Andrzej Wiśniewski

Metoda tabel analitycznych dla Klasycznego Rachunku Zdań

Materiały dla studentów

Wprowadzenie

Na tym wykładzie przyjmuję terminologię i notację wprowadzoną na wykładzie poprzednim. Mówiąc o formułach, mam na myśli formuły *KRZ*, jednakże – z uwagi na potrzebę uniknięcia pewnych komplikacji – nie wszystkie. Nie będę tu rozważał formuł, w których występuje spójnik równoważności $\leftrightarrow$. [Nie jest to zresztą ograniczenie istotne, jako że formułę postaci $(A \leftrightarrow B)$ można uważać za skrót formuły postaci $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$]. Pojęcie wartościowania zawsze rozumiem w sensie definicji 5 z poprzedniego wykładu, z pominięciem warunku dla równoważności $\leftrightarrow$.

Metoda tabel analitycznych jest motywowaną semantycznie metodą dowodową. Jako metoda dowodowa należy ona jednak do składni: proponowane są pewne syntaktyczne reguły przekształcania wyrażeń, natomiast przekształcenie „zakończone i udane” uważa się za dowód formuły. Można pokazać na metapoziomie, że dowody mają tylko tautologie *KRZ*, tak więc zbudowanie dowodu formuły jest równoznaczne z wykazaniem, że formuła ta jest tautologią *KRZ*. Dowody mają postać drzew, co zostanie zilustrowane przykładami, a następnie opisane w sposób w miarę ścisły.

Uwaga terminologiczna: Metoda tabel analitycznych jest też znana pod następującymi nazwami: metoda drzew semantycznych, metoda tablic analitycznych, metoda tablic semantycznych, metoda tablic Smullyana.

Intuicyjny opis metody

Dla ułatwienia wprowadza się dwa oznaczenia prawdziwościowe, T (od angielskiego *True*, prawdziwy) i F (od angielskiego *False*, fałszywy).

Z podobnego powodu wprowadza się tzw. formuły sygnowane.

Definicja 1. (formuły sygnowane)

(i) *Jeżeli A jest formułą, to* T*A i* F*A są formułami sygnowanymi*.

(ii) *Nie ma żadnych innych formuł sygnowanych poza tymi, które można utworzyć przy pomocy warunku* (i).

Zauważmy, że formuł sygnowanych nie można ani łączyć spójnikami $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, ani negować za pomocą spójnika $\neg$.

Reguły są oparte na szeregu faktów semantycznych. Wyliczymy je po kolei (nawiasem mówiąc, użycie słowa „fakt” jest tutaj chwytem retorycznym: są to proste wnioski z definicji podanych na poprzednim wykładzie).

Fakt 1. *Dla każdego wartościowania* $\mathbf{v}$: *jeśli* $\mathbf{v}(\neg A) = \mathbf{1}$, *to* $\mathbf{v}(A) = \mathbf{0}$.

Fakt 2. *Dla każdego wartościowania* $\mathbf{v}$: *jeśli* $\mathbf{v}(\neg A) = \mathbf{0}$, *to* $\mathbf{v}(A) = \mathbf{1}$.

Wprowadzamy następujące reguły przekształcania formuł sygnowanych:

$\mathbf{r}_{\mathbf{1}\neg}$:

$$\frac{\mathrm{T}\neg A}{\mathrm{F}A}$$

$\mathbf{r}_{\mathbf{2}\neg}$:

$$\frac{\mathrm{F}\neg A}{\mathrm{T}A}$$

Przykład 1. Od $\mathrm{T}\neg(p \wedge q)$ możemy przejść do $\mathrm{F}(p \wedge q)$.

Przykład 2. Od $\mathrm{F}\neg(p \wedge q)$ możemy przejść do $\mathrm{T}(p \wedge q)$.

Fakt 3.

Dla każdego wartościowania $\mathbf{v}$: *jeśli* $\mathbf{v}(A \wedge B) = \mathbf{1}$, *to:* $\mathbf{v}(A) = \mathbf{1}$ *oraz* $\mathbf{v}(B) = \mathbf{1}$.

Fakt 4.

Dla każdego wartościowania $\mathbf{v}$: *jeśli* $\mathbf{v}(A \wedge B) = \mathbf{0}$, *to:* $\mathbf{v}(A) = \mathbf{0}$ *lub* $\mathbf{v}(B) = \mathbf{0}$.

$\mathbf{r1}_{\wedge}$:

$$\frac{\mathrm{T}(A \wedge B)}{\begin{array}{c}\mathrm{T}A \\ \mathrm{T}B\end{array}}$$

$\mathbf{r2}_{\wedge}$:

$$\frac{\mathrm{F}(A \wedge B)}{\mathrm{F}A \mid \mathrm{F}B}$$

Uwaga: Kreska pozioma | ma następujące znaczenie intuicyjne: zachodzi F*A* lub zachodzi F*B*. Gdy stosujemy regułę z kreską | w następniku, tabela ulega rozgałęzieniu. Reguły takie nazywamy *rozgałęziającymi* (ang. *branching rules*).

Przykład 3.

1 $T\neg(p \wedge q)$	
2 $F(p \wedge q)$ (1)	
3 Fp (2)	4 Fq (2)

Numer w nawiasie po prawej stronie wskazuje, z jakiej formuły dana formuła została otrzymana. Numery te umieszczamy dla wygody; nie są one elementami tabel. Podobnie numery po lewej stronie formuł nie są elementami tabel.

Przykład 4.

1 $F\neg(p \wedge q)$
2 $T(p \wedge q)$ (1)
3 Tp (2)
4 Tq (2)

Fakt 5.
Dla każdego wartościowania ***v***: *jeśli* $\mathbf{v}(A \vee B) = \mathbf{1}$, *to:* $\mathbf{v}(A) = \mathbf{1}$ *lub* $\mathbf{v}(B) = \mathbf{1}$.

Fakt 6.
Dla każdego wartościowania ***v***: *jeśli* $\mathbf{v}(A \vee B) = \mathbf{0}$, *to:* $\mathbf{v}(A) = \mathbf{0}$ *oraz* $\mathbf{v}(B) = \mathbf{0}$.

$\mathbf{r}_{1\vee}$:

$$\frac{\mathrm{T}(A \vee B)}{\mathrm{T}A \mid \mathrm{T}B}$$

$\mathbf{r}_{2\vee}$:

$$\frac{\mathrm{F}(A \vee B)}{\begin{array}{c}\mathrm{F}A \\ \mathrm{F}B\end{array}}$$

Fakt 7.

Dla każdego wartościowania $\boldsymbol{v}$: *jeśli* $\boldsymbol{v}(A \to B) = \mathbf{1}$, *to:* $\boldsymbol{v}(A) = \mathbf{0}$ *lub* $\boldsymbol{v}(B) = \mathbf{1}$.

Fakt 8.

Dla każdego wartościowania $\boldsymbol{v}$: *jeśli* $\boldsymbol{v}(A \to B) = \mathbf{0}$, *to:* $\boldsymbol{v}(A) = \mathbf{1}$ *oraz* $\boldsymbol{v}(B) = \mathbf{0}$.

$\mathbf{r}_{1\to}$: $$\frac{\mathrm{T}(A \to B)}{\mathrm{F}A \mid \mathrm{T}B}$$

$\mathbf{r}_{2\to}$: $$\frac{\mathrm{F}(A \to B)}{\begin{array}{c}\mathrm{T}A \\ \mathrm{F}B\end{array}}$$

$r_{1\neg}$:

$$\frac{\mathrm{T}\neg A}{\mathrm{F}A}$$

$r_{2\neg}$:

$$\frac{\mathrm{F}\neg A}{\mathrm{T}A}$$

$r_{1\wedge}$:

$$\frac{\mathrm{T}(A \wedge B)}{\begin{array}{l}\mathrm{T}A\\ \mathrm{T}B\end{array}}$$

$r_{2\wedge}$:

$$\frac{\mathrm{F}(A \wedge B)}{\mathrm{F}A \mid \mathrm{F}B}$$

$r_{1\vee}$:

$$\frac{\mathrm{T}(A \vee B)}{\mathrm{T}A \mid \mathrm{T}B}$$

$r_{2\vee}$:

$$\frac{\mathrm{F}(A \vee B)}{\begin{array}{l}\mathrm{F}A\\ \mathrm{F}B\end{array}}$$

$r_{1\rightarrow}$:

$$\frac{\mathrm{T}(A \rightarrow B)}{\mathrm{F}A \mid \mathrm{T}B}$$

$r_{2\rightarrow}$:

$$\frac{\mathrm{F}(A \rightarrow B)}{\begin{array}{l}\mathrm{T}A\\ \mathrm{F}B\end{array}}$$

Zanalizujmy teraz formułę: $(p \to q) \wedge p \to q$.

Analizę rozpoczynamy od poprzedzenia analizowanej formuły znakiem F, czyli utworzenia następującej formuły sygnowanej:

$$\mathrm{F}((p \to q) \wedge p \to q).$$

Teraz przekształcamy powyższą formułę stosując reguły. Otrzymujemy następującą tabelę analityczną:

<table>
<tr><td colspan="2">1 $\mathrm{F}((p \to q) \wedge p \to q)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">2 $\mathrm{T}((p \to q) \wedge p)$ (1)</td></tr>
<tr><td colspan="2">3 $\mathrm{F}q$ (1)</td></tr>
<tr><td colspan="2">4 $\mathrm{T}(p \to q)$ (2)</td></tr>
<tr><td colspan="2">5 $\mathrm{T}p$ (2)</td></tr>
<tr><td>6 $\mathrm{F}p$ (4)</td><td>7 $\mathrm{T}q$ (4)</td></tr>
</table>

Tabela ta ma dwie gałęzie:

1 $F((p \to q) \wedge p \to q)$	
2 $T((p \to q) \wedge p)$ (1)	
3 Fq (1)	
4 $T(p \to q)$ (2)	
5 Tp (2)	
6 Fp (4)	

1 $F((p \to q) \wedge p \to q)$	
2 $T((p \to q) \wedge p)$ (1)	
3 Fq (1)	
4 $T(p \to q)$ (2)	
5 Tp (2)	
	7 Tq (4)

Zauważmy, że na każdej gałęzi występuje para sprzecznych formuł sygnowanych: TB, FB, gdzie B jest formułą *KRZ*. Z drugiej strony, analizowana formuła $(p \to q) \wedge p \to q$ jest tautologią *KRZ*.

Teraz zanalizujmy formułę: $(p \to q) \wedge p \to \neg q$. Nie jest ona tautologią *KRZ*. Budujemy tabelę analityczną dla tej formuły:

1 $\mathrm{F}((p \to q) \wedge p \to \neg q)$	
2 $\mathrm{T}((p \to q) \wedge p)$ (1)	
3 $\mathrm{F}\neg q$ (1)	
4 $\mathrm{T}(p \to q)$ (2)	
5 $\mathrm{T}p$ (2)	
6 $\mathrm{F}p$ (4)	7 $\mathrm{T}q$ (4)

Na lewej gałęzi występuje para: Tp, Fp. Jednakże na prawej gałęzi nie ma żadnej pary sprzecznych formuł sygnowanych, tj. żadnej pary TB, FB.

Zauważmy przy okazji, że gdy $\boldsymbol{v}(p)$ = **1** oraz $v(q)$ = **1**, analizowana formuła ma wartość **0**.

Zanalizujmy teraz formułę $(p \to q) \wedge q \to p$. Również ta formuła nie jest tautologią *KRZ*. Dla uproszczenia pominiemy numerowanie.

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">F$((p \to q) \wedge q \to p)$</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">T$((p \to q) \wedge q)$</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Fp</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">T$(p \to q)$</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Tq</td></tr>
<tr><td align="center">Fp</td><td align="center">Tq</td></tr>
</table>

W tym przypadku na żadnej gałęzi nie występuje para sprzecznych formuł sygnowanych.

Można łatwo pokazać, że formuła $(p \to q) \wedge q \to p$ przyjmuje wartość **0** przy każdym wartościowaniu ***v*** takim, że ***v***(p) = **0** oraz ***v***(q) = **1**. Z drugiej strony, fakt ten można „odczytać" z powyższej tabeli analitycznej.

Zanalizujmy teraz formuły $p \wedge q \to p$ oraz $p \to p \vee q$.

F$(p \wedge q \to p)$
T$(p \wedge q)$
Fp
Tp
Tq

F$(p \to p \vee q)$
Tp
F$(p \vee q)$
Fp
Fq

Ponieważ nie stosowaliśmy reguł rozgałęziających (nie było takiej potrzeby ani możliwości), każda z powyższych tabel ma tylko jedną gałąź. Jednocześnie na gałęzi tej występuje para sprzecznych formuł sygnowanych. Z drugiej strony, obie analizowane formuły są tautologiami *KRZ*.

Można zapytać: czy zawsze jest tak, że gdy na wszystkich gałęziach tabeli analitycznej dla formuły występują sprzeczne formuły sygnowane (tj. formuły postaci: T*B*, F*B*)), to analizowana formuła jest tautologią *KRZ*? Odpowiedź na to pytanie jest twierdząca. Ponieważ nie zdefiniowaliśmy jeszcze pojęcia tabeli analitycznej, jest za wcześnie, aby to udowodnić. Można jednak na przykładach wyjaśnić, dlaczego tak jest. Weźmy:

F($p \wedge q \to p$)	[1. *istnieje wartościowanie* ***v*** *takie, że* ***v***($p \wedge q \to p$) = **0**]
T($p \wedge q$)	[2. *z* (1) *otrzymujemy* ***v***($p \wedge q$) = **1**]
Fp	[3. *a ponadto z* (1) *dostajemy* ***v***(p) = **0**]
Tp	[4. *jednakże* z (2) *otrzymujemy* ***v***(p) = **1**]
Tq	[4'. *a ponadto* ***v***(q) = **1**, *co zresztą jest nieistotne*]
	[5. *z* (4) *dostajemy*: $\neg$(***v***(p) = **0**)]
	zatem (1) *prowadzi nas do sprzeczności*
	([6. *tak więc nie ma takiego wartościowania* ***v***, przy *którym* ***v***($p \wedge q \to p$) = **0**, *czyli analizowana formuła jest tautologią*]

Intuicyjny opis metody

W przypadku tabel analitycznych o wielu gałęziach sytuacja jest podobna. Weźmy:

$F((p \to q) \wedge p \to q)$	[1. istnieje wartościowanie $\boldsymbol{v}$ takie, że $\boldsymbol{v}((p \to q) \wedge p \to q) = \mathbf{0}$]
$T((p \to q) \wedge p)$	[2. z (1) dostajemy $\boldsymbol{v}((p \to q) \wedge p) = \mathbf{1}$]
Fq	[3. z (1) dostajemy $\boldsymbol{v}(q) = \mathbf{0}$]
$T(p \to q)$	[4. z (2) mamy $\boldsymbol{v}(p \to q) = \mathbf{1}$]
Tp	[5. z (2) mamy też $\boldsymbol{v}(p) = \mathbf{1}$)]
$Fp \mid Tq$	[6. z (4) wnosimy, że $\boldsymbol{v}(p) = \mathbf{0}$ lub $\boldsymbol{v}(q) = \mathbf{1}$]

[7’. załóżmy, że $\boldsymbol{v}(p) = \mathbf{0}$]	[7’’. załóżmy, że $\boldsymbol{v}(q) = \mathbf{1}$)
(8’. wówczas $\neg\boldsymbol{v}(p) = \mathbf{1}$]	[8’’. wówczas $\neg\boldsymbol{v}(q) = \mathbf{0}$]
sprzeczność 8’ z 5	sprzeczność 8’’ z 3

W obrębie metody tabel analitycznych dowodem formuły *A* nazywamy taką tabelę analityczną dla formuły sygnowanej F*A*, że na każdej gałęzi tej tabeli występuje co najmniej jedna para sprzecznych formuł sygnowanych, tj. co najmniej jedna para postaci F*B*, T*B*.

Jeżeli formuła *A* ma (rozumiany w powyższy sposób) dowód, to formuła *A* jest tautologią *KRZ*.

Tak więc tylko tautologie posiadają dowody rozumiane w powyższy sposób.

Są to wyjaśnienia wstępne. Zanim sprecyzujemy odpowiednie pojęcia, zwrócimy jeszcze uwagę, że niektóre formuły (tautologie) mogą mieć wiele dowodów. Podobnie dla niektórych formuł sygnowanych istnieje wiele tabel analitycznych.

Przykład 5. Dowód formuły $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ metodą tabel analitycznych.

<table>
<tr><td colspan="6">1 $F((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$</td></tr>
<tr><td colspan="6">2 $T(p \to (q \to r))$ (1)</td></tr>
<tr><td colspan="6">3 $F((p \to q) \to (p \to r))$ (1)</td></tr>
<tr><td colspan="2">4 Fp (2)</td><td colspan="4">5 $T(q \to r)$ (2)</td></tr>
<tr><td colspan="2">6 $T(p \to q)$ (3)</td><td colspan="4">8 $T(p \to q)$ (3)</td></tr>
<tr><td colspan="2">7 $F(p \to r)$ (3)</td><td colspan="4">9 $F(p \to r)$ (3)</td></tr>
<tr><td>10 Fp (6)</td><td>11 Tq (6)</td><td colspan="2">16 Fq (5)</td><td colspan="2">17 Tr (5)</td></tr>
<tr><td>12 Tp (7)</td><td>14 Tp (7)</td><td>18 Fp (8)</td><td>19 Tq (8)</td><td>20 Fp (8)</td><td>21 Tq (8)</td></tr>
<tr><td>13 Fr (7)</td><td>15 Fr (7)</td><td>22 Tp (9)</td><td>24 Tp (9)</td><td>26 Tp (9)</td><td>28 Tp (9)</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>23 Fr (9)</td><td>25 Fr (9)</td><td>27 Fr (9)</td><td>29 Fr (9)</td></tr>
</table>

Komentarz: Przyjęto zasadę, że rezultaty zastosowania reguły do (wystąpienia) formuły powyżej punktu rozgałęzienia („węzła”) pojawiają się niżej na wszystkich gałęziach poniżej punktu rozgałęzienia.

Przykład dowodu

Przykład 6. Alternatywny dowód formuły $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ metodą tabel analitycznych. Dowód zbudowano zgodnie z heurystyką „stosuj reguły rozgałęziające najpóźniej jak to możliwe”.

<table>
<tr><td colspan="5">1 $F((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$</td></tr>
<tr><td colspan="5">2 $T(p \to (q \to r))$ (1)</td></tr>
<tr><td colspan="5">3 $F((p \to q) \to (p \to r))$ (1)</td></tr>
<tr><td colspan="5">4 $T(p \to q)$ (3)</td></tr>
<tr><td colspan="5">5 $F(p \to r)$ (3)</td></tr>
<tr><td colspan="5">6 Tp (5)</td></tr>
<tr><td colspan="5">7 Fr (5)</td></tr>
<tr><td>8 Fp (2)</td><td colspan="4">9 $T(q \to r)$ (2)</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">10 Fp (4)</td><td colspan="2">11 Tq (4)</td></tr>
<tr><td></td><td>12 Fq (9)</td><td>13 Tr (9)</td><td>14 Fq (9)</td><td>15 Tr (9)</td></tr>
</table>

Komentarz: Tym razem nie przyjęto zasady z poprzedniego przykładu (wynik zastosowania reguły do formuły sygnowanej 4 nie pojawia się na lewej gałęzi).

Diagram dowodu

- $\mathrm{F}((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$
  - $\mathrm{T}(p \to (q \to r))$
    - $\mathrm{F}((p \to q) \to (p \to r))$
      - $\mathrm{T}(p \to q)$
        - $\mathrm{F}(p \to r))$
          - $\mathrm{T}p$
            - $\mathrm{F}r$
              - $\mathrm{F}p$
              - $\mathrm{T}(q \to r)$
                - $\mathrm{F}p$
                  - $\mathrm{F}q$
                  - $\mathrm{T}r$
                - $\mathrm{T}q$
                  - $\mathrm{F}q$
                  - $\mathrm{T}r$

Diagram dowodu

$$\mathrm{F}((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$$
$$\mathrm{T}(p \to (q \to r))$$
$$\mathrm{F}((p \to q) \to (p \to r))$$
$$\mathrm{T}(p \to q)$$
$$\mathrm{F}(p \to r))$$
$$\mathrm{T}p$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathrm{F}r \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & & \\
\mathrm{F}p & & \mathrm{T}(q \to r) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
 & \mathrm{F}p \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & & \mathrm{T}q \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & \mathrm{F}q & \mathrm{T}r & \mathrm{F}q & \mathrm{T}r
\end{tikzcd}$$

W miarę potrzeby taki uproszczony diagram można uzupełnić o informacje dotyczące „genezy” odpowiednich formuł sygnowanych.

Warto wiedzieć...

Komentarze w sprawie praktycznego stosowania metody: zapraszam na wykład :)

Quiz 1: Jak budować dowody formuł o schemacie $A \leftrightarrow B$?

Należy zbudować dwie tabele, dla $A \rightarrow B$, oraz dla $B \rightarrow A$.

Quiz 2: Czy przedstawiona metoda jest przydatna tylko dla rozwiązywania zagadnień typu „*Czy formuła A jest tautologią KRZ*?"

Nie. Można za jej pomocą rozwiązywać również zagadnienia typu: „Czy formuła B wynika logicznie na gruncie *KRZ* ze skończonego zbioru formuł $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$?".

Przypomnijmy:

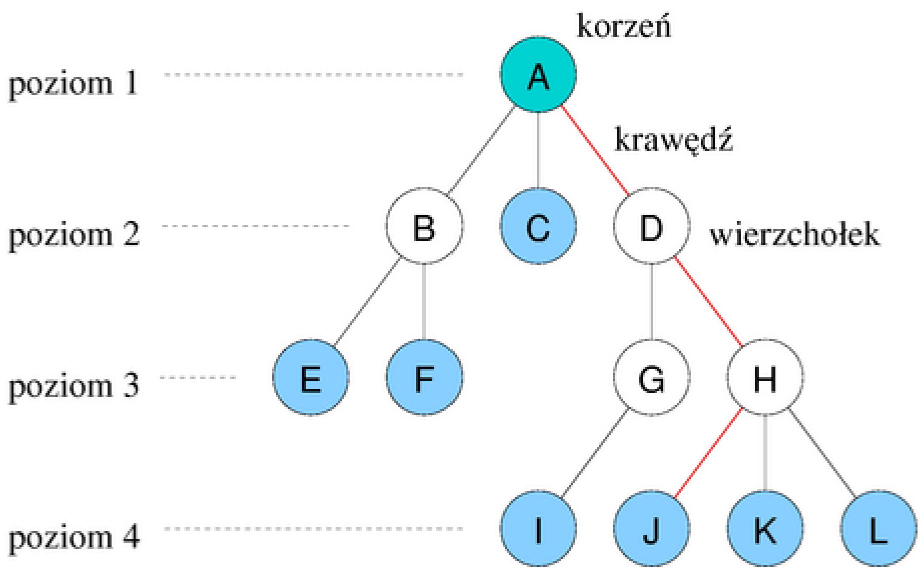
Twierdzenie 3. $\{A_1, A_2, ..., A_n\} \models_{KRZ} B$ *wtw*

formuła $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n \rightarrow B$ *jest tautologią KRZ*.

Quiz 3: Dlaczego tabele analityczne są analityczne?

Ponieważ w miarę stosowania reguł eliminowane są wystąpienia spójników, a pojawiające się (w zasięgu oznaczeń prawdziwościowych) formuły są podformułami formuły wyjściowej.

W matematyce wprowadza się czasami pojęcie drzewa. Tabele analityczne można ściśle zdefiniować jako szczególnego rodzaju drzewa.



Zdefiniujemy tutaj (na jeden z możliwych sposobów !) tylko pewne drzewa szczególnego rodzaju: tzw. uporządkowane drzewa binarne. Trzeba jednak pamiętać, że oprócz (uporządkowanych) drzew binarnych istnieją również inne drzewa w matematycznym sensie tego terminu (przy czym teoriomnogościowe pojęcie drzewa nie jest identyczne z pojęciem drzewa występującym w teorii grafów). Tabele analityczne dla *KRZ* określimy następnie jako drzewa spełniające podane warunki. Podana definicja nie będzie w pełni ścisła; jest jednak za wcześnie, aby zachowywać wszelkie Wysokie Standardy.

Definicja 1. *Mianem* **binarnego drzewa nieuporządkowanego** *będziemy nazywali dowolną trójkę uporządkowaną* $D = \langle Z, f, P \rangle$, *gdzie Z jest niepustym zbiorem, którego elementy nazywamy* węzłami, *f jest funkcją przyporządkowującą każdemu elementowi x* zbioru *Z liczbę całkowitą dodatnią* (*wartość funkcji f dla argumentu x będziemy nazywać* poziomem *x*-a), *natomiast P jest dwuczłonową relacją określoną na zbiorze Z* (x*Py czytamy „x* jest bezpośrednim poprzednikiem *y” lub ”y jest* bezpośrednim następnikiem *x*”), *która spełnia następujące warunki:*

a) *istnieje dokładnie jeden węzeł poziomu* 1; *węzeł ten będziemy nazywać* korzeniem *drzewa*;
b) *każdy węzeł nie będący korzeniem ma dokładnie jeden bezpośredni poprzednik*;
c) *każdy węzeł ma co najwyżej dwa bezpośrednie następniki*;
d) *dla dowolnych elementów x*, *y zbioru Z*: *jeśli y jest bezpośrednim następnikiem x*, *to* $f(y)=f(x)+1$.

Definicja 2. Prostym węzłem *będziemy nazywać węzeł, który ma dokładnie jeden bezpośredni następnik, a* węzłem rozgałęzionym *- węzeł posiadający dwa bezpośrednie następniki. Węzeł, który nie ma żadnych bezpośrednich następników nazywamy* liściem.

Definicja 3. *Przez* gałąź *binarnego drzewa nieuporządkowanego będziemy rozumieć niepusty ciąg węzłów, którego pierwszym elementem jest korzeń, każdy kolejny element jest bezpośrednim następnikiem poprzedniego i ostatni element ciągu – jeśli takowy istnieje - jest liściem.*

Definicja 4. *Mianem* binarnego drzewa uporządkowanego *będziemy nazywali parę uporządkowaną* ***D*** = <*D*, *h*> *taką, że D jest binarnym drzewem nieuporządkowanym, a h* jest funkcją, *która przyporządkowuje każdemu węzłowi rozgałęzionemu x drzewa D ciąg dwuelementowy h*(*x*), *nie zawierający powtórzeń, którego wyrazami są bezpośrednie następniki x-a, nazywane odpowiednio* *prawym* *i* *lewym*. *Węzłami i gałęziami drzewa uporządkowanego* <*D*, *h*> *są węzły i gałęzie drzewa D*.

Pod pojęciem reguł rozumiem dalej reguły wprowadzone wcześniej na tym wykładzie, tj.: **$r1_{\neg}$, $r2_{\neg}$, $r1_{\wedge}$, $r2_{\wedge}$, $r1_{\vee}$, $r2_{\vee}$, $r1_{\rightarrow}$, $r2_{\rightarrow}$.** Pewne z nich są regułami rozgałęziającymi, a pewne nie.

$r1_{\neg}$:

$$\frac{\mathrm{T}\neg A}{\mathrm{F}A}$$

$r2_{\neg}$:

$$\frac{\mathrm{F}\neg A}{\mathrm{T}A}$$

$r1_{\wedge}$:

$$\frac{\mathrm{T}(A \wedge B)}{\begin{array}{c}\mathrm{T}A\\ \mathrm{T}B\end{array}}$$

$r2_{\wedge}$:

$$\frac{\mathrm{F}(A \wedge B)}{\mathrm{F}A \mid \mathrm{F}B}$$

$r1_{\vee}$:

$$\frac{\mathrm{T}(A \vee B)}{\mathrm{T}A \mid \mathrm{T}B}$$

$r2_{\vee}$:

$$\frac{\mathrm{F}(A \vee B)}{\begin{array}{c}\mathrm{F}A\\ \mathrm{F}B\end{array}}$$

$r1_{\rightarrow}$:

$$\frac{\mathrm{T}(A \rightarrow B)}{\mathrm{F}A \mid \mathrm{T}B}$$

$r2_{\rightarrow}$:

$$\frac{\mathrm{F}(A \rightarrow B)}{\begin{array}{c}\mathrm{T}A\\ \mathrm{F}B\end{array}}$$

Definicja 5. Tabelą analityczną dla formuły *A jest dowolne binarne drzewo uporządkowane, którego węzłami są wystąpienia formuł sygnowanych, konstruowane następująco:*

1. Rozpoczynamy konstrukcję od budowy 1-elementowego drzewa, którego jedynym węzłem jest formuła sygnowana F*A; drzewo to jest tabelą analityczną dla A.*

2. Niech Δ *będzie już skonstruowaną tabelą dla A, niech* **g** *będzie gałęzią drzewa* Δ *i niech* Φ *będzie ostatnim wyrazem* **g***. Wówczas drzewo (uporządkowane) powstające z* Δ *poprzez*:

(a) *wprowadzenie, jako bezpośredniego następnika* Φ, *formuły sygnowanej, którą można otrzymać poprzez zastosowanie reguły nierozgałęziającej do pewnej formuły sygnowanej będącej wyrazem* **g**, *lub*

(b) *wprowadzenie, jako bezpośrednich następników* Φ (*odpowiednio, prawego i lewego*), *formuł sygnowanych, które można otrzymać poprzez zastosowanie reguły rozgałęziającej do pewnej formuły będącej wyrazem* **g**

jest tabelą analityczną dla formuły A.

Komentarz: Podana definicja nie jest precyzyjna, i to z wielu powodów. Aby ją uściślić, należałoby zdefiniować m.in. pojęcia: „wprowadzenia jako następnika” oraz „zastosowania reguły”. Z oczywistych względów nie pójdę tu jednak tak daleko :)

Gałęzie tabeli analitycznej możemy teraz utożsamić z gałęziami odpowiedniego drzewa.

Definicja 6. *Gałąź* **g** *tabeli analitycznej nazywamy* zamkniętą *wtw istnieje taka formuła B*, *że wystąpienia formuł sygnowanych* F*B*, T*B są wyrazami gałęzi* **g**; *w przeciwnym przypadku mówimy, że gałąź* **g** *jest* otwarta.

Teraz możemy uściślić pojęcie dowodu:

Definicja 7. Dowodem *formuły A jest dowolna tabela analityczna dla formuły A taka, że każda gałąź tej tabeli jest zamknięta.*

Prawdziwe jest:

Twierdzenie 1. *Jeśli formuła A posiada dowód, to formuła A jest tautologią KRZ.*

Szkic dowodu: Wprowadźmy pewne pojęcie pomocnicze.

Mówimy, że wartościowanie ***v*** jest *zgodne* z formułą sygnowaną F*A* (formułą sygnowaną T*A*) wtw ***v***(*A*) = **0** (***v***(*A*) = **1**). Mamy:

(**I**): *Jeśli formuła sygnowana* Ψ *powstaje z formuły sygnowanej* Φ *poprzez zastosowanie reguły nierozgałęziającej oraz wartościowanie* ***v*** *jest zgodne z* Φ, *to* ***v*** *jest zgodne z* Ψ.

(**II**): *Jeśli formuły sygnowane* Ψ_1, Ψ_2 *powstają z formuły sygnowanej* Φ *poprzez zastosowanie reguły rozgałęziającej oraz wartościowanie* ***v*** *jest zgodne z* Φ, *to* ***v*** *jest zgodne z* Ψ_1 *lub* ***v*** *jest zgodne z* Ψ_2.

Załóżmy, że formuła *A* nie jest tautologią. Wówczas *istnieje* wartościowanie zgodne z F*A*. Przypuśćmy, że *A* ma dowód. Z uwagi na zależności (**I**) i (**II**) jest oczywiste, że istnieje wówczas co najmniej jedna gałąź tego dowodu taka, że wartościowanie ***v*** jest zgodne z wszystkimi formułami sygnowanymi występującymi na tej gałęzi. Ponieważ jednak jest to dowód, to każda gałąź jest zamknięta. Tak więc istnieje formuła *B* taka, że ***v***(*B*) = **1** oraz ***v***(*B*) = **0**. Skoro jednak ***v*** jest wartościowaniem, taka sytuacja jest wykluczona. Otrzymaliśmy zatem sprzeczność. Tak więc jeśli formuła *A* nie jest tautologią, to nie ma dowodu. Wynika stąd, że gdy formuła *A* ma dowód, to jest ona tautologią. Co należało wykazać :)

Prawdziwe jest także następujące twierdzenie o pełności:

Twierdzenie 2. *Jeżeli formuła jest tautologią KRZ, to ma ona dowód*.

Szkic dowodu: Niech *A* będzie formułą języka *KRZ*. Wystarczy udowodnić, że gdy formuła *A* nie ma dowodu, to *A* nie jest tautologią.

Gdy *A* nie ma dowodu, to każda tabela analityczna dla *A* jest otwarta, tj. co najmniej jedna gałąź tej tabeli jest otwarta.

Rozważmy teraz tabelę analityczną **t** dla *A* zbudowaną zgodnie z następującymi zasadami:

(1) *dla każdej gałęzi* **g** *tabeli* **t**, *dla każdej formuły sygnowanej* $*B* *występującej na gałęzi* **g**: *jeżeli jakaś reguła nierozgałęziająca* **r** *jest stosowalna do* $*B*, *to na gałęzi* **g** *występują wszystkie formuły sygnowane, które możemy otrzymać z* $*B* *za pomocą reguły* **r**;

(2) *dla każdej gałęzi* **g** *tabeli* **t**, *dla każdej formuły sygnowanej* $*B* *występującej na gałęzi* **g**: *jeżeli jakaś reguła rozgałęziająca jest stosowalna do* $*B*, *to na gałęzi* **g** *występuje któraś z formuł sygnowanych, dająca się otrzymać z* $*B* *za pomocą reguły* **r**.

[Symbol $ reprezentuje dowolne oznaczenie prawdziwościowe.]

Niech **g*** będzie gałęzią otwartą tabeli **t**. Jest oczywiste, że na gałęzi **g*** występują (jakieś) *literały*, tj. formuły sygnowane postaci Tp_i lub Fp_i, gdzie p_i jest zmienną zdaniową. Jest niemniej oczywiste, że nie ma takiej zmiennej p_j, że Tp_j oraz Fp_j występują na gałęzi **g***.

Wnosimy stąd, że istnieje wartościowanie ***v***, które jest zgodne z każdym literałem występującym na gałęzi **g***.

Teraz należy pokazać, że wartościowanie ***v*** jest zgodne z każdą formułą sygnowaną występującą na gałęzi **g***.

W tym celu potrzebujemy jednak technicznego pojęcia stopnia złożoności formuły sygnowanej $\$B$, symbolicznie **deg**($\$B$). W istocie **deg**($\$B$) jest miarą liczby wystąpień spójników w formule *B.*

Definicja jest indukcyjna:

(a) **deg**($\$p_i$) = 0;

(b) **deg**($\$\neg C$) = **deg**($\$C$) + 1;

(c) **deg**($\$(C_1 \otimes C_2)$) = **deg**($\$C_1$) + **deg**($\$C_2$) + 1.

[Znak $\otimes$ reprezentuje spójniki dwuargumentowe *KRZ.*]

Jest oczywiste, że gdy $\$B$ jest występującą na gałęzi **g*** formułą sygnowaną taką, że **deg**($\$B$) = 0 (tj. gdy $\$B$ jest literałem), to wartościowanie ***v*** jest zgodne z $\$B$.

Niech $\$B$ będzie formułą sygnowaną występującą na gałęzi **g*** taką, że deg($\$B$) = n, gdzie $n > 0$. Chcemy pokazać, że wartościowanie ***v*** jest zgodne z rozważaną formułą sygnowaną $\$B$. Załóżmy (jest to tzw. założenie indukcyjne), że:

(3) *dla dowolnej formuły sygnowanej* $\$C$ (*występującej na gałęzi* **g***) *takiej, że* **deg**($\$C$) < n, *wartościowanie* ***v*** *jest zgodne z* $\$C$.

Inspekcja reguł pokazuje nam, że zachodzi:

(4) *jeżeli formułę sygnowaną* $\$C$ *można otrzymać z formuły sygnowanej* $\$B$ *za pomocą reguły*, *to* **deg**($\$C$) < **deg**($\$B$).

r1¬: $\dfrac{T\neg A}{FA}$ **r2¬**: $\dfrac{F\neg A}{TA}$ **r1∧**: $\dfrac{T(A \wedge B)}{\begin{matrix} TA \\ TB \end{matrix}}$ **r2∧**: $\dfrac{F(A \wedge B)}{FA \mid FB}$

$r_{1\vee}$:

$$\frac{T(A \vee B)}{TA \mid TB}$$

$r_{2\vee}$:

$$\frac{F(A \vee B)}{\begin{matrix} FA \\ FB \end{matrix}}$$

$r_{1\to}$:

$$\frac{T(A \to B)}{FA \mid TB}$$

$r_{2\to}$:

$$\frac{F(A \to B)}{\begin{matrix} TA \\ FB \end{matrix}}$$

(5) *jeżeli formułę sygnowaną $\$C$ można otrzymać z formuły sygnowanej $\$B$ za pomocą reguły* **$r_{1\neg}$** *lub reguły* **$r_{2\neg}$***, a ponadto wartościowanie* ***v*** *jest zgodne z $\$C$, to wartościowanie* ***v*** *jest zgodne z $\$B$*;

(6) *jeżeli formuły sygnowane $\$C_1$* i *$\$C_2$ można otrzymać z formuły sygnowanej $\$B$ za pomocą reguły nierozgałęziającej różnej od* **$r_{1\neg}$** *i* **$r_{2\neg}$***, a ponadto wartościowanie* ***v*** *jest zgodne z formułami sygnowanymi $\$C_1$* i *$\$C_2$, to wartościowanie* ***v*** *jest zgodne z formułą sygnowaną $\$B$*;

(7) *jeżeli formułę sygnowaną $\$C$ można otrzymać z formuły sygnowanej $\$B$ za pomocą reguły rozgałęziającej, a ponadto wartościowanie* ***v*** *jest zgodne z $\$C$, to wartościowanie* ***v*** *jest zgodne z $\$B$*.

Innymi słowy, jeśli wartościowanie ***v*** jest zgodne z odpowiednimi formułami „pochodnymi”, to jest też ono zgodne z formułą „wyjściową”.

Rozważana tabela analityczna **t** spełnia warunki (1) i (2), tj.

(1) *dla każdej gałęzi* **g** *tabeli* **t**, *dla każdej formuły sygnowanej* $\$B$ *występującej na gałęzi* **g**: *jeżeli jakaś reguła nierozgałęziająca* **r** *jest stosowalna do* $\$B$, *to na gałęzi* **g** *występują wszystkie formuły sygnowane, które możemy otrzymać z* $\$B$ *za pomocą reguły* **r**;

(2) *dla każdej gałęzi* **g** *tabeli* **t**, *dla każdej formuły sygnowanej* $\$B$ *występującej na gałęzi* **g**: *jeżeli jakaś reguła rozgałęziająca jest stosowalna do* $\$B$, *to na gałęzi* **g** *występuje którąś z formuł sygnowanych, dająca się otrzymać z* $\$B$ *za pomocą reguły* **r**.

Na mocy założenia indukcyjnego (4), wartościowanie ***v*** jest zgodne z występującymi na gałęzi „pochodnymi" rozważanej formuły sygnowanej $\$B$. Z zależności (5), (6) i (7) wnosimy zatem, że wartościowanie ***v*** jest zgodne z rozważaną formułą $\$B$ - o której to formule założyliśmy, że **deg**($\$B$) = n.

Tak więc dla każdego $n \geq 0$, jeśli $\$B$ jest formuła sygnowaną występującą na gałęzi **g*** taką, że **deg**($\$B$) = n, to wartościowanie ***v*** jest zgodne z $\$B$.

Wnosimy stąd, że wartościowanie ***v*** jest zgodne z każdą formuła sygnowaną występującą na gałęzi **g***.

A zatem także z „pierwszą" formuła sygnowaną tej gałęzi, tj. z FA.

To jednak znaczy, że ***v***(A) = **0**, czyli formuła A nie jest tautologią.

Czego należało dowieść :)

A co gdy nie lubimy oznaczeń prawdziwościowych?

Odpowiedź na tytułowe pytanie jest prosta: budujemy system tabel analitycznych dla *KRZ*, w którym reguły operują wprost na formułach *KRZ*. Reguły są następujące:

r$_{\neg}$:

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

r$_{\wedge}$:

$$\frac{A \wedge B}{\begin{array}{c} A \\ B \end{array}}$$

r$_{\neg\vee}$:

$$\frac{\neg(A \vee B)}{\begin{array}{c} \neg A \\ \neg B \end{array}}$$

r$_{\neg\rightarrow}$:

$$\frac{\neg(A \rightarrow B)}{\begin{array}{c} A \\ \neg B \end{array}}$$

r$_{\vee}$:

$$\frac{A \vee B}{A \mid B}$$

r$_{\neg\wedge}$:

$$\frac{\neg(A \wedge B)}{\neg A \mid \neg B}$$

r$_{\rightarrow}$:

$$\frac{A \rightarrow B}{\neg A \mid B}$$

Tabelę analityczną dla formuły A budujemy teraz zaczynając od formuły $\neg A$. Tabelę uważamy za dowód wówczas, gdy na każdej gałęzi występuje zarówno formuła, jak i jej negacja.

Wprowadźmy następujące skróty:

α	α_1	α_2		β	β_1	β_2
$A \wedge B$	A	B		$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$
$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$		$A \vee B$	A	B
$\neg(A \rightarrow B)$	A	$\neg B$		$A \rightarrow B$	$\neg A$	B

Reguły systemu możemy teraz zapisać tak:

$\mathbf{r}_{\neg\neg}$: $$\frac{\neg\neg A}{A}$$

$\mathbf{r}_{\alpha}$: $$\frac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array}}$$

$\mathbf{r}_{\beta}$: $$\frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$$

Matematyczne pojęcie jest definiowane rozmaicie (przy czym nie wszystkie definicje są równoważne). Oto przykłady kolejnych definicji:

I: Niech X będzie zbiorem, natomiast $\leq$ będzie relacją binarną w X taką, że $\leq$ jest zarazem zwrotna, antysymetryczna i przechodnia w X. Parę uporządkowaną $<X, R>$ nazywamy *zbiorem uporządkowanym*. [1]

Element $x_0 \in X$ nazywamy *maksymalnym* wtw nie istnieje $y \in X$ takie, że:

$$x_0 \leq y \text{ oraz } x_0 \neq y.$$

Drzewem jest zbiór uporządkowany $<X, \leq>$ posiadający dokładnie jeden element maksymalny, x_0, taki, że dla dowolnego elementu $x_n \in X$ istnieje dokładnie jeden łańcuch $x_n \leq x_{n\text{-}1} \leq .... \leq x_1 \leq x_0$ elementów X. Elementy X nazywamy *węzłami*, x_0 nosi nazwę *korzenia*. [Zamiast R (jak na pierwszym wykładzie) piszemy teraz $\leq$ - co jest po prostu zmianą konwencji notacyjnej, niczym więcej.]

---

[1] Czasami mówi się inaczej: jest to zbiór *częściowo uporządkowany* lub po prostu *częściowy porządek*. Aby przybliżyć intuicje, zauważmy, że można wprowadzić definicyjnie relację **<**:

$$x < y \text{ wtw } x \leq y \text{ oraz } x \neq y, \text{ dla dowolnych } x, y \in X$$

i taka relacja będzie przeciwzrotna i przechodnia w X, a więc również przeciwsymetryczna w X.

A oto inna definicja pojęcia drzewa:

II: Parę uporządkowaną <X, σ> nazywamy *drzewem o korzeniu* x wtw X jest niepustym zbiorem, σ jest przechodnią i przeciwsymetryczną relacją binarną w X, x jest jedynym elementem σ-minimalnym w X, oraz dla każdego $y \in X / \{x\}$ istnieje dokładnie jeden bezpośredni σ-poprzednik.

x jest *elementem σ-minimalnym* w X wtw

(i) $x \in X$,

(ii) $\neg\exists y \in X\ (y\sigma x)$, oraz

(iii) $\forall y \in X\ (x = y \vee x\sigma y)$

x jest *bezpośrednim* σ-*poprzednikiem* y wtw

(iv) $x\sigma y$,

(v) $x \neq y$, oraz

(vi) $\forall z \in X\ (x\sigma z \wedge z\sigma y \rightarrow z = y \vee z = x)$.

Literatura:

Chociaż metoda tabel analitycznych dla *KRZ* jest bardzo wygodna w użyciu, w dostępnych po polsku podręcznikach logiki jest ona zwykle omawiana w sposób zdawkowy (jeśli w ogóle). Trochę więcej informacji (i przykładów) zawierają pozycje:

[1] Mordechai Ben-Ari, *Logika matematyczna w informatyce*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2005.

[2] Kazimierz Trzęsicki, *Elementy logiki dla humanistów*, Warszawa 1994.

Klasyczną pozycją dla metody tabel analitycznych (nie tylko w KRZ) jest:

[3] Raymond Smullyan, *First-order Logic*, Springer, Berlin/ Heidelberg/ New York 1968.

Stosunkowo przyjazny wykład zawiera pozycja:

[4] Colin Howson, *Logic with Trees. An Introduction to Symbolic Logic*, Routledge, London/ New York 1997.

Ujęcie prezentowane na wykładzie różni się paroma szczegółami od występujących w powyższych pozycjach.

Metody tabelowe/tablicowe/drzew semantycznych to jedne z najczęściej stosowanych metod dowodowych w logice współczesnej.