

Spór o uniwersalia a spór o sposób istnienia przedmiotów matematycznych

Źródło: Roman Murawski: *Filozofia matematyki: Zarys dziejów*, Warszawa 2001, s. 176-181

Zanim jednak przystąpimy do właściwych rozważań, zauważmy, że słowo "zbiór" ma w języku potocznym dwa wyraźnie różne znaczenia, określane odpowiednio jako znaczenie kolektywne i znaczenie dystrybutywne. W znaczeniu kolektywnym zbiór pewnych przedmiotów to całość złożona z tych przedmiotów. To znaczenie słowa "zbiór" mamy na myśli mówiąc, że biblioteka jest zbiorem książek, czy że łańcuch jest zbiorem ogniów. W tym znaczeniu zbiór konkretnych, zmysłowo postrzegalnych przedmiotów jest więc pewnym innym, konkretnym, zmysłowo postrzegalnym obiektem. Zwrot "x jest elementem zbioru A" znaczy tu tyle, co "x jest częścią zbioru A". Teoria zbiorów w sensie kolektywnym została skonstruowana przez logika polskiego Stanisława Leśniewskiego (1886-1939) i nazwana mereologią.

Drugie znaczenie słowa "zbiór" to znaczenie dystrybutywne. Przy tym znaczeniu zdanie "Wenus jest elementem zbioru planet Układu Słonecznego" znaczy tyle, co "Wenus jest planetą Układu Słonecznego", a zdanie "3 jest elementem zbioru liczb naturalnych" - tyle, co "3 jest liczbą naturalną". Zbiór w sensie dystrybutywnym nie musi być zatem zmysłowo postrzegalnym przedmiotem, nawet jeśli jego elementy są takimi przedmiotami.

Dwa opisane znaczenia są różne, o czym świadczy w szczególności fakt, że pewne zdania są prawdziwe przy jednym ze znaczeń słowa "zbiór", a fałszywe przy drugim. Weźmy dla przykładu zdanie: "Piąta część Wenus jest elementem zbioru planet Układu Słonecznego". Jest ono prawdziwe w przypadku kolektywnego sposobu pojmowania zbioru, a fałszywe w przypadku jego pojmowania w sposób dystrybutywny. Zauważmy, że relacja bycia elementem zbioru jest przechodnia przy kolektywnym rozumieniu słowa "zbiór", a nie jest taka przy rozumieniu dystrybutywnym. W. V. O. Quine pisze na temat tego rozróżnienia znaczeń słowa "zbiór" tak oto: "Fakt, że zbiory są bytami abstrakcyjnymi, jest niekiedy zaciemniany przez mówienie o zbiorach jako agregatach lub zbiorowiskach [a więc w sensie kolektywnym - uwaga moja, R. M.], przez co upodobia się na przykład zbiór kamieni do stosu kamieni. Stos jest rzeczywiście konkretnym przedmiotem, tak konkretnym, jak kamienie, które go tworzą; jednakże zbiór kamieni w stosie nie może być utożsamiony z tym stosem. Gdyby tak było, to inny zbiór mógłby być utożsamiony z tym samym stosem; mianowicie zbiór molekuł kamieni w stosie. Lecz w istocie zbiory te muszą być rozróżnione; chcemy bowiem powiedzieć, że jeden z nich ma na przykład sto elementów, podczas gdy drugi ma ich tryliony. Zbiory są więc przedmiotami abstrakcyjnymi" (*From a Logical Point of View*, s. 114; por. *Z punktu widzenia logiki*, s. 157).

Teoria mnogości zajmuje się zbiorami w sensie dystrybutywnym. Takie właśnie pojęcie zbioru jest przydatne w matematyce. Pojawia się tu jednak od razu pytanie, czy i jak istnieją zbiory w sensie dystrybutywnym. Okazuje się, że pytanie to ma wiele wspólnego ze znanym z historii filozofii sporem o uniwersalia (powszechniki).

Problem powszechników sformułowany został po raz pierwszy przez Platona. Sprowadza się on do pytania, co odpowiada pojęciom ogólnym, jak "prosta", "liczba" czy też "człowiek", "dobro", "piękno". Odpowiedzi, których udzielano, możemy podzielić na cztery grupy. Będą to jednocześnie cztery zasadnicze stanowiska w sporze o uniwersalia.

Platon może być uważany za twórcę realizmu skrajnego, głoszącego, że powszechniki istnieją samodzielnie i samoistnie, niezależnie od przedmiotów jednostkowych. W ontologii Platona powszechniki są ideami, a więc w szczególności obiektami zmysłowo niepoznawalnymi. Tak więc na przykład obok, czy lepiej: poza poszczególnymi ludźmi istnieje człowiek jako taki, człowiek w ogóle (u Platona - idea człowieka).

Stanowiskiem mniej skrajnym jest zapoczątkowany przez Arystotelesa realizm umiarkowany. Głosi on, że uniwersalia istnieją obiektywnie, ale nie samodzielnie, lecz jedynie jako własności

konkretnych jednostkowych przedmiotów. Zatem człowiek jako taki, człowiek w ogóle, to nie jakiś samodzielny byt, ale zespół istotnych cech wspólnych wszystkim ludziom i tylko im, a więc cech dla nich charakterystycznych.

Oba te stanowiska szukają uniwersaliów w rzeczywistości zewnętrznej wobec poznającego podmiotu. W średniowieczu pojawiła się w ramach filozofii chrześcijańskiej inna koncepcja, zwana konceptualizmem. Jej autorem jest Johannes Roscelin (ok. 1050-ok. 1120), zakonnik z Compiègne. Według tej koncepcji, uniwersalia istnieją tylko w umyśle ludzkim, są tylko pojęciami (stąd też nazwa owej teorii wywodzona od łacińskiego słowa *conceptus* - pojęcie). Nie istnieją więc rzeczywiste obiekty takie jak człowiek jako taki, czy prosta jako taka. Istnieją (w umyśle) tylko pojęcia "człowiek" i "prosta".

Jeszcze dalej poszedł Wilhelm Ockham (przed 1300-1349/1350). Jego stanowisko określa się jako nominalizm. Według niego, nie istnieją ani powszechniki, ani pojęcia ogólne - istnieją tylko przedmioty jednostkowe. Twierdzenie, że istnieje cokolwiek poza tymi ostatnimi, ma swe źródło w dezinterpretacji języka, którym się posługujemy. Zgodnie z tym nie istnieje ani człowiek jako taki, ani pojęcie człowieka, a jedynie nazwa ogólna "człowiek" (stąd też nazwa: nominalizm, wywodzona od łacińskiego *nominalis* - dotyczący imienia, nazwy).

Spór o powszechniki żywy był zwłaszcza w średniowieczu (w szczególności w związku z różnymi kwestiami teologicznymi), ale aktualny jest i dziś, choć w nieco zmienionej postaci. Kazimierz Ajdukiewicz pisze: "Współczesna postać tego zagadnienia wyraża się mianowicie w pytaniu, czy nauki aprioryczne, a więc takie nauki, jak na przykład matematyka, badają jakiś w pełni rzeczywisty, choć zupełnie od świata danego nam w doświadczeniu zmysłowym odrębny świat tzw. tworów idealnych, jak na przykład liczby, funkcje matematyczne itp., który istnieje w sposób zupełnie od naszego umysłu niezależny, czy też świat taki w ogóle nie istnieje" (*Zagadnienia i kierunki filozofii*, s. 124). Biorąc pod uwagę fakt, że wszystkie (występujące w chwili obecnej) pojęcia matematyczne dadzą się zdefiniować w terminach teorii mnogości, a zatem dadzą się w końcu sprowadzić do pojęcia zbioru, rozważane pytanie redukuje się do pytania o istnienie i o sposób istnienia zbiorów.

Trzy z wymienionych wyżej zasadniczych stanowisk w sporze o uniwersalia mają swe odpowiedniki wśród stanowisk w kwestii istnienia zbiorów. Określa się je jako platonizm, (neo)konceptualizm i (neo)nominalizm.

Podstawową tezę platonizmu jest twierdzenie, że istnieją wszystkie i tylko te przedmioty, które są niesprzeczne, że dla każdej poprawnie sformułowanej własności niesprzecznej istnieje zbiór dokładnie tych przedmiotów, które tę własność posiadają, i co więcej: zbiór ten jest odrębnym bytem istniejącym podobnie jak jego elementy, przy czym jego istnienie nie sprowadza się do istnienia jego elementów. Dla uniknięcia antynomii nakłada się czasem pewne ograniczenia na owe własności (jak to ma na przykład miejsce w aksjomacie wyróżniania w systemie Zermela-Fraenkla, o czym powiemy poniżej, czy w teorii typów - por. rozdział 11.1). Teoria mnogości, a w konsekwencji cała matematyka, staje się w ten sposób nauką o tych pełnoprawnych i samodzielnie istniejących obiektach i jej zadaniem jest opisanie tych właśnie przedmiotów (tak jak na przykład zadaniem zoologii jest opisanie świata zwierząt). Dodajmy jednak, że tezy platonizmu nie pociągają za sobą bynajmniej tego, iż zbiory utożsamiane muszą być z ideami w sensie Platona. Twierdzi się tylko, że są one obiektami istniejącymi podobnie jak należące do nich elementy, że istnieją nie tylko przedmioty jednostkowe, ale i różne od nich zbiory takich przedmiotów. Stanowisko to reprezentuje we współczesnej filozofii matematyki na przykład Kurt Gödel, który pisał: "Klasy i pojęcia mogą być pojmowane jako rzeczywiste obiekty istniejące niezależnie od naszych definicji i konstrukcji. (...) Wydaje mi się, że założenie istnienia takich obiektów jest tak samo uzasadnione jak przyjęcie istnienia ciał fizycznych, a jest przecież wiele racji, by przyjąć ich istnienie" (*Russell's Mathematical Logic*, s. 137).

Neokonceptualiści twierdzą, że istnieją tylko te zbiory, i ogólnie: obiekty matematyczne, które są konstruowalne, tzn. które można skonstruować ze zbiorów, których istnienie jest intuicyjnie oczywiste. Należy zatem odrzucić wszelkie aksjomaty postulujące istnienie obiektów nie dających się scharakteryzować konstruktywnie. A zatem stanowisko to jest ściśle związane we współczesnej filozofii matematyki z konstruktywizmem. Zauważmy tu jeszcze, że z punktu widzenia ontologii można wyróżnić trzy wersje konstruktywizmu: (1) obiektywistyczną, w której konstrukcje są traktowane jako twory

istniejące niezależnie od podmiotu, (2) mentalistyczną, w której konstrukcje uważane są za wytwory aktów myślowych osób uprawiających matematykę, oraz (3) finitystyczną, która dopuszcza tylko efektywne przekształcenia obiektów czasowo-przestrzennych (napisów). Stanowisko konceptualistyczne reprezentuje na przykład intuicjonizm (por. rozdział 11.2).

Trzecie wreszcie stanowisko to neonominalizm, który głosi, że istnieją tylko przedmioty jednostkowe i że wszelkie wypowiedzi o innych obiektach, na przykład o zbiorach, można zinterpretować jako wypowiedzi o indywiduach. Powstaje oczywiście pytanie o indywidua i ich istnienie. W związku z tym wyróżnia się neonominalizm formalny i neonominalizm merytoryczny. Przedstawicielem pierwszego jest na przykład N. Goodman, który tak go charakteryzuje: „[Nominalizm formalny] odrzuca zbiory jako byty trudne do zrozumienia, ale jako indywidua dopuszcza obiekty jednostkowe jakiegokolwiek natury. (...) Wymaga on tylko tego, aby wszystko, co jest dopuszczane jako istniejące w ogóle, było traktowane jako przedmiot indywidualny" (*A World of Individuals*, s. 17). Nominalizm merytoryczny z kolei wyróżnia pewne przedmioty indywidualne i tylko takie przedmioty dopuszcza, odrzucając jednocześnie obiekty - nawet jednostkowe - innego typu. Przykładem takiego nominalizmu może być reizm Tadeusza Kotarbińskiego (1886-1981), głoszący, że istnieją tylko rzeczy fizyczne (ciała).

Zauważmy, że nie ma swego odpowiednika w filozofii matematyki stanowisko realizmu umiarkowanego. Zgodnie z nim bowiem należałoby traktować zbiory jako własności. W konsekwencji więc zbiory istniałyby tak, jak istnieją atrybuty, czyli w sposób niesamodzielny i pochodny względem rzeczy, których są atrybutami. Natrafiamy tu jednak na trudność związaną z istnieniem tzw. cech koekstensywnych, tzn. cech różnych, a wyznaczających ten sam zbiór przedmiotów - cechy te należałoby utożsamiać.

Dodajmy jeszcze, że w kwestii sposobu istnienia zbiorów, i ogólnie przedmiotów matematyki, możliwe jest jeszcze jedno stanowisko. Otóż kwestię tę można traktować jako typowy pseudoproblem filozoficzny, którego takie czy inne rozwiązanie nie będzie nigdy miało wpływu na praktykę badawczą w matematyce. Taką postawę zajmował na przykład Rudolf Carnap (1891-1970).