of truth*). Mówiąc ogólnie, sprowadza się on do: „**jeśli tylko** wszystkie zdania w X są prawdziwe, to zdanie A **musi być** prawdziwe”.

Ale: definiując wynikanie [logiczne] A z X , **nie zakładamy**, że X składa się z prawd!

Nie zakładamy też, że X i A są obiektami (odpowiednio: zbiorem przesłanek i wnioskiem) czyjegoś wnioskowania.

Rozważmy:

Każda abra jest kadabra.
Każda kadabra jest memena.

Każda abra jest memena.

Otóż nie może być tak, że obie przesłanki są prawdziwe, a wniosek nie jest prawdziwy – przy czym zupełnie nieistotne jest tu, czym są *abra*, *kadabra* i *memena*. Innymi słowy: jakkolwiek interpretujemy predykaty „jest abra”, „jest kadabra” i „jest memena”, nie jest tak, że przesłanki są prawdziwe, a wniosek prawdziwy nie jest.

$S \text{ a } M$

$M \text{ a } P$

 $S \text{ a } P$

$\forall x (S(x) \rightarrow M(x))$

$\forall x (M(x) \rightarrow P(x))$

 $\forall x (S(x) \rightarrow P(x))$

*Jeśli zwalniają, to będą przyjmować.
Zwalniają.*

Będą przyjmować.

*Jeśli Wiśniewski mówi, to kłamie.
Wiśniewski mówi.*

Wiśniewski kłamie.

Jeżeli p , to q

p

q

$p \rightarrow q$

p

q

$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$

Jeśli Wiśniewski mówi, to kłamie.

Wiśniewski kłamie.

Wiśniewski mówi.

$p \rightarrow q$

q

p

Jeśli padał deszcz, to ulica jest mokra.

Ulica jest mokra.

Padał deszcz.

~~$[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$~~

bebe

$$\frac{p \rightarrow q}{\neg p \rightarrow \neg q}$$

[Jeśli] jest człowiek, [to] jest problem.
[Jeśli] nie ma człowieka, [to] nie ma problemu.

$$\cancel{(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)}$$

ajka

$$\frac{p \rightarrow q}{\neg q \rightarrow \neg p}$$

[Jeśli] jest człowiek, [to] jest problem.
[Jeśli] nie ma problemu, [to] nie ma człowieka.

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$$

*2. Elementy Klasycznego Rachunku Zdań.
Wynikanie logiczne na gruncie KRZ*

Język Klasycznego Rachunku Zdań

Skróty: zamiast „Klasyczny Rachunek Zdań” piszę *KRZ*.

Definicja 1. *Do alfabetu języka KRZ należą następujące znaki, i tylko one:*

p_1, p_2, p_3, \dots	(zmienne zdaniowe)
$\neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow$	(spójniki)
()	(nawiasy)

Zmiennych zdaniowych jest przeliczalnie nieskończenie wiele; zamiast p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 będę (czasami) pisał p, q, r, s, t .

Zbiór wszystkich zmiennych zdaniowych języka *KRZ* oznaczę symbolem *VAR*.

Definicja 2. *Wyrażeniem języka KRZ jest każdy skończony ciąg elementów alfabetu języka KRZ.*

Wyrażenia poprawnie zbudowane („sensowne”) języka *KRZ* to **formuły** tego języka.

Definicja 3. Zbiór *FORM* formuł języka *KRZ* jest najmniejszym zbiorem spełniającym następujące warunki:

- (i) $VAR \subseteq FORM$,
- (ii) jeżeli wyrażenie A należy do *FORM*, to wyrażenie mające postać $\neg A$ należy do *FORM*,
- (iii) jeżeli wyrażenia A, B należą do *FORM*, to wyrażenia mające postać: $(A \rightarrow B)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \leftrightarrow B)$ również należą do *FORM*.

Każdy element zbioru *FORM* nazywamy **formułą** języka *KRZ*.

Zamiast „formuła *KRZ*” będę (w obrębie tego wykładu!) mówił/pisał „formuła”.

Uwaga: Litery A, B, C, D występują w tym wykładzie w nowych rolach. Poprzednio były one zmiennymi przebiegającymi zbiory. Teraz są one *metajęzykowymi zmiennymi*, których wartościami są formuły.

Język KRZ. Formuły

Przyjmujemy następujące zasady pomijania nawiasów w formułach:

- (i) wolno pominąć zewnętrzną parę nawiasów w formule,
- (ii) spójniki \wedge i \vee wiążą silniej niż spójniki \rightarrow i \leftrightarrow .

Zła wiadomość: nie istnieje algorytm przekładania zdań języka naturalnego na formuły KRZ.

Dobra wiadomość: Niejednokrotnie trudności z dokonaniem przekładu są oznaką tego, że – używając eufemizmu – przekładane zdanie dalekie jest od jasności.

Przeczytam kilka podręczników lub wysłucham wykładów i rozwiążę kilkadziesiąt zadań.

Jeżeli ukończę studia doktoranckie, to będę pracować naukowo lub zostanę nauczycielem.

Ukończę studia doktoranckie i będę pracować naukowo lub zostanę nauczycielem zawsze i tylko wtedy, gdy zadowolę się skromnymi dochodami.

Semantyka KRZ: funkcje prawdziwościowe

Niech **1** i **0** będą wartościami logicznymi, odpowiednio **Prawdą** i **Fałszem**.

Definicja 4. Pod pojęciem n -argumentowej ($n \geq 1$) funkcji prawdziwościowej rozumiemy funkcję n zmiennych przebiegających zbior $\{0, 1\}$ i o wartościach należących do zbioru $\{0, 1\}$.

Funkcje prawdziwościowe przyporządkowują zatem n -tkom uporządkowanym wartości logicznych wartości logiczne.

Mówiąc ściślej, jest tak, gdy $n > 1$; gdy $n = 1$, to funkcja prawdziwościowa przyporządkowuje wartościom logicznym wartości logiczne.

Przykład: Funkcja $f_{\neg} : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ określona przez równości:

(i) $f_{\neg}(1) = 0$,

(ii) $f_{\neg}(0) = 1$

jest 1-argumentową funkcją prawdziwościową.

Funkcje prawdziwościowe

Przykład: Funkcja $f_{\wedge}: \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ określona przez równości:

(i) $f_{\wedge}(1, 1) = 1,$

(ii) $f_{\wedge}(1, 0) = 0,$

(iii) $f_{\wedge}(0, 1) = 0,$

(iv) $f_{\wedge}(0, 0) = 0$

jest 2-argumentową funkcją prawdziwościową.

Funkcję f_{\wedge} można też określić przy pomocy każdej z następujących tabel:

f_{\wedge}	1	0
1	1	0
0	0	0

f_{\wedge}		
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Funkcje prawdziwościowe

Przykład: Funkcje f_{\rightarrow} , f_{\vee} , f_{\leftrightarrow} określone przez tabelki:

f_{\rightarrow}	1	0		f_{\vee}	1	0		f_{\leftrightarrow}	1	0
1	1	0		1	1	1		1	1	0
0	1	1		0	1	0		0	0	1

są 2-argumentowymi funkcjami prawdziwościami.

Funkcje f_{\wedge} , f_{\rightarrow} , f_{\vee} , f_{\leftrightarrow} charakteryzują, kolejno, semantyczne własności spójników \wedge , \rightarrow , \vee , \leftrightarrow . Funkcja f_{\neg} charakteryzuje semantycznie spójnik negacji \neg . I tę funkcję można określić przy pomocy tabelki:

f_{\neg}	
1	0
0	1

Definicja 5. Wartościowaniem nazywamy każdą funkcję $v: FORM \rightarrow \{0, 1\}$ taką, że:

- (i) dla każdej zmiennej zdaniowej z : $v(z) = 1$ albo $v(z) = 0$;
- (ii) $v(\neg A) = 1$ wtw $v(A) = 0$;
- (iii) $v(A \wedge B) = 1$ wtw $v(A) = 1$ oraz $v(B) = 1$;
- (iv) $v(A \vee B) = 1$ wtw $v(A) = 1$ lub $v(B) = 1$;
- (v) $v(A \rightarrow B) = 1$ wtw $v(A) = 0$ lub $v(B) = 1$;
- (vi) $v(A \leftrightarrow B) = 1$ wtw $v(A) = v(B)$.

Komentarz: Gdy warunek z prawej strony równości (ii) – (vi) nie jest spełniony, to wartość odpowiedniej formuły przy wartościowaniu v wynosi rzecz jasna **0**.

Warunek (i) jest redundantny, jako że wartościowanie jest funkcją ze zbioru $FORM$ w zbiór $\{0, 1\}$, a $VAR \subset FORM$. Jednakże brak redundancji nie zawsze sprzyja jasności.

Dane, konkretne wartościowanie przyporządkowuje każdej formule dokładnie jedną wartość logiczną: **0** lub **1**.

Wartościowania

Wniosek 1. Nie istnieje wartościowanie, przy którym wartością danej formuły są zarówno **1**, jak i **0**.

Jest oczywiste, że istnieje nieskończenie wiele wartościowań.

Dygresja: Czasami obok pojęcia wartościowania wprowadza się też osobne pojęcie *wartościowania zmiennych*. Wartościowanie zmiennych jest funkcją przyporządkowującą każdej zmiennej zdaniowej jakąś wartość logiczną. Jednakże wartościowanie rozumiane w sensie definicji 5 również przyporządkowuje wartości logiczne wszystkim zmiennym zdaniowym, albowiem wartościowanie przyporządkowuje każdej formule wartość logiczną, a każda zmienna jest formułą.

Dla dociekliwych: Wartościowaniem zmiennych zdaniowych nazywamy każdą funkcję $\mathbf{v}^\# : VAR \rightarrow \{0, 1\}$. Jest oczywiste, że każde wartościowanie zmiennych zdaniowych można rozszerzyć do dokładnie jednego wartościowania formuł \mathbf{v} , mianowicie takiego, przy którym $\mathbf{v}(z) = \mathbf{v}^\#(z)$ dla każdej zmiennej zdaniowej.

Nb. zauważmy, że litera „z” użyta w definicji 5 i w powyższym sformułowaniu nie jest zmienną zdaniową, lecz jest metajęzykową zmienną przebiegającą zbiór zmiennych zdaniowych.

Związek między zdefiniowanymi wyżej funkcjami prawdziwościami f_{\neg} , f_{\wedge} , f_{\vee} , f_{\rightarrow} , f_{\leftrightarrow} a wartościowaniami jest następujący:

Wniosek 2. Niech \mathbf{v} będzie dowolnym wartościowaniem.

- (i) $\mathbf{v}(\neg A) = f_{\neg}(\mathbf{v}(A))$,
- (ii) $\mathbf{v}(A \wedge B) = f_{\wedge}(\mathbf{v}(A), \mathbf{v}(B))$,
- (iii) $\mathbf{v}(A \vee B) = f_{\vee}(\mathbf{v}(A), \mathbf{v}(B))$,
- (iv) $\mathbf{v}(A \rightarrow B) = f_{\rightarrow}(\mathbf{v}(A), \mathbf{v}(B))$,
- (v) $\mathbf{v}(A \leftrightarrow B) = f_{\leftrightarrow}(\mathbf{v}(A), \mathbf{v}(B))$.

Obliczanie wartości formuły przy wartościowaniu

Aby obliczyć wartość formuły A przy danym wartościowaniu \mathbf{v} , nie trzeba znać wartości wszystkich zmiennych zdaniowych przy tym wartościowaniu. *Wystarczy znać wartości logiczne przyporządkowane przez \mathbf{v} zmiennym występującym w analizowanej formule A .* Jest tak dlatego, że zachodzi:

Twierdzenie 1. *Niech A będzie formułą, natomiast \mathbf{v} i \mathbf{v}^* będą wartościowaniami takimi, że:*

(\\$) dla dowolnej zmiennej zdaniowej z występującej w formule A ,

$$\mathbf{v}(z) = \mathbf{v}^*(z).$$

Wówczas $\mathbf{v}(A) = \mathbf{v}^*(A)$.

Z twierdzenia 1 wynika, iż wartość formuły przy danym wartościowaniu *nie zależy* od wartości (przy tym wartościowaniu) zmiennych zdaniowych nie występujących w analizowanej formule: istotne są tylko wartości zmiennych występujących w rozważanej formule.

Obliczanie wartości formuły przy wartościowaniu

Przykład: Niech \mathbf{v} będzie wartościowaniem takim, że $\mathbf{v}(p) = \mathbf{1}$ oraz $\mathbf{v}(q) = \mathbf{0}$. Niech A będzie formułą $p \rightarrow q \wedge p$. Liczymy krok po kroku:

$$\mathbf{v}(p \rightarrow q \wedge p)$$

$$= f_{\rightarrow}(\mathbf{v}(p), \mathbf{v}(q \wedge p))$$

$$\text{(bo zachodzi } \mathbf{v}(A \rightarrow B) = \mathbf{f}_{\rightarrow}(\mathbf{v}(A), \mathbf{v}(B)) \text{)}$$

$$= f_{\rightarrow}(\mathbf{v}(p), f_{\wedge}(\mathbf{v}(q), \mathbf{v}(p)))$$

$$\text{(bo zachodzi } \mathbf{v}(A \wedge B) = \mathbf{f}_{\wedge}(\mathbf{v}(A), \mathbf{v}(B)) \text{)}$$

$$= f_{\rightarrow}(\mathbf{1}, f_{\wedge}(\mathbf{0}, \mathbf{1}))$$

$$\text{(bo } \mathbf{v}(p) = \mathbf{1} \text{ i } \mathbf{v}(q) = \mathbf{0} \text{)}$$

$$= f_{\rightarrow}(\mathbf{1}, \mathbf{0})$$

$$\text{(bo } f_{\wedge}(\mathbf{0}, \mathbf{1}) = \mathbf{0} \text{)}$$

$$= \mathbf{0}$$

$$\text{(bo } f_{\rightarrow}(\mathbf{1}, \mathbf{0}) = \mathbf{0} \text{)}$$

To samo możemy zrobić szybciej, wypisując odpowiedni wiersz tabelki zerojedynkowej:

p	q	$q \wedge p$	$p \rightarrow q \wedge p$
1	0	0	0

Tautologie KRZ. Wynikanie logiczne na gruncie KRZ

Definicja 6. Formuła A jest tautologią KRZ wtw dla każdego wartościowania \mathbf{v} zachodzi $\mathbf{v}(A) = 1$.

Wartościowań jest nieskończenie wiele. Jednakże aby sprawdzić, czy formuła jest tautologią, nie musimy wcale dokonywać nieskończenie wielu obliczeń. O czym za chwilę.

Notacja: Zamiast „formuła B wynika logicznie na gruncie KRZ z formuły A ” piszemy krótko: $A \vDash_{KRZ} B$.

Definicja 7. (wynikanie logiczne – na gruncie KRZ - formuły z formuły)

$A \vDash_{KRZ} B$ wtw dla każdego wartościowania \mathbf{v} zachodzi:

(*) jeżeli $\mathbf{v}(A) = 1$, to $\mathbf{v}(B) = 1$.

Innymi słowy, formuła B wynika logicznie na gruncie KRZ z formuły A wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje takie wartościowanie, przy którym wartością formuły A jest prawda, a wartością formuły B jest fałsz.

Wynikanie logiczne na gruncie KRZ

Twierdzenie 2. $A \vDash_{KRZ} B$ wtw formuła $A \rightarrow B$ jest tautologią KRZ.

Komentarz: Aby wykazać, że B wynika logicznie z A , wystarczy zatem wykazać, że $A \rightarrow B$ jest tautologią. **Dysponując metodą stwierdzania tautologiczności dysponujemy zarazem metodą wykazywania, że zachodzi wynikanie logiczne formuły z formuły.**

Przykład. Formuła:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$$

jest tautologią KRZ (co chwilowo przyjmijmy bez uzasadnienia) zwaną *prawem transpozycji*. Na mocy twierdzenia 2 mamy:

$$p \rightarrow q \vDash_{KRZ} \neg q \rightarrow \neg p$$

Tak więc jeśli ktoś wnioskuje zgodnie ze schematem:

$$\frac{p \rightarrow q}{\neg q \rightarrow \neg p}$$

to jego wniosek wynika logicznie z przesłanki. Zatem wniosek musi być prawdziwy **jeśli tylko** przesłanka jest prawdziwa.

Wynikanie logiczne na gruncie KRZ

Rozważmy teraz wynikanie formuły ze zbioru formuł.

Notacja: Zamiast „formuła B wynika logicznie na gruncie KRZ ze zbioru formuł X ” piszemy krótko: $X \vDash_{KRZ} B$.

Definicja 8. (wynikanie logiczne - na gruncie KRZ – formuły ze zbioru formuł)

$X \vDash_{KRZ} B$ wtw dla każdego wartościowania \mathbf{v} zachodzi:

(*) jeżeli $\mathbf{v}(A) = \mathbf{1}$ dla każdego $A \in X$, to $\mathbf{v}(B) = \mathbf{1}$.

Innymi słowy, formuła B wynika (logicznie na gruncie KRZ) ze zbioru formuł X wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje takie wartościowanie, przy którym wszystkie formuły w X są prawdą, a B jest fałszem.

Konwencja: Zamiast $\forall A \in X (\mathbf{v}(A) = \mathbf{1})$ piszemy czasami: $\mathbf{v}(X) = \mathbf{1}$. Pisząc tak, mamy na myśli to, że *wszystkie* formuły ze zbioru formuł X są prawdziwe przy wartościowaniu \mathbf{v} . Proszę zapamiętać, że czytanie napisu $\mathbf{v}(X) = \mathbf{1}$ jako „zbiór X jest prawdziwy przy wartościowaniu \mathbf{v} ” **nie ma sensu**: tylko pojedyncze formuły mogą być prawdziwe czy fałszywe przy wartościowaniach.

Wynikanie logiczne na gruncie KRZ

Zbiór X może być również zbiorem jednoelementowym, powiedzmy $\{A\}$. Oczywistą konsekwencją podanych definicji jest:

Wniosek 3. $\{A\} \vDash_{KRZ} B$ wtw $A \vDash_{KRZ} B$.

Wynikanie formuły z formuły moglibyśmy zatem zdefiniować jako wynikanie formuły z jednoelementowego zbioru formuł. Nie zachodzi jednak zależność odwrotna.

Przykład: Jest tak, że $\{p \rightarrow q, p\} \vDash_{KRZ} q$. Jednakże ani nie jest tak, że $p \rightarrow q \vDash_{KRZ} q$, ani nie jest tak, że $p \vDash_{KRZ} q$.

Wynikanie logiczne na gruncie KRZ

Notacja: Zamiast $A_1 \wedge (A_2 \wedge \dots (A_{n-1} \wedge A_n) \dots)$ piszemy $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$.

Twierdzenie 3. $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \vdash_{KRZ} B$ wtw
formuła $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B$ jest tautologią KRZ.

Tak więc aby wykazać, że formuła B wynika logicznie ze zbioru formuł utworzonego z formuł A_1, A_2, \dots, A_n , wystarczy pokazać, że formuła $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B$ jest tautologią KRZ. Z drugiej strony, tautologie podpadające pod schemat $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B$ niosą informacje o wynikaniu formuły B ze zbioru formuł $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$.

Przykład:

$$\begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & B \\ (p \rightarrow q) \wedge p & \rightarrow & q \end{array}$$

Zatem $\{p \rightarrow q, p\} \vdash_{KRZ} q$.

Wynikanie a tautologiczność i spełnialność

Zagadnienie wynikania na gruncie *KRZ* redukuje się zatem do zagadnienia tautologiczności odpowiedniej formuły (języka *KRZ*).

Dygresja: Oba powyższe zagadnienia można z kolei zredukować do zagadnienia **spełnialności**.

Definicja 9: Formułę A nazywamy **spełnialną** wtw istnieje [co najmniej jedno] wartościowanie \mathbf{v} takie, że $\mathbf{v}(A) = 1$.

Zbiór formuł X nazywamy **spełnialnym** wtw istnieje wartościowanie \mathbf{v} takie, że $\mathbf{v}(A) = 1$ dla każdego $A \in X$.

Wniosek 4: Formuła A jest tautologią wtw formuła postaci $\neg A$ nie jest spełnialna.

Twierdzenie 4. Następujące warunki są równoważne:

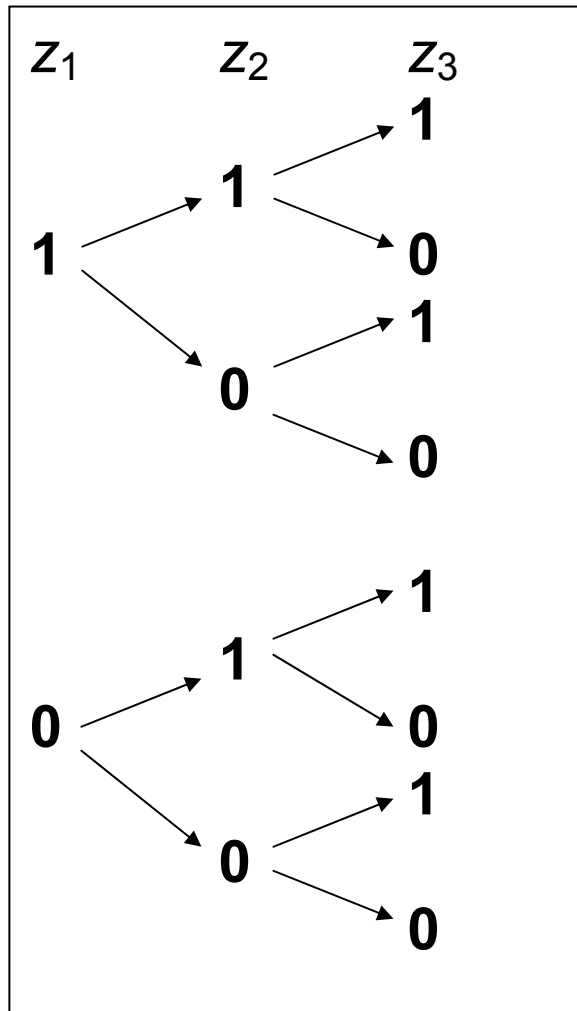
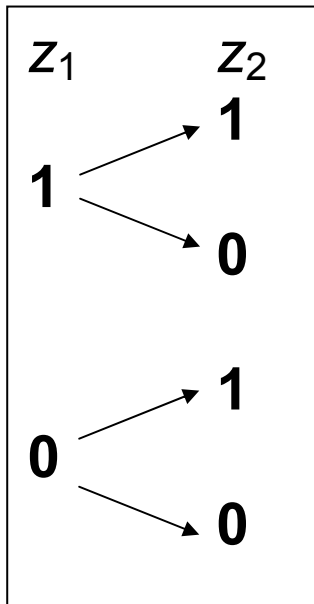
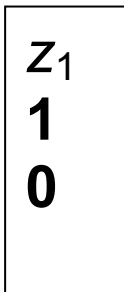
- (i) $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \vDash_{KRZ} B$,
- (ii) formuła postaci $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B$ jest tautologią *KRZ*,
- (iii) zbiór formuł $\{A_1, A_2, \dots, A_n, \neg B\}$ nie jest spełnialny,
- (iv) formuła $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \wedge \neg B$ nie jest spełnialna.

Na tym wykładzie będziemy jednak redukować zagadnienie wynikania logicznego na gruncie *KRZ* do zagadnienia tautologiczności w sensie *KRZ*. Przypomnijmy:

Definicja 6. *Formuła A jest tautologią *KRZ* wtw dla każdego wartościowania v zachodzi $v(A) = 1$.*

Wartościowań jest nieskończenie wiele. Jednakże aby sprawdzić, czy formuła jest tautologią, nie musimy wcale dokonywać nieskończenie wielu obliczeń.

Niech A będzie formułą, w której występuje dokładnie n różnych między sobą zmiennych zdaniowych. Oznaczmy je symbolami z_1, z_2, \dots, z_n . Ogół wartościowań możemy podzielić na dwie klasy: do pierwszej należą te, przy których wartością zmiennej z_1 jest **1**, do drugiej te, przy których wartością z_1 jest **0**. Ogół wartościowań z pierwszej klasy możemy dalej podzielić z uwagi na wartość zmiennej z_2 , i podobnie dla wartościowań z drugiej klasy. Kontynuując postępowanie względem kolejnych zmiennych z_3, \dots, z_n , otrzymamy w efekcie 2^n różnych klas wartościowań.



Tautologie KRZ. Metoda zerojedynkowa

Teraz wybieramy dokładnie jedno wartościowanie z każdej wyróżnionej klasy i badamy, jaka jest wartość formuły przy tym wartościowaniu. Gdy w każdym rozważanym przypadku otrzymamy wartość **1**, formuła jest tautologią. Tak więc aby wykazać, że formuła o n zmiennych jest tautologią, wystarczy dokonać 2^n sprawdzeń.

Znane Państwu tabelki zerojedynkowe służą właśnie do mechanizacji rozumowania powyższego typu.

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

Tautologie KRZ. Metoda zerojedynkowa

p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	$p \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Tautologie KRZ. Metoda skrócona

Budowanie tabelki zerojedynkowej może być, mówiąc eufemistycznie, żmudnym zajęciem. Zwykle – chociaż nie zawsze – lepiej jest skorzystać z rozumowania nie wprost.

Istota rozumowania polega tu na tym, że zakładamy, iż istnieje wartościowanie \mathbf{v} , przy którym analizowana formuła A ma wartość $\mathbf{0}$, tj. $\mathbf{v}(A) = \mathbf{0}$. Gdy takie założenie doprowadzi nas do **sprzeczności**, wnosimy stąd, że A jest tautologią. Rozumowanie prowadzimy w metajęzyku i korzystamy w nim z definicji pojęcia wartościowania, wniosku 2 oraz definicji odpowiednich funkcji prawdziwościowych.

Tautologie KRZ. Metoda skrócona

Przykład: Zakładamy, że istnieje wartościowanie \mathbf{v} takie, że:

$$\mathbf{v}((p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q) = \mathbf{0}.$$

1. \mathbf{v} jest wartościowaniem (założenie)
2. $\mathbf{v}((p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q) = \mathbf{0}$ (założenie)
3. $\mathbf{v}(p \rightarrow q) \wedge p = \mathbf{1}$ (z (2))
4. $\mathbf{v}(q) = \mathbf{0}$ (z (2))
5. $\mathbf{v}(p \rightarrow q) = \mathbf{1}$ (z (3))
6. $\mathbf{v}(p) = \mathbf{1}$ (z (3))
7. $\mathbf{v}(q) = \mathbf{1}$ (z (5) i (6))
8. \mathbf{v} nie jest wartościowaniem (z (7) i (4))

sprzeczność (1) i (8) !!! Zatem dla każdego wartościowania \mathbf{v} mamy:

$\mathbf{v}((p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q) = \mathbf{1}$. **Analizowana formuła jest tautologią.**

Tautologie KRZ. Metoda skrócona

Przykład: Zakładamy, że istnieje wartościowanie \mathbf{v} takie, że:

$$\mathbf{v}((p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)) = \mathbf{0}.$$

1. \mathbf{v} jest wartościowaniem (założenie)
2. $\mathbf{v}((p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)) = \mathbf{0}$ (założenie)
3. $\mathbf{v}(p \leftrightarrow q) = \mathbf{1}$ (z (2))
4. $\mathbf{v}(p \rightarrow q) = \mathbf{0}$ (z (2))
5. $\mathbf{v}(p) = \mathbf{1}$ (z (4))
6. $\mathbf{v}(q) = \mathbf{0}$ (z (4))
7. $\mathbf{v}(p \leftrightarrow q) = \mathbf{0}$ (z (5) i (6))
8. \mathbf{v} nie jest wartościowaniem (z (7) i (4))

sprzeczność (1) i (8) !!! Zatem analizowana formuła jest tautologią.

Tautologie KRZ. Metoda skrócona

Przykład: Zakładamy, że istnieje wartościowanie \mathbf{v} takie, że:

$$\mathbf{v}(p \vee q \rightarrow (\neg p \rightarrow q)) = \mathbf{0}.$$

1. \mathbf{v} jest wartościowaniem (założenie)

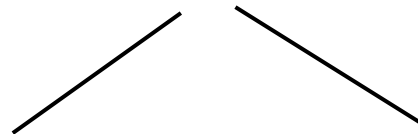
2. $\mathbf{v}(p \vee q \rightarrow (\neg p \rightarrow q)) = \mathbf{0}$ (założenie)

3. $\mathbf{v}(\neg p \rightarrow q) = \mathbf{0}$ (z (2))

4. $\mathbf{v}(p) = \mathbf{0}$ (z (3))

5. $\mathbf{v}(q) = \mathbf{0}$ (z (3))

6. $\mathbf{v}(p \vee q) = \mathbf{1}$ (z (2))



7.1. $\mathbf{v}(p) = \mathbf{1}$ (z (6))

7.2. $\mathbf{v}(q) = \mathbf{1}$ (z (6))

8.1. \mathbf{v} nie jest wartościowaniem

8.2. \mathbf{v} nie jest wartościowaniem

Na obu gałęziach otrzymaliśmy sprzeczność. Formuła jest tautologią.

Tautologie KRZ. Metoda skrócona

Przykład: Zakładamy, że istnieje wartościowanie \mathbf{v} takie, że:

$$\mathbf{v}(p \vee q \rightarrow p) = \mathbf{0}.$$

1. \mathbf{v} jest wartościowaniem (założenie)

2. $\mathbf{v}(p \vee q \rightarrow p) = \mathbf{0}$ (założenie)

3. $\mathbf{v}(p) = \mathbf{0}$ (z (2))

4. $\mathbf{v}(p \vee q) = \mathbf{1}$ (z (2))

5.1. $\mathbf{v}(p) = \mathbf{1}$ (z (4))

5.2. $\mathbf{v}(q) = \mathbf{1}$ (z (4))

6.1. \mathbf{v} nie jest wartościowaniem (z (5.1) i (3))

Nie jest tak, że na każdej gałęzi otrzymaliśmy sprzeczność. Formuła nie jest tautologią.

Niejako przy okazji ustaliliśmy, że analizowana formuła przyjmuje wartość $\mathbf{0}$ przy każdym wartościowaniu \mathbf{v} takim, że $\mathbf{v}(p) = \mathbf{0}$ i $\mathbf{v}(q) = \mathbf{1}$.

Wynikanie logiczne na gruncie KRZ

Wszystkie tautologie KRZ, w których implikacja \rightarrow jest spójnikiem głównym, niosą informacje o wynikaniu logicznym następnika z poprzednika. Oto lista wybranych tautologii tego rodzaju; w nawiasach podaję ich nazwy.

$p \wedge q \rightarrow p$	(prawo symplifikacji)
$p \rightarrow p \vee q$	(prawo addycji)
$\neg\neg p \rightarrow p$	(prawa podwójnej negacji)
$p \rightarrow \neg\neg p$	
$(p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$	(prawo eksportacji)
$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$	(prawo importacji)
$p \wedge \neg p \rightarrow q$	(prawo Duns Scotusa)
$(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$	(<i>modus ponendo ponens</i>)
$(p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p$	(<i>modus tollendo tollens</i>)
$(p \vee q) \wedge \neg p \rightarrow q$	(<i>modus tollendo ponens</i>)

Wynikanie logiczne na gruncie KRZ

Każda z podanych niżej formuł jest tautologią podpadającą pod schemat: $A_1 \wedge A_2 \rightarrow B$:

$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ (prawo sylogizmu hipotetycznego)

$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q \wedge r)$ (prawo mnożenia następników)

$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r)$ (prawo dodawania poprzedników)

Zatem:

$\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \vdash_{KRZ} p \rightarrow r$

$\{p \rightarrow q, p \rightarrow r\} \vdash_{KRZ} p \rightarrow q \wedge r$

$\{p \rightarrow r, q \rightarrow r\} \vdash_{KRZ} p \vee q \rightarrow r$

Uwaga: Tautologie te podpadają też pod schemat $A \rightarrow B$. Zatem mamy również $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \vdash_{KRZ} p \rightarrow r$, i podobnie w pozostałych przypadkach.

Uwaga końcowa, oparta na przykładzie: Ponieważ formuła $p \rightarrow r$ wynika logicznie (na gruncie *KRZ*) ze zbioru formuł $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\}$, to wnioskowanie przebiegające wedle schematu:

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline p \rightarrow r \end{array}$$

ma tę własność, że **jeśli** obie jego przesłanki są prawdziwe, **to** wniosek musi być prawdziwy. Innymi słowy, mamy tutaj **gwarancję przechodzenia od prawdy do prawdy**. Jest to **jedyna** gwarancja dostarczana przez *KRZ* – sama logika nie dostarcza gwarancji prawdziwości przesłanek¹, a zatem również gwarancji prawdziwości wniosku.

Niby to oczywiste, ale nie zaszkodzi powtórzyć :)

¹ Z wyjątkami, o których na wykładzie.

Literatura:

Chociaż ten wykład dotyczył spraw podstawowych, są one (co może Państwa zdziwić) różnie przedstawiane w różnych podręcznikach. Ujęcia te są jednak równoważne.

W szczególności, pojęcie wartościowania w kontekście *KRZ* rozumie się czasami odmiennie niż na tym wykładzie: za wartościowania uważa się nieskończone ciągi wartości logicznych **0**, **1**. Wtedy trzeba jednak wprowadzić funkcje dwuargumentowe, przyporządkowujące formułom i wartościowaniom wartości logiczne. Przykład takiego podejścia znajdą Państwo w (obowiązującym w Wielkopolsce i na ziemiach przyległych) podręczniku [1].

W anglojęzycznej literaturze przedmiotu przyporządkowanie wartości logicznych zmiennym zdaniowym określa się czasami terminem *assignment* lub *interpretation*. Termin *interpretation* bywa też używany na oznaczenie tego, co nazwaliśmy tutaj wartościowaniem (ang. *valuation*). Tłumacze na język polski przyjmują różnorodne konwencje terminologiczne.

[1] Tadeusz Batóg: *Podstawy logiki*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 1994 (istnieje wiele wydań tej pozycji).

[2] Mordechai Ben-Ari: *Logika matematyczna w informatyce*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2005.

[3] Geoffrey Hunter: *Metalogika*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1982.

[4] Mieczysław Omyła: *Zarys logiki*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1995.

a ponadto praktycznie każdy w miarę zaawansowany podręcznik logiki.