

Alfred Tarski

Prawda i dowód

(*Truth and Proof*, „Scientific American”, t. 220, 1969, nr. 6)
tłum. Jan Zygmunt

fragmenty

(...)

1. Prawda

Naszym pierwszym zadaniem jest wyjaśnienie znaczenia terminu "prawdziwy". Zadanie to rozumiane będzie tutaj w sposób ograniczony. Pojęcie prawdy występuje w wielu rozmaitych kontekstach, termin "prawdziwy" bywa stosowany do wielu różnych kategorii przedmiotów. W rozważaniach psychologicznych mówi się o prawdziwych uczuciach i o prawdziwych przekonaniach; w rozprawach z dziedziny estetyki analizuje się wewnętrzną prawdę dzieł sztuki. W tym artykule interesuje nas jednak tylko to, co można by nazwać *metalogicznym pojęciem prawdy*. Mówiąc dokładniej, zajmujemy się wyłącznie znaczeniem terminu "prawdziwy" w tych sytuacjach, w których termin ten użyty jest w odniesieniu do zdań. Taki był zapewne pierwotny sposób użycia terminu "prawdziwy" w języku ludzkim. Zdania traktowane są tutaj jako twory językowe, jako pewne układy dźwięków lub znaków pisanych (choć rzecz jasna, nie każdy taki układ jest zdaniem). Ponadto, mówiąc o zdaniach, mamy zawsze na myśli to, co w gramatyce nazywa się zdaniami oznajmującymi, w odróżnieniu od zdań pytających i rozkazujących.

Wyjaśniając znaczenie jakiegoś terminu pochodzące z języka potocznego pamiętać trzeba, że cel i charakter logiczny takiego wyjaśnienia nie jest ten sam we wszystkich możliwych wypadkach. Czasem wyjaśnienie takie ma na celu zdanie sprawy z faktycznego sposobu użycia danego terminu, i wobec tego pytać można, czy jest ono poprawne w tym sensie, że odpowiada faktycznemu stanowi rzeczy. Kiedy indziej wyjaśnienie może mieć charakter normatywny, może być traktowane jako propozycja używania danego terminu w pewien określony sposób, bez względu na to, czy propozycja ta jest w zgodzie z faktycznym sposobem użycia tego terminu. Tego rodzaju wyjaśnienie może być oceniane np. z punktu widzenia jego użyteczności, lecz nie jego poprawności. Można by tu wymienić jeszcze inne ewentualności.

Wyjaśnienie, które chcemy podać w obecnym przypadku, ma do pewnego stopnia charakter mieszany. To, co podamy, powinno być w zasadzie traktowane jako propozycja używania terminu "prawdziwy" w pewien określony sposób; propozycji tej towarzyszy jednak przekonanie, że jest ona w zgodzie z przeważającym w języku potocznym sposobem użycia tego terminu.

Nasze pojmowanie pojęcia prawdy wydaje się zasadniczo zgodne z różnymi wyjaśnieniami tego pojęcia spotykanymi w literaturze filozoficznej. Najwcześniejsze chyba takie wyjaśnienie znaleźć można w *Metafizyce*, sławnym dziele Arystotelesa:

Jest fałszem powiedzieć o tym, co jest, że nie jest, lub o tym, co nie jest, że jest; jest prawdą powiedzieć o tym, co jest, że jest, lub o tym, co nie jest, że nie jest.

Tutaj i w dalszych rozważaniach zwrot "jest fałszem" znaczy to samo, co "nie jest prawdą"; podobnie przymiotnik "fałszywy" może być zawsze zastąpiony przez "nieprawdziwy".

Intuicyjny sens sformułowania Arystotelesowego wydaje się dość jasny. Niemniej jednak sformułowanie to pozostawia wiele do życzenia pod względem ścisłości i poprawności formalnej. W szczególności nie jest ono dostatecznie ogólne, gdyż odnosi się wyłącznie do zdań, które "powiadają" o czymś, "że jest" lub "że nie jest". W większości wypadków byłoby rzeczą prawie niemożliwą wtłoczyć zdania w ten schemat bez zniekształcenia ich sensu i pogwałcenia ducha języka. To jest zapewne jednym z powodów, dla których w filozofii nowoczesnej zaproponowano różne ujęcia mające zastąpić sformułowanie Arystotelesowe. Cytujemy przykłady następujące:

Zdanie jest prawdziwe, jeśli oznacza istniejący stan rzeczy. Prawdziwość zdania polega na jego zgodności (korespondencji) z rzeczywistością.

Sformułowania te, dzięki użyciu w nich specjalnych terminów filozoficznych, brzmią niewątpliwie bardzo "uczenie". Mam wrażenie jednak, że przy bliższej analizie okazują się one mniej jasne i jednoznaczne niż sformułowanie Arystotelesowe.

Koncepcja prawdy, która znalazła wyraz w sformułowaniu podanym przez Arystotelesę (oraz w pokrewnych sformułowaniach późniejszych), jest zazwyczaj nazywana *klasyczną* lub *semantyczną koncepcją prawdy*. Przez semantykę rozumiemy tę część metalogiki, w której, luźno mówiąc, rozważa się stosunki między tworam językowymi, na przykład zdaniami, a przedmiotami, do których się te twory odnoszą. Semantyczny charakter terminu "prawdziwy" uwydatnia się wyraźnie w wyjaśnieniu Arystotelesę i w niektórych sformułowaniach, które podane będą w naszych dalszych rozważaniach. Czasem mówi się o *korespondencyjnej teorii prawdy* jako teorii opartej na tej klasycznej koncepcji.¹

Spróbujmy uzyskać tutaj bardziej precyzyjne wyjaśnienie klasycznej koncepcji prawdy, które mogłoby zastąpić sformułowanie Arystotelesowe, zachowując jego zasadnicze intencje. W tym celu będziemy musieli się uciec do pewnych technicznych środków współczesnej logiki. Będziemy również musieli ustalić język, którego zdaniami będziemy się zajmowali; jest to konieczne już choćby dlatego, że układ dźwięków lub znaków, który jest w jednym języku zdaniem sensownym - prawdziwym lub fałszywym - może być w innym języku wyrażeniem pozbawionym sensu. Na razie zakładamy, że język, którym się zajmujemy, to potoczny język polski.

Zaczynamy od prostego zagadnienia. Weźmy pod uwagę jakieś zdanie w języku polskim, którego sens nie budzi wątpliwości, np. zdanie "śnieg jest biały". Umawiamy się, że zdanie to będziemy oznaczać przez „8”, tak że „8” będzie nazwą tego zdania. Stawiamy sobie pytanie: co mamy na myśli mówiąc, że 8 jest zdaniem prawdziwym lub też jest zdaniem fałszywym? Odpowiedź na to pytanie jest prosta: w duchu wyjaśnienia Arystotelesowego, mówiąc że 8 jest zdaniem prawdziwym, mamy po prostu na myśli, że śnieg jest biały, a mówiąc że 8 jest zdaniem fałszywym, mamy na myśli, że śnieg nie jest biały. Eliminując „8” uzyskujemy następujące sformułowania:

- (1) *"śnieg jest biały" jest zdaniem prawdziwym wtedy i tylko wtedy, gdy śnieg jest biały;*
- (1') *"śnieg jest biały" jest zdaniem fałszywym wtedy i tylko wtedy, gdy śnieg nie jest biały.*

Tak więc (1) i (1') wyjaśniają w sposób zadowalający znaczenie terminów "prawdziwy" i "fałszywy" w przypadku, gdy terminy te odnoszą się do zdania "śnieg jest biały". Możemy uważać (1) i (1') za cząstkowe definicje terminów "prawdziwy" i "fałszywy" - za definicje tych terminów w odniesieniu do pewnego konkretnego zdania. Zauważmy, że (1), podobnie jak (1'), ma postać narzuconą definicjom przez reguły logiki, a mianowicie postać równoważności logicznej. Składa się ona z dwóch części, zwanych lewą i prawą stroną równoważności i powiązanych przez spójnik zdaniowy "wtedy i tylko wtedy, gdy". Lewa strona jest to definiendum, czyli zwrot, którego znaczenie jest wyjaśnione przez

¹ We współczesnej literaturze filozoficznej rozważa się również inne koncepcje i teorie prawdy, np. koncepcję uutilitarystyczną i teorię koherencyjną. Wydaje się, że koncepcje te mają charakter wyłącznie normatywny i mają niewiele wspólnego z faktycznym sposobem użycia terminu "prawdziwy"; żadna z nich nie została dotąd sformułowana jasno i precyzyjnie. W artykule niniejszym koncepcje te nie będą rozważane

definicję; prawa strona jest to definiens, czyli zwrot, który wyjaśnia to znaczenie. W obecnym przypadku definiendum jest następującym wyrażeniem:

"śnieg jest biały" jest zdaniem prawdziwym;

definiens zaś ma postać:

śnieg jest biały.

Na pierwszy rzut oka może się wydać, że zdanie (1) traktowane jako definicja zawiera podstawowy błąd, znany jako błędne koło. Chodzi o to, że pewne słowa, np. "śnieg", występują zarówno w definiendum, jak i w definiens. W rzeczywistości jednak występują one tam w zupełnie różnych rolach. Definiens zawiera słowo "śnieg" jako *syntaktyczną* (lub *organiczną*) *część*: definiens jest zdaniem, a słowo "śnieg" jest jego podmiotem. Definiendum jest również zdaniem. Głosi ono, że definiens jest zdaniem prawdziwym. Podmiotem tego zdania jest nazwa definiens utworzona przez ujęcie definiens w cudzysłów. (Mówiąc o jakimś przedmiocie, używamy zawsze jego nazwy, a nie samego przedmiotu, nawet wówczas, gdy w grę wchodzi przedmioty językowe). Z wielu względów wyrażenie ujęte w cudzysłów powinno być traktowane gramatycznie jako pojedyncze słowo nie mające części syntaktycznych. Więc w szczególności słowo "śnieg", które niewątpliwie jest częścią definiendum, nie jest jego częścią syntaktyczną w tym samym sensie jak np. słowo "ein", które oczywiście jest częścią słowa "Schwein", ale nie jest jego częścią syntaktyczną. Logik średniowieczny powiedziałby, że w definiens "śnieg" występuje *in suppositione formalis*, w definiendum zaś *in suppositione materialis*. Słowa, które nie są syntaktycznymi częściami definiendum, nie mogą jednak być źródłem błędnego koła, i niebezpieczeństwo błędnego koła znika.

Uwagi te dotyczą dość subtelnych zagadnień, które nie są całkiem proste z punktu widzenia logiki. Zamiast rozważać je szczegółowo, wskażemy inny sposób postępowania, który rozwiewa wszelkie obawy błędnego koła. Formułując (1) zastosowaliśmy zwykłą metodę tworzenia nazwy zdania lub innego wyrażenia, polegającą na ujęciu tego wyrażenia w cudzysłów. Metoda ta ma wiele zalet, lecz jest również źródłem wskazanych wyżej trudności. Dla usunięcia tych trudności wypróbujemy tu inną metodę tworzenia nazw wyrażen, metodę, którą można by scharakteryzować jako opis wyrażenia "litera po literze". Używając tej metody otrzymujemy zamiast (1) następujące, nieco przydługie sformułowanie:

(2) *wyrażenie złożone z trzech słów, z których pierwsze jest układem pięciu kolejnych liter: Eś, En, I, E i Ge, drugie - układem czterech kolejnych liter: Jot, E, Es i Te, a trzecie - układem pięciu kolejnych liter: Be, I, A, El i Igrek, jest zdaniem prawdziwym wtedy i tylko wtedy, gdy śnieg jest biały.*

(2) nie różni się znaczeniem od (1); (1) można po prostu uważać za skrótową postać (2). Nowe sformułowanie jest z pewnością znacznie mniej przejrzyste od starego, ma jednak tę zaletę, że nie stwarza pozoru błędnego koła.

Cząstkowe definicje prawdy analogiczne do (1) [lub (2)] można równie dobrze konstruować dla innych zdań. Każda z tych definicji ma postać:

(3) *"p" jest zdaniem prawdziwym wtedy i tylko wtedy, gdy p,*

gdzie za "p" po obu stronach (3) należy podstawić zdanie, dla którego konstruujemy definicję. Trzeba jednak zwrócić szczególną uwagę na sytuacje, w których zdanie podstawiane za "p" zawiera słowo "prawdziwy" jako część syntaktyczną. Równoważność (3) nie może być wówczas uważana za cząstkową definicję prawdy, w przeciwnym bowiem razie byłaby ona oczywistym przykładem definicji zawierającej błędne koło. I w tym jednak wypadku (3) jest zdaniem sensownym, a nawet zdaniem prawdziwym (z

punktu widzenia klasycznej koncepcji prawdy). Dla ilustracji przypuścimy, że w recenzji jakiejś książki spotykamy następujące zdanie:

(4) *nie każde zdanie w tej książce jest prawdziwe.*

Stosując do (4) kryterium Arystotelesowe widzimy, że (4) jest zdaniem prawdziwym, jeżeli istotnie nie każde zdanie w tej książce jest prawdziwe, a w przeciwnym wypadku jest to zdanie fałszywe. Innymi słowy, możemy stwierdzić równoważność otrzymaną z (3) przez podstawienie (4) za " p ". Oczywiście równoważność ta ustala tylko warunki, w których zdanie (4) jest lub nie jest prawdziwe, ale sama przez się nie pozwala nam rozstrzygnąć, który z tych wypadków rzeczywiście zachodzi. Dla sprawdzenia sądu wyrażonego w (4) należałoby uważnie przeczytać omawianą książkę i zbadać prawdziwość zawartych w niej zdań.

W świetle tych rozważań możemy teraz precyzyjniej sformułować nasz główny problem. Przyjmujemy, że sposób użycia terminu "prawdziwy" w odniesieniu do zdań języka polskiego jest wtedy i tylko wtedy zgodny z klasyczną koncepcją prawdy, gdy umożliwia on stwierdzenie każdej równoważności kształtu (3), gdzie " p " zastąpione jest po obu stronach równoważności dowolnym zdaniem języka polskiego. Gdy warunek ten jest spełniony, będziemy mówili krótko, że sposób użycia terminu "prawdziwy" jest *merytorycznie trafny* lub, po prostu, *trafny*. Nasz główny problem brzmi więc: czy możemy ustalić trafny sposób użycia terminu "prawdziwy" dla zdań języka polskiego i jeżeli tak, to jakimi metodami. Możemy oczywiście postawić analogiczne pytanie w odniesieniu do zdań jakiegokolwiek innego języka. Problem ten będzie całkowicie rozwiązany, jeżeli uda nam się zbudować ogólną definicję prawdy, która będzie nie tylko formalnie poprawna, lecz również merytorycznie trafna w tym sensie, że wszystkie równoważności kształtu (3) będą jej logicznymi konsekwencjami. Jeżeli definicja taka będzie przyjęta przez ludzi mówiących po polsku, ustali ona trafny sposób użycia terminu "prawdziwy".

Przy pewnych specjalnych założeniach skonstruowanie ogólnej definicji prawdy jest rzeczą łatwą. W istocie, założymy, że interesuje nas nie cały potoczny język polski, lecz pewien jego fragment, i że chcemy zdefiniować termin "prawdziwy" wyłącznie w odniesieniu do zdań tego fragmentarycznego języka. Będziemy nazywać ten fragmentaryczny język językiem L . Założymy dalej, że język L ma ściśle sformułowane reguły syntaktyczne, które pozwalają nam w każdym poszczególnym wypadku odróżnić zdanie od wyrażenia nie będącego zdaniem, oraz że ilość zdań języka L jest skończona (choć, być może, bardzo wielka). Założymy wreszcie, że słowo "prawdziwy" nie występuje w L , oraz że znaczenie wszystkich słów w L jest dostatecznie jasne, tak że nie mamy żadnych zastrzeżeń przeciw użyciu tych słów przy definiowaniu prawdy. Przy tych założeniach postępujemy w sposób następujący: przede wszystkim sporządzamy pełną listę wszystkich zdań języka L ; przypuścimy np., że L ma dokładnie 1000 zdań i umówmy się używać symboli " s_1 ", " s_2 ", ..., " s_{1000} " jako skrótów kolejnych zdań na naszej liście. Założenia powyższe można wyrazić w następujący sposób:

(5) *dla każdego x , x jest zdaniem w L wtedy i tylko wtedy, gdy albo $x = "s_1"$, albo $x = "s_2"$, ..., albo wreszcie $x = "s_{1000}"$*

Następnie dla każdego ze zdań " s_1 ", " s_2 ", ..., " s_{1000} " budujemy cząstkową definicję prawdy jako konkretne podstawienie schematu (3), a potem tworzymy koniunkcję wszystkich tych definicji cząstkowych:

(6) *("s₁" jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy s_1) i ("s₂" jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy s_2), ... i ("s₁₀₀₀" jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy s_{1000}).*

Opierając się na założeniu (5), możemy teraz sformułować zdanie, które jest logicznie równoważne zdaniu (6) i które czyni zadość formalnym wymaganiom stawianym definicjom w regułach metodologicznych:

- (7) *dla każdego zdania x w języku L , x jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy albo s_1 i $x = "s_1"$, albo s_2 i $x = "s_2"$, ..., albo wreszcie s_{1000} i $x = "s_{1000}"$.*

W ten sposób otrzymaliśmy zdanie, które istotnie można przyjąć jako żadaną ogólną definicję prawdy; jest to definicja formalnie poprawna i jest trafna w tym sensie, że wynikają z niej wszystkie równoważności kształtu (3), gdzie " p " zastąpione zostało przez dowolne zdanie języka L . Przy sposobności zauważmy, że (7) jest zdaniem w języku polskim, lecz oczywiście nie w języku L ; ponieważ (7) zawiera wszystkie zdania języka L jako części właściwe, nie może ono być identyczne z żadnym z nich. Nasze dalsze rozważania rzucają więcej światła na tę sprawę.

Z oczywistych powodów nie można zastosować naszkicowanej przed chwilą metody, gdy interesuje nas cały język polski, a nie tylko jego fragment. Usiłując sporządzić pełną listę zdań języka polskiego napotykamy od razu tę trudność, że reguły gramatyki nie określają precyzyjnie, jakiego kształtu wyrażenia (układy słów) mają być uważane za zdania: pewne wyrażenie, np. wykrzyknik, może funkcjonować jako zdanie w danym kontekście, chociaż wyrażenie tego samego kształtu nie spełnia tej funkcji w jakimś innym kontekście. Co więcej, zbiór wszystkich zdań języka polskiego jest, potencjalnie przynajmniej, nieskończony. Chociaż ilość zdań sformułowanych w mowie i piśmie przez istoty ludzkie do chwili obecnej jest niewątpliwie skończona, nikt zapewne nie zgodziłby się uznać, że lista tych zdań obejmuje wszystkie zdania języka polskiego; przeciwnie, wydaje się rzeczą prawdopodobną, że widząc taką listę każdy z nas mógłby z łatwością sformułować zdanie w języku polskim, którego na liście nie ma. I wreszcie, fakt, że słowo "prawdziwy" jest wyrazem języka polskiego, uniemożliwia sam przez się zastosowanie opisanego powyżej sposobu postępowania.

Z uwag tych nie wynika, że poszukiwana definicja prawdy dla dowolnych zdań języka polskiego nie może być uzyskana na jakiejś innej drodze, być może przez użycie jakiejś zgoła odmiennej idei. Jest jednak powód inny, poważniejszej i bardziej zasadniczej natury, który zdaje się wyłączać tę możliwość. Co więcej, samo przypuszczenie, że merytorycznie trafne użycie terminu "prawdziwy" (w odniesieniu do dowolnych zdań języka polskiego) daje się ustalić za pomocą jakiejkolwiek metody, prowadzi, jak się okazuje, do sprzeczności. Najprostsze rozumowanie wykazujące taką sprzeczność znane jest jako *antynomia kłamcy*; naszkicujemy je w najbliższych paru wierszach. Weźmy pod uwagę następujące zdanie:

- (8) *zdanie występujące w wierszu 29 strony 5 tego tekstu jest fałszywe.*

(...)* Aby uprościć dalsze rozumowania używać będziemy litery " T " jako typograficznego skrótu wyrażenia "zdanie występujące w wierszu 29 strony 5 tego tekstu jest fałszywe." Zatem (8) przyjmie teraz postać:

- (8') *T jest fałszywe.*

Sprawdzając numer strony, na której występuje zdanie (8), i licząc od góry wiersze na tej stronie, czytelnik łatwo się sam przekona, że zdanie (8) - to właśnie zdanie występujące w tym tekście w wierszu 29 strony 5. Używając symbolu " T ", obserwację tę możemy wyrazić następująco:

- (9) *" T jest fałszywe" jest identyczne ze zdaniem wydrukowanym w wierszu 29 strony 5 tego tekstu.*

Stąd, w oparciu o zasadę Leibniza*, wnosimy, że

* W oryginale występuje rzecz jasna inne zdanie, bo inna jest numeracja stron i wierszy. Odpowiednim modyfikacjom uległy też fragmenty niniejszego tekstu odnoszące się do rozważanego, „paradoksalnego” zdania – przyp. AW

(10) *"T jest fałszywe" jest identyczne z T.*

Z drugiej zaś strony (8), a także (8'), jest zdaniem w języku polskim. Jeśli więc założymy, że nasz sposób używania terminu "prawdziwy" (w odniesieniu do dowolnych zdań języka polskiego) jest merytorycznie trafny, możemy stwierdzić równoważność (3), w której po obu stronach "p" zastąpiono przez "*T jest fałszywe*". W ten sposób otrzymujemy:

(11) *"T jest fałszywe" jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy T jest fałszywe.*

Porównując (10) i (11) dochodzimy do wniosku

(12) *T jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy T jest fałszywe*

To zaś prowadzi do sprzeczności: zdanie występujące w wierszu 29 strony 5 tego tekstu jest zarazem prawdziwe i fałszywe. Doszliśmy więc do antynomii. Należy zauważyć, że w wyprowadzeniu tej antynomii posilkowanie się skrótem "*T*" nie jest wcale istotne. Zrekonstruowanie powyższego rozumowania bez uciekania się do jakiegokolwiek skrótu może być dla czytelnika ciekawym ćwiczeniem.

W naszkicowanym wyżej ujęciu antynomii kłamcy (które faktycznie pochodzi od Łukasiewicza) rozumowanie dotyczy pewnego zdania wydrukowanego. W innym ujęciu (prawdopodobnie lepiej znanym, ale mniej nadającym się do rozważań formalnych) rozumowanie dotyczy pewnego zdania wypowiedzianego. Rzeczywiście, zakłada się, że ktoś powiedział "teraz kłamię", i rozumując podobnie jak przedtem, pokazuje się, że zdanie właśnie wypowiedziane jest zarazem prawdziwe i fałszywe. Jest to prawdopodobnie oryginalna wersja antynomii i stąd chyba pochodzi jej nazwa: "antynomia kłamcy".

Znane są również inne, bardziej skomplikowane sformułowania tej antynomii. Na przykład, wyobraźmy sobie książkę, która ma 100 stron, a na każdej stronie wydrukowane jest tylko jedno zdanie. Na stronie 1 czytamy:

zdanie wydrukowane na stronie 2 tej książki jest prawdziwe.

Na stronie 2 czytamy:

zdanie wydrukowane na stronie 3 tej książki jest prawdziwe.

To samo powtarza się aż do strony 99. Na stronie 100, ostatniej stronie książki, znajdujemy natomiast:

zdanie wydrukowane na stronie 1 tej książki jest fałszywe.

Założmy teraz, że zdanie wydrukowane na stronie 1 jest istotnie fałszywe. Nietrudne, chociaż długie i wymagające przekartkowania całej książki, rozumowanie prowadzi do wniosku, że nasze założenie jest błędne. Wobec tego zakładamy z kolei, że zdanie wydrukowane na stronie 1 jest prawdziwe; za pomocą równie łatwego i równie długiego rozumowania przekonujemy się, że nowe założenie jest także błędne. Znow więc dochodzimy do antynomii.

Z łatwością możemy sporządzić wiele innych "antynomicznych książek", które są wariantami książki opisanej przed chwilą. (...)

Antynomia kłamcy pochodzi ze starożytności. Jest ona zwykle przypisywana znakomitemu logikowi greckiemu Eubulidesowi (IV w. przed Chrystusem); była ona źródłem udreki dla wielu starożytnych logików i spowodowała nawet przedwczesną śmierć jednego z nich, Filetasa z Kos. Wiele innych antynomii i paradoksów odkryto w starożytności, w średniowieczu i w czasach nowożytnych. Podczas gdy sporo z nich uległo zupełnemu zapomnieniu, antynomia kłamcy jest wciąż jeszcze analizowana i dyskutowana we współczesnym piśmiennictwie. Wraz z pewnymi innymi antynomiami odkrytymi na początku bieżącego stulecia (w szczególności antynomią Russella), wywarła ona wielki wpływ na rozwój nowoczesnej logiki²

W literaturze poświęconej antynomiom napotkać można dwa diametralnie przeciwne podejścia do tego zjawiska. Przy pierwszym z nich zaleca się nie zwracać na antynomie zbyt wiele uwagi i traktować je jako złośliwe, lecz niepoważne żarty, jako sofizmaty skomponowane głównie *pour épater les bourgeois* i w najlepszym razie świadczące tylko o pomysłowości ich autorów. Podejście przeciwne jest charakterystyczne dla pewnych myślicieli XIX wieku i jest wciąż jeszcze (lub było do niedawna) programowo uprawiane w pewnych częściach kuli ziemskiej. Przy tym podejściu antynomie stanowią bardzo istotny element ludzkiego myślenia, muszą się one raz po raz pojawiać w naszej działalności intelektualnej, a ich obecność jest podstawowym źródłem rzeczywistego postępu. Jak często bywa, prawda leży zapewne gdzieś pośrodku. Naszym zdaniem, logik nie może pogodzić się z antynomiami jako stałym elementem naszego systemu wiedzy. Nie powinien jednak bynajmniej być skłonny do ich lekceważenia. Pojawienie się antynomii należy uważać za symptom choroby. Wychodząc z przesłanek, które wydają się intuicyjnie oczywiste, używając form rozumowań, które wydają się intuicyjnie niezawodne, antynomia wiedzie nas do nonsensu, do sprzeczności. Kiedykolwiek to się zdarzy, musimy poddać głębokiej rewizji nasz sposób myślenia, odrzucić pewne przesłanki, w które wierzyliśmy, lub ulepszyć formy rozumowania, których dotąd używaliśmy. Czynimy to w nadziei, że nie tylko pozbedziemy się dawnej antynomii, lecz również że w jej miejsce nie pojawią się nowe. By uzasadnić tę nadzieję, poddajemy nasz zreformowany system myślenia wszelkim możliwym próbom, a przede wszystkim usiłujemy zrekonstruować dawną antynomię w nowych ramach (oczekując, rzecz jasna, że te usiłowania nie zostaną uwiecznione powodzeniem). Takie próby są niezwykle ważną czynnością w dziedzinie spekulatywnego myślenia, pokrewną *experimentum crucis* w naukach empirycznych.

Rozważmy teraz, z tego punktu widzenia, antynomię kłamcy. Antynomia ta dotyczy pojęcia prawdy w odniesieniu do dowolnych zdań potocznego języka polskiego; można by ją z łatwością tak zmodyfikować, że stosowałaby się również do innych języków naturalnych. Stoi przed nami poważne zagadnienie: jak uniknąć sprzeczności spowodowanych przez tę antynomię? Z natury rzeczy nasuwa się możliwość radykalnego rozwiązania tego zagadnienia: polegałaby ona na usunięciu słowa "prawdziwy" z języka polskiego, lub przynajmniej na postanowieniu nie używania tego słowa w jakiegokolwiek poważnej dyskusji.

Ci, którym taka amputacja języka polskiego wydaje się wysoce niezadowolająca i nawet niedopuszczalna, skłaniać się mogą do zaakceptowania trochę bardziej kompromisowego rozwiązania - do

² (...) Z ogromnego, bardziej współczesnego piśmiennictwa na temat antynomii kłamcy i związanych z nią tematów wymienimy tylko kilka, naszym zdaniem najważniejszych: J. Barwise i J. Etchemendy, *The Liar. An Essay on Truth and Circularity*, Oxford University Press, New York, Oxford 1987; V. McGee, *Truth, Vagueness, and Paradox. An Essay on the Logic of Truth*, Hackett Publishing Company, Indianapolis 1991; R.L. Martin (red.), *The Paradox of the Liar*, Yale University Press, New Haven 1970 (antologia ta zawiera prace m.in. R.A. Andersona, F.B. Fitcha, G.H. Herzbergera, J.T. Kearnsa, R.L. Martina, B. Skyrmsa i Re. van Fraassena oraz bibliografię); R.L. Martin (red.), *Recent Essays on Truth and the Liar Paradox*, Oxford University Press, New York, Oxford 1984 (antologia znakomitych prac T. Burge'a, A. Churcha, S. Fefermana, A. Gupty, H.G. Herzbergera, S. Kripkego, R.L. Martina i P.W. Woodruffa oraz T. Parsons); A. Visser, *Semantics and the Liar Paradox w: Handbook of Philosophical Logic*, t. IV (red. D. Gabbay i F. Guenther), D. Reidei, Dordrecht 1989, s.617-706. – przyp. tłum.

zajęcia stanowiska, które można by nazwać (za sugestią T. Kotarbińskiego) "nihilistycznym" podejściem do teorii prawdy. Przy tym podejściu słowa "prawda" i "prawdziwy" nie mają samodzielnego znaczenia, lecz każde z nich może być używane jako składnik dwóch sensownych wyrażań: "jest prawdą, że" i "nie jest prawdą, że" lub „jest rzeczą prawdziwą, że" i "nie jest rzeczą prawdziwą, że". Wyrażenia te traktowane są tak, jakby były pojedynczymi słowami, bez żadnych części organicznych. Znaczenie przypisywane im jest takie, że można je natychmiast wyeliminować z każdego zdania, w którym występują. Na przykład, zamiast tego, by powiedzieć:

prawdą jest, że wszystkie koty są czarne,

możemy po prostu powiedzieć:

wszystkie koty są czarne,

a zamiast:

nie jest prawdą, że wszystkie koty są czarne,

możemy powiedzieć:

nie wszystkie koty są czarne.

W innych kontekstach słowa "prawda" i "prawdziwy" są pozbawione sensu. W szczególności słowo "prawdziwy" nie może być użyte sensownie jako orzecznik w zdaniach postaci "Zdanie Z jest prawdziwe" i "Zdanie Z nie jest prawdziwe". W terminologii logiki średniowiecznej możemy powiedzieć, że słowa "prawda" i "prawdziwy" mogą być użyte synkategorematicznie w pewnych specjalnych kontekstach, lecz nigdy nie mogą być użyte kategorematicznie.

Aby zdać sobie sprawę z konsekwencji tego stanowiska, weźmy najpierw pod uwagę zdanie, które było punktem wyjścia antynomii kłamcy, a mianowicie zdanie występujące w wierszu 29 strony 5 niniejszego tekstu. Z "nihilistycznego" punktu widzenia nie jest to zdanie sensowne i antynomia po prostu znika. Niestety, podobny los spotyka wiele innych zdań - i to zdań, które są potrzebne do wyrażenia pewnych faktów lub rozsądnych przypuszczeń, i w których użycie wyrazu "prawdziwy" nie zdaje się prowadzić do logicznych trudności. Wyobraźmy sobie na przykład, że pewien termin często występujący w dziełach jakiegoś starożytnego matematyka może być interpretowany na wiele sposobów. Historyk nauki studiujący te dzieła dochodzi do wniosku, że przy pewnej interpretacji wspomnianego terminu wszystkie twierdzenia sformułowane w tych dziełach okazują się zdaniami prawdziwymi. Nasuwa mu się w sposób naturalny hipoteza, że to samo dotyczy wszystkich dzieł owego matematyka, łącznie z tymi, które są obecnie nieznane, lecz mogą zostać odkryte w przyszłości. Jeżeli jednak historyk nasz podziela "nihilistyczny" pogląd na pojęcie prawdy, nie jest on w stanie sformułować swej hipotezy w słowach. Można by powiedzieć, że "nihilizm" w rozumieniu prawdy z pozoru akceptuje użycie słowa "prawda" w pewnych rozpowszechnionych formach ludzkiej mowy, w istocie jednak usuwa pojęcie prawdy z zasobu pojęć ludzkiego umysłu.

Będziemy więc szukali innego wyjścia z naszego trudnego położenia. Postaramy się znaleźć rozwiązanie, które zachowa klasyczną koncepcję prawdy w stanie zasadniczo nietkniętym. Zakres stosowności pojęcia prawdy będzie musiał ulec pewnym ograniczeniom, ale pojęcie to pozostanie do dyspozycji - przynajmniej do celów dyskusji naukowych.

W tym celu musimy zanalizować te cechy języka potocznego, które są istotnym źródłem antynomii kłamcy. W trakcie analizy zauważymy natychmiast znamiennej cechy języka potocznego, a

mianowicie jego wszechobowiązujący, uniwersalny charakter. Język potoczny jest uniwersalny i ci, którzy go używają, pragną, by taki był. Ma on dać możliwość wyrażenia wszystkiego, co w ogóle daje się wyrazić, w jakimkolwiek innym języku; dla spełnienia tego wymagania ulega on ciągłemu rozszerzaniu. W szczególności, język potoczny jest *semantycznie uniwersalny* w następującym sensie: obok tworów językowych, takich jak zdania i terminy, które są częściami składowymi języka, zawiera on również ich nazwy (jak wiemy, nazwy wyrażen można tworzyć ujmując je w cudzysłowy); ponadto język ten zawiera terminy semantyczne, takie jak "prawda", "nazwa", "oznaczanie", które - pośrednio lub bezpośrednio - dotyczą stosunku między wyrażeniami i przedmiotami, do których te wyrażenia się odnoszą. W rezultacie, dla każdego zdania języka potocznego możemy sformułować w tym samym języku inne zdanie głoszące, że to pierwsze zdanie jest prawdziwe lub że jest fałszywe. Za pomocą pewnej dodatkowej "sztuczki" możemy nawet zbudować w języku potocznym zdanie, które można by nazwać *samoodnośnym*, a mianowicie zdanie *S*, które stwierdza, że ono samo jest zdaniem prawdziwym lub że jest zdaniem fałszywym (takie jest właśnie zdanie w wierszu 29 strony 5 niniejszego tekstu). W przypadku, gdy *S* stwierdza swą własną fałszywość, proste rozumowanie wykazuje, że zdanie *S* jest zarazem prawdziwe i fałszywe, i stajemy wobec antynomii kłamcy.

Języki uniwersalne nie są jednak niezbędne we wszystkich sytuacjach. W szczególności języki takie nie są na ogół potrzebne do celów nauki (przez "naukę" rozumiemy tu całą dziedzinę dociekań intelektualnych). W jakiejś określonej gałęzi nauki, np. w chemii, rozważamy pewien specjalny rodzaj przedmiotów, takich jak pierwiastki, cząsteczki itd., nie rozważamy tam natomiast innych przedmiotów, np. tworów językowych takich jak zdania lub terminy. Język dobrze dostosowany do tych rozważań może mieć bardzo ograniczony zasób słów. Musi on zawierać nazwy przedmiotów chemii, a więc terminy takie jak "pierwiastek" i "cząsteczka", lecz nie musi zawierać nazw tworów językowych; nie musi zatem to być język semantycznie uniwersalny. To samo dotyczy ogromnej większości innych gałęzi nauki. Sytuacja jest nieco bardziej pogmatwana w przypadku lingwistyki. Jest to nauka badająca języki; język jej musi zawierać nazwy tworów językowych. Nie musimy jednak utożsamiać języka lingwistyki z językiem lub jednym z języków, które są przedmiotem badań lingwistycznych, i nie musimy bynajmniej zakładać, że w lingwistyce używamy we wszystkich badaniach jednego i tego samego języka. Język lingwistyki musi zawierać nazwy części składowych języków badanych, lecz nie musi zawierać nazw swych własnych części składowych, a więc i w tym wypadku nie musi to być język semantycznie uniwersalny. To samo dotyczy języka metalogiki i metamatematyki*, w tym bowiem wypadku przedmiotem naszych badań są pewne języki, głównie języki teorii logicznych i matematycznych (choć badamy te języki z innego punktu widzenia niż na terenie lingwistyki).

Powstaje teraz pytanie, czy przynajmniej dla semantycznie ograniczonych języków rozważań naukowych można ściśle zdefiniować pojęcie prawdy i ustalić w ten sposób konsekwentny i trafny sposób użycia tego pojęcia. Jeżeli spełnione są pewne określone warunki, odpowiedź na to pytanie jest twierdząca. Główne warunki, które język musi spełniać, są następujące: musi być podany pełny słownik języka i muszą być ściśle sformułowane reguły syntaktyczne dotyczące budowy zdań i innych sensownych wyrażen ze słów podanych w słowniku. Przy tym reguły syntaktyczne muszą być czysto formalne, to znaczy muszą dotyczyć wyłącznie formy (kształtu) wyrażen; funkcja i sens danego wyrażenia muszą zależeć wyłącznie od jego formy. W szczególności, patrząc na jakieś wyrażenie, musimy potrafić rozstrzygnąć w każdym poszczególnym wypadku, czy wyrażenie to jest, czy nie jest zdaniem. Nie może się nigdy zdarzyć, aby wyrażenie jakieś pełniło funkcję zdania w jednym miejscu, podczas gdy wyrażenie tego samego kształtu w innym miejscu funkcji tej nie pełni; lub aby zdanie jakieś w jednym kontekście było uznane za prawdziwe, podczas gdy w innym kontekście zdanie tego samego kształtu uznane jest za fałszywe. (Wynika stąd w szczególności, że w słowniku tego języka nie powinno być zaimków i przysłówków wskazujących, takich jak "ten" i "tutaj"). Języki spełniające te warunki zwane są *językami sformalizowanymi*. Rozważając język sformalizowany nie ma potrzeby odróżnienia dwóch wyrażen tego samego kształtu, które są napisane lub wygłoszone w różnych miejscach: mówimy więc o nich często tak, jakby to było jedno i to samo wyrażenie. Czytelnik zauważył może, że czasem używamy tego sposobu mówienia nawet przy rozważaniu języka naturalnego, który nie jest sformalizowany; czynimy to dla prostoty i tylko wtedy, gdy nie grozi to nieporozumieniem.

Języki sformalizowane są w pełni adekwatne do przedstawienia teorii logicznych i matematycznych. Nie widać żadnego istotnego powodu, dla którego nie mogą one być dostosowane do użytku w innych gałęziach wiedzy, a w szczególności do formułowania teoretycznych części nauk empirycznych. Trzeba podkreślić, że używając terminu "języki sformalizowane" nie mamy na myśli wyłącznie systemów językowych sformułowanych całkowicie za pomocą symboli i nie mamy też na myśli niczego, co byłoby zasadniczo przeciwstawne językom naturalnym. Przeciwnie, tylko te języki sformalizowane wydają mi się naprawdę interesujące, które są fragmentami języków naturalnych (fragmentami wyposażonymi w pełne słowniki i ścisłe reguły syntaktyczne) lub które dają się przynajmniej adekwatnie przetłumaczyć na języki naturalne.

Realizacja naszego programu uzależniona jest jeszcze od pewnych dalszych warunków. Musimy przeprowadzić ściśle rozróżnienie między językiem, który jest przedmiotem naszych rozważań i dla którego zamierzamy zbudować definicję prawdy, a językiem, w którym chcemy sformułować tę definicję i zbadać jej konsekwencje. Pierwszy nazywa się *językiem przedmiotowym*, a drugi *metajęzykiem*. Metajęzyk musi być wystarczająco bogaty i w szczególności musi zawierać jako część język przedmiotowy. W istocie, zgodnie z naszymi umowami, merytorycznie trafna definicja prawdy pociąga za sobą jako konsekwencje wszystkie cząstkowe definicje tego pojęcia, to znaczy wszystkie równoważności kształtu

(3) *"p" jest zdaniem prawdziwym wtedy i tylko wtedy, gdy p,*

gdzie "*p*" jest zastąpione (po obu stronach) przez dowolne zdanie języka przedmiotowego. Ponieważ wszystkie te konsekwencje sformułowane są w metajęzyku, wnosimy, że każde zdanie języka przedmiotowego musi być również zdaniem metajęzyka. Ponadto, metajęzyk musi zawierać nazwy zdań (i innych wyrażań) języka przedmiotowego, gdyż nazwy te występują po lewej stronie powyższych równoważności. Musi on też zawierać inne jeszcze terminy potrzebne do badania języka przedmiotowego, a mianowicie terminy oznaczające pewne specjalne zbiory wyrażań, stosunki między wyrażeniami oraz operacje dokonywane na wyrażeniach; na przykład, musimy mieć możliwość mówienia o zbiorze wszystkich zdań lub o operacji składania, za pomocą której, umieszczając jedno wyrażenie bezpośrednio po drugim, tworzymy nowe wyrażenie. Wreszcie, definiując prawdę pokazujemy, że terminy semantyczne (dotyczące stosunków między zdaniami języka przedmiotowego a przedmiotami, do których zdania te się odnoszą) dają się wprowadzić do metajęzyka za pomocą definicji. Stąd wysnuwamy wniosek, że metajęzyk zawierający środki wystarczające do zdefiniowania prawdy musi być istotnie bogatszy niż język przedmiotowy; nie może się on pokrywać z językiem przedmiotowym lub być przekładalny na ten język, gdyż w tym wypadku oba języki okazałyby się semantycznie uniwersalne i w obydwu można by zrekonstruować antynomię kłamcy. Powrócimy do tej sprawy w części III.

Jeżeli wszystkie powyższe warunki są spełnione, konstrukcja poszukiwanej definicji prawdy nie przedstawia żadnych istotnych trudności. Jest to jednak sprawa zbyt skomplikowana technicznie, by można ją tu było szczegółowo wyłożyć. Dla każdego dowolnie obranego zdania w języku przedmiotowym możemy z łatwością sformułować odpowiednią cząstkową definicję kształtu (3). Ponieważ jednak zbiór wszystkich zdań języka przedmiotowego jest na ogół nieskończony, podczas gdy każde zdanie metajęzyka jest skończonym układem znaków, nie możemy uzyskać ogólnej definicji, tworząc po prostu koniunkcję wszystkich definicji cząstkowych. Niemniej jednak to, co w rezultacie osiągamy, jest równoważne, w pewnym intuicyjnym sensie, takiej wymyślonej nieskończonej koniunkcji. Z grubsza rzecz biorąc, postępujemy jak następuje. Przede wszystkim bierzemy pod uwagę najprostsze zdania, które nie zawierają innych zdań jako części; dla tych najprostszyc zdań udaje się nam zdefiniować prawdę bezpośrednio (stosując tę samą ideę, na której opierają się definicje cząstkowe typu (3)). Następnie, za pomocą syntaktycznych reguł, dotyczących budowania zdań bardziej skomplikowanych ze zdań prostszych, rozciągamy tę definicję na dowolne zdania złożone; używamy tu metody definiowania znanej w matematyce pod nazwą metody rekurencyjnej. (Jest to wielce uproszczony opis rzeczywistego sposobu postępowania. W większości wypadków, z pewnych powodów natury technicznej, metodę rekurencyjną

stosujemy naprawdę w celu zdefiniowania nie pojęcia prawdy, lecz związanego z nim innego pojęcia semantycznego - pojęcia *spełniania*. Z kolei, używając pojęcia *spełniania*, definiujemy już z łatwością pojęcie prawdy).

Na podstawie zbudowanej w ten sposób definicji rozwinąć można całą teorię prawdy. W szczególności można z niej wyprowadzić, oprócz. wszystkich równoważności kształtu (3), pewne konsekwencje natury ogólnej, na przykład słynne prawa sprzeczności i wyłączonego środka. Pierwsze z tych praw głosi, że dwa zdania, z których jedno jest zaprzeczeniem drugiego, nie mogą być zarazem prawdziwe, drugie zaś głosi, że dwa takie zdania nie mogą być zarazem fałszywe. Obydwa te prawa, należące do teorii prawdy, są oczywiście spokrewnione z dwoma prawami rachunku zdań o takich samych nazwach, ale nie powinny być one z nimi utożsamiane.

(.....)

Całość tekstu ukazała się w tomie: Alfred Tarski: Pisma logiczno-filozoficzne, tom 1: Prawda, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1995, s. 292-332.