ANDRZEJ WIŚNIEWSKI
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
Instytut Psychologii

PARADOKSY BIMODALNYCH LOGIK EPISTEMICZNYCH

Wstęp

Dysponując modalną logiką epistemiczną charakteryzującą pojęcie wiedzy (*knowledge*) oraz modalną logiką doksastyczną charakteryzującą pojęcie przekonania (*belief*), możemy budować bimodalną logikę epistemiczną charakteryzującą oba te pojęcia i łączące je związki. W logice tego rodzaju występują zwykle specyficzne aksjomaty i reguły dotyczące modalnego operatora wiedzy, ***K***, osobne aksjomaty i reguły odnoszące się do modalnego operatora przekonania, ***B***, oraz aksjomaty pomostowe, w których występują oba te operatory. Jako aksjomaty pomostowe najczęściej używane są następujące formuły:

(***KB***1) $\boldsymbol{K}p \rightarrow \boldsymbol{B}p$ („jeśli wiem, że *p*, to jestem przekonany, że *p*")
(***KB***2) $\boldsymbol{B}p \rightarrow \boldsymbol{KB}p$ („jeśli jestem przekonany, że *p*, to wiem, że jestem przekonany, że *p*")
(***KB***3) $\boldsymbol{B}p \rightarrow \boldsymbol{BK}p$ („jeśli jestem przekonany, że *p*, to jestem przekonany, że wiem, że *p*")

przy czym nie wszystkie z nich muszą występować łącznie. Celem tego tekstu jest przedstawienie pewnych nieintuicyjnych – i w tym sensie paradoksalnych – następstw przyjmowania powyższych aksjomatów pomostowych. Niektóre, ale nie wszystkie, z tych następstw są od dawna znane.

1. Aksjomat *KB*1

Rozważmy zdaniową bimodalną logikę epistemiczną, *L*, w języku której występują operatory wiedzy, ***K***, oraz przekonania, ***B***. Pojęcie formuły języka logiki *L* określamy standardowo; symboli $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\wedge$, $\vee$ używamy odpowiednio jako znaków negacji, implikacji, równoważności, koniunkcji i alternatywy, natomiast p, q, ... to zmienne zdaniowe. Greckie litery ϕ, φ, γ to metajęzykowe zmienne przebiegające zbiór formuł.

Załóżmy, że logika L jest nadbudowana nad klasycznym rachunkiem zdań (dalej: KRZ) oraz że jej pierwotnymi regułami inferencyjnymi są co najmniej reguła odrywania RO oraz reguła podstawiania RP. **Aksjomatem rachunkowo-zdaniowym** logiki L jest dowolna formuła języka tej logiki, którą można otrzymać z jakiejś tezy KRZ poprzez konsekwentne zastąpienie zmiennych zdaniowych formułami języka logiki L.

Powyższe ogólne założenia dotyczą całości niniejszego szkicu.

1.1. Paradoks doskonałości przekonań (*paradox of the perfect believer*)

Przypuśćmy, że wśród tez logiki L znajdują się formuły:

(5_K) $\neg Kp \rightarrow K\neg Kp$

(D_B) $Bp \rightarrow \neg B\neg p$

(***KB***1) $Kp \rightarrow Bp$

Formuła $\mathbf{5}_K$ to epistemiczny odpowiednik (dla operatora wiedzy) modalnej formuły **5**, mającej postać:

$$\neg\Box p \rightarrow \Box\neg\Box p.$$

Formuła $\mathbf{5}_K$ wyraża własność negatywnej introspekcji: jeśli nie jest tak, że podmiot wie, że p, to podmiot wie, że nie jest tak, że wie, że p. Mówiąc ogólnie: jeśli czegoś nie wiem, to wiem, że tego nie wiem. Formuła $\mathbf{D}_B$ to odpowiednik (dla operatora przekonań) modalnej formuły **D**, mającej postać:

$$\Box p \rightarrow \neg\Box\neg p.$$

Formułę $\mathbf{D}_B$ można interpretować jako nakładającą swoisty warunek niesprzeczności na zbiór przekonań: jeśli podmiot jest przekonany, że p, to nie jest tak, że podmiot jest przekonany, że $\neg p$. Sens intuicyjny formuły ***KB***1 to: jeśli podmiot wie, że p, to podmiot jest przekonany, że p. Innymi słowy, aby coś było wiedzą, musi być również przekonaniem.

Gdy powyższe warunki są spełnione, tezą logiki L jest następująca formuła (fakt ten jest dobrze znany; por. Gochet i Gribomont, 2006, s. 114):

(I) $BKp \rightarrow Kp$

A oto jej dowód. Napis ARZ, występujący w informacji dowodowej, wskazuje, że rozważana formuła jest aksjomatem rachunkowozdaniowym.

1. $Kp \to Bp$	(KB1)
2. $K\neg Kp \to B\neg Kp$	(1RP:$p/\neg Kp$)
3. $Bp \to \neg B\neg p$	(D_B)
4. $(Bp \to \neg B\neg p) \to (B\neg p \to \neg Bp)$	(ARZ)
5. $B\neg p \to \neg Bp$	(4, 3 RO)
6. $B\neg Kp \to \neg BKp$	(5 RP: p/Kp)
7. $\neg Kp \to K\neg Kp$	(5_K)
8. $(\neg Kp \to K\neg Kp) \to ((K\neg Kp \to B\neg Kp) \to (\neg Kp \to B\neg Kp))$	(ARZ)
9. $(K\neg Kp \to B\neg Kp) \to (\neg Kp \to B\neg Kp)$	(8, 7 RO)
10. $\neg Kp \to B\neg Kp$	(9, 2 RO)
11. $(\neg Kp \to B\neg Kp) \to ((B\neg Kp \to \neg BKp) \to (BKp \to Kp))$	(ARZ)
12. $(B\neg Kp \to \neg BKp) \to (BKp \to Kp)$	(11, 10 RO)
13. $BKp \to Kp$	(12, 6 RO)

Sens intuicyjny formuły (I) jest następujący: „jeśli podmiot jest przekonany, że wie, że p, to podmiot wie, że p". Jest to nieco paradoksalne, stąd też w literaturze przedmiotu formułę (I) uważa się za wyrażającą *paradox of the perfect believer*; będę go dalej określać mianem **paradoksu doskonałości przekonań**.

1.2. Paradoks epistemicznej niedostępności fałszu

Gdy dodatkowo przyjmiemy, iż w logice L obowiązuje formuła będąca epistemicznym odpowiednikiem modalnej formuły T (mającej postać $\Box p \to p$), tj. formuła:

(T_K) $Kp \to p$

w konsekwencji otrzymamy tezę jeszcze bardziej paradoksalną:

(II) $BKp \to p$

Formuła (I) głosi: „jeśli podmiot jest przekonany, że wie, iż zachodzi p, to p zachodzi"[1]. Wynika stąd, że nie można być przekonanym o tym, iż wiemy, że p wówczas, gdy p nie zachodzi (*one cannot believe to know a false proposition*).

[1] Przykładowo: Jeśli Euzebiusz jest przekonany, że wie, że Eulalia go zdradza, to Eulalia go zdradza. Tak więc Euzebiusz nie może być przekonany, że wie, iż Eulalia go zdradza, gdy Eulalia go nie zdradza. Jak wiadomo, w życiu bywa inaczej.

Nazwiemy to **paradoksem epistemicznej niedostępności fałszu**. Paradoks ten jest znany. Prosty dowód formuły (II) przebiega następująco:

1. $BKp \to Kp$ (formuła I)
2. $Kp \to p$ (T_K)
3. $BKp \to p$ (1, 2 RSH)

W powyższym dowodzie została użyta wtórna reguła inferencyjna RSH, mająca postać:

$$\varphi \to \phi, \phi \to \gamma \,/\, \varphi \to \gamma$$

Podobnie będziemy postępować dalej. Jest oczywiste, że każde użycie reguły RSH można wyeliminować, korzystając z odpowiedniego podstawienia prawa sylogizmu hipotetycznego i dwukrotnie stosując regułę odrywania.

1.3. Strategie obrony

Istnieje kilka strategii obrony przed koniecznością uznania wskazanych wyżej paradoksalnych stwierdzeń.

Strategia najdalej idąca polega na zakwestionowaniu założenia, iż bimodalna logika epistemiczna powinna być nadbudowana nad KRZ, i przyjęciu jako jej bazy jakiejś słabszej logiki nieklasycznej. Jak pokazują przedstawione wyżej dowody formuł (I) i (II), tezą takiej logiki nie powinno być co najmniej jedno z następujących praw KRZ:

$$(p \to \neg q) \to (q \to \neg p)$$
$$(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$$

Ponieważ jednak formuły (I) czy (II) można udowodnić korzystając z różnych zestawów aksjomatów rachunkowozdaniowych, głębokość wymaganej ingerencji w KRZ jest trudna do oszacowania.

Kolejna możliwa strategia to ograniczenie zasięgu stosowania reguły podstawiania: wystarczy przyjąć, że podstawianie formuł zmodalizowanych za zmienne zdaniowe występujące w zasięgu operatorów modalnych jest niedopuszczalne (w wersji minimalistycznej ograniczenie to dotyczy tylko formuły ***KB*1**). Strategia taka była już stosowana. Zauważmy, że jej zastosowanie jest równoznaczne z uznaniem, że preferowana bimodalna zdaniowa logika epistemiczna jest logiką substrukturalną.

Najcześciej stosowana strategia polega na kwestionowaniu specyficznych przesłanek modalnych dowodów formuł (I) i (II). W naszym przypadku są nimi, oprócz formuły ***KB*1**, formuły $\mathbf{D}_B$, $\mathbf{5}_K$ oraz T_K. Formuła T_K wyraża jednak podstawową własność klasycznie rozumianego operatora wiedzy i jej odrzucenie sprawia, że przestajemy mówić o tak rozumianej wiedzy. (Mówiąc o odrzuceniu formuły, nie mamy tu – i dalej – na myśli uznania tej formuły za fałszywą, lecz wykluczenie rozważanej formuły ze zbioru tez preferowanej logiki). Formuły $\mathbf{D}_B$ i $\mathbf{5}_K$ wyrażają odpowiednio niesprzeczność zbioru przekonań oraz własność negatywnej introspekcji operatora wiedzy. W literaturze przedmiotu optowano niekiedy za rozwiązaniem polegającym na odrzuceniu formuły $\mathbf{D}_B$ (por. Gochet i Gribomont, 2006, s. 115-116). Najczęściej spotykaną opcją jest jednak odrzucenie formuły $\mathbf{5}_K$. Jak wiadomo, istnieje wiele argumentów prowadzących do zakwestionowania epistemicznej zasady negatywnej introspekcji oraz wiele logik wiedzy, w których formuła $\mathbf{5}_K$ nie jest tezą. Wyprowadzalność paradoksalnych stwierdzeń (I) i (II) na podstawie formuły $\mathbf{5}_K$ uważa się za dodatkowy argument na rzecz konieczności odrzucenia zasady negatywnej introspekcji.

1.4. Nie tylko zasada negatywnej introspekcji: rola formuły Brouwera

Formułę (II), wyrażającą paradoks epistemicznej niedostępności fałszu, można jednak wyprowadzić nie korzystając z formuły $\mathbf{5}_K$. W szczególności, formuła (II) posiada dowód, w którym zamiast formuły $\mathbf{5}_K$ wykorzystujemy istotnie słabszą formułę:

($\mathbf{B}_K$*) $\neg p \rightarrow K\neg Kp$

aksjomat $KB1$ oraz formułę $\mathbf{D}_B$, nie korzystamy w nim natomiast z formuły $\mathbf{T}_K$. Oto ten dowód:

1. $\neg p \rightarrow K\neg Kp$	($\mathbf{B}_K$*)
2. $Kp \rightarrow Bp$	($KB1$)
3. $K\neg Kp \rightarrow B\neg Kp$	(2RP:$p/\neg Kp$)
4. $\neg p \rightarrow B\neg Kp$	(1, 3 RSH)
5. $(\neg p \rightarrow B\neg Kp) \rightarrow (\neg B\neg Kp \rightarrow p)$	(ARZ)
6. $\neg B\neg Kp \rightarrow p$	(5, 4 RO)
7. $Bp \rightarrow \neg B\neg p$	($\mathbf{D}_B$)
8. $BKp \rightarrow \neg B\neg Kp$	(7 RP: p/Kp)
9. $BKp \rightarrow p$	(8, 6 RSH)

Tak więc aby zapewnić niedowodliwość formuły (II), powinniśmy również, *ceteris paribus*, odrzucić formułę $\mathbf{B}_K$*. Głosi ona, iż „jeśli nie jest tak, że p, to wiadomo, że nie jest tak, że wiadomo, że p”. Innymi słowy, jeśli p jest fałszem, to wiadomo, że fałszem jest to, że wiadomo, że *p*. Powyższe, wymagające odrzucenia, stwierdzenie wydaje się jednak zgodne z intuicjami, jakie łączymy z klasycznym pojęciem wiedzy. Skoro wiedza, że *p*, zakłada prawdziwość tego, że *p*, to fałszywość *p* pociąga wiedzę o tym, że nie wiemy, że *p*.

Formuła $\mathbf{B}_K^*$ to w istocie epistemiczny wariant formuły **B** Brouwera, mającej postać:

$$p \to \Box\neg\Box\neg p$$

Jej epistemiczny odpowiednik dla operatora wiedzy to formuła:

$(\mathbf{B}_K)$ $p \to K\neg K\neg p$

Przypuśćmy, że w logice *L* regułą inferencyjną – pierwotną lub wtórną – jest następująca reguła ekstensjonalności RE_K:

$$\varphi \leftrightarrow \phi \,/\, K\varphi \leftrightarrow K\phi$$

Korzystając z niej, możemy wyprowadzić formułę $\mathbf{B}_K^*$ z formuły $\mathbf{B}_K$ w następujący sposób:[2]

1. $p \to K\neg K\neg p$	$(\mathbf{B}_K)$
2. $\neg p \to K\neg K\neg\neg p$	(1 RP: $p/\neg p$)
3. $\neg\neg p \leftrightarrow p$	(ARZ)
4. $K\neg\neg p \leftrightarrow Kp$	(3 RE_K)
5. $(K\neg\neg p \leftrightarrow Kp) \to (\neg K\neg\neg p \leftrightarrow \neg Kp)$	(ARZ)
6. $\neg K\neg\neg p \leftrightarrow \neg Kp$	(5, 4 RO)
7. $K\neg K\neg\neg p \leftrightarrow K\neg Kp$	(6 RE_K)
8. $(K\neg K\neg\neg p \leftrightarrow K\neg Kp) \to (K\neg K\neg\neg p \to K\neg Kp)$	(ARZ)
9. $K\neg K\neg\neg p \to K\neg Kp$	(8, 7 RO)
10. $\neg p \to K\neg Kp$	(2, 9 RSH)

Wprowadźmy pewne konwencje umożliwiające zwięzłą prezentację uzyskiwanych wyników. Niech:

$$\Gamma \oplus \varphi =_{df} \Gamma \cup \{\varphi\}$$
$$\Phi =_{df} \{KB1, \mathrm{D}_B, 5_K\}$$
$$\Psi =_{df} \{KB1, \mathrm{D}_B, \mathbf{B}_K^*\}$$

---

[2] Wyprowadzenie formuły $\mathbf{B}_K$ z formuły $\mathbf{B}_K^*$ nie wymaga stosowania reguły RE_K, *viz.*:

1. $\neg p \to K\neg Kp$	$(\mathbf{B}_K^*)$
2. $\neg\neg p \to K\neg K\neg p$	(1 RP: $p/\neg p$)
3. $p \to \neg\neg p$	(ARZ)
4. $p \to K\neg K\neg p$	(3, 2 RSH)

Mówimy, że formuła φ jest **klasycznie wyprowadzalna** za zbioru formuł Γ (co zapisujemy $\Gamma \vdash_{KRZ} \varphi$) wówczas, gdy istnieje co najmniej jedno wyprowadzenie formuły φ ze zbioru formuł Γ i ewentualnie zbioru aksjomatów KRZ, w którym to wyprowadzeniu jedynymi zastosowanymi regułami inferencyjnymi są reguła odrywania RO oraz reguła podstawiania RP. (Ponieważ RSH jest regułą wtórną, formuła wyprowadzalna za pomocą m.in. tej reguły jest również klasycznie wyprowadzalna.) Wykazaliśmy, iż zachodzą:

Wniosek 1: $\Phi \vdash_{KRZ} \boldsymbol{BKp \rightarrow Kp}$

Wniosek 2: $\Psi \vdash_{KRZ} \boldsymbol{BKp \rightarrow p}$

Wniosek 3: $\Phi \oplus \mathrm{T}_K \vdash_{KRZ} \boldsymbol{BKp \rightarrow p}$

Logiki wiedzy i przekonań używane w budowie bimodalnych epistemicznych logik zdaniowych są zwykle logikami normalnymi. Znaczy to, że ich tezami są epistemiczne i doksastyczne wersje formuły **K**, tj. formuły:

(K_K) $K(p \rightarrow q) \rightarrow (Kp \rightarrow Kq)$

(K_B) $B(p \rightarrow q) \rightarrow (Bp \rightarrow Bq)$

oraz że obowiązują w nich, oprócz reguł odrywania i podstawiania, również reguły Gödla dla operatorów ***K*** i ***B***, tj. reguły:

RG_K: φ / $\boldsymbol{K}\varphi$ $\qquad$ RG_B: φ / $\boldsymbol{B}\varphi$

Paradoks doskonałości przekonań oraz paradoks epistemicznej niedostępności fałszu powstają zatem wówczas, gdy logiką wiedzy budowanej bimodalnej logiki epistemicznej jest **S5** (tj. $\mathrm{K}_K\mathrm{T}_K5_K$), a logiką przekonań jest logika **D** (tj. $\mathrm{K}_B\mathrm{D}_B$). Natomiast paradoks epistemicznej niedostępności fałszu powstaje także wówczas, gdy logiką wiedzy jest – istotnie słabsza od **S5** – logika Brouwera **B** (tj. $\mathrm{K}_K\mathrm{T}_K\mathrm{B}_K$), a logiką przekonań jest **D**[3].

1.5. Paradoks wyznawcy

Przypuśćmy teraz, że tezą logiki *L* jest następująca formuła:

(4_K) $\boldsymbol{Kp \rightarrow KKp}$

będącej epistemicznym odpowiednikiem formuły 4, tj. $\Box p \rightarrow \Box\Box p$. Formuła 4_K wyraża własność pozytywnej introspekcji (wiedzy): jeśli wiadomo, że *p*, to wiadomo, że wiadomo, że *p*. Korzystając z formuły (I), możemy wyprowadzić formułę:

(III) $\boldsymbol{BKp \rightarrow KKp}$

[3] Reguła RE_K jest regułą wtórną w logice Brouwera **B**.

Istotnie, mamy:

1. $BKp \rightarrow Kp$ (formuła I)
2. $Kp \rightarrow KKp$ (4_K)
3. $BKp \rightarrow KKp$ (1, 2 RSH)

Formuła (III) głosi: „jeśli podmiot jest przekonany, że wie, że *p*, to podmiot wie, że wie, że *p*". Innymi słowy, przekonanie o posiadaniu wiedzy na dany temat jest wiedzą o posiadaniu wiedzy na ten temat.

To, że podmiot posiada wiedzę czy przekonanie na jakiś temat, można potraktować jako zdarzenia. Z kolei zarówno przekonania, jak i wiedzę interpretuje się czasami w kategoriach prawdopodobieństwa subiektywnego (zob. Lenzen, 2004). Wówczas „podmiot *x* jest przekonany, że ϕ" znaczy: „dla podmiotu *x* prawdopodobieństwo subiektywne tego, że zachodzi (zdarzenie opisywane przez) ϕ jest większe od 1/2". Z kolei „podmiot *x* wie, że ϕ" znaczy: „ϕ oraz dla podmiotu *x* prawdopodobieństwo subiektywne tego, że zachodzi (zdarzenie opisywane przez) ϕ jest równe 1". Formuła (III) implikuje wówczas następujące paradoksalne stwierdzenie: „jeśli prawdopodobieństwo subiektywne tego, że wiem, że *p* jest większe od 1/2, to prawdopodobieństwo subiektywne tego, że wiem, że *p* jest równe 1". Nazwijmy to **paradoksem wyznawcy**.

Na mocy wniosku 1 otrzymujemy:

Wniosek 4: $\Phi \oplus 4_K \vdash_{\mathrm{KRZ}} BKp \rightarrow KKp$

Zatem paradoks wyznawcy pojawia się wówczas, gdy logiką wiedzy budowanej bimodalnej logiki epistemicznej jest **S5** (jako że formuła 4 jest dowodliwa w **S5**). Warto jednak zauważyć, że pewien analogon paradoksu wyznawcy pojawia się wtedy, gdy jako logikę wiedzy weźmiemy zawarte właściwie w **S5** rozszerzenie logiki Brouwera **B**[4]. Przykładowo, niech logiką wiedzy budowanej logiki bimodalnej będzie logika **B** rozszerzona o aksjomat:

(4_{K2}) $KKp \rightarrow KKKp$

Przypuśćmy dalej, że regułą inferencyjną – pierwotną lub wtórną – rozważanej logiki bimodalnej jest następująca reguła regularności dla operatora *B*:

RR_B: $\varphi \rightarrow \phi \,/\, B\varphi \rightarrow B\phi$

Korzystając z formuły (I), wyrażającej paradoks doskonałości przekonań, możemy teraz wyprowadzić następującą formułę:

(IV) $BKKp \rightarrow KKKp$

[4] Logikom takim poświęcona jest monografia Zofii Kostrzyckiej (2010).

Istotnie, mamy:

1. $KKp \rightarrow KKKp$ — (4_{K2})
2. $BKKp \rightarrow BKKKp$ — $(1\ \mathrm{RR}_B)$
3. $BKp \rightarrow Kp$ — (formuła I)
4. $BKKKp \rightarrow KKKp$ — (3 RP: p/KKp)
5. $BKKp \rightarrow KKKp$ — (4, 1 RSH)

Jeśli więc prawdopodobieństwo subiektywne tego, że KKp jest większe od 1/2, to prawdopodobieństwo subiektywne tego, że KKp jest równe 1.

2. Aksjomaty *KB*3 i *KB*1

Rozważmy teraz aksjomat pomostowy:

($KB3$) $Bp \rightarrow BKp$

jednocześnie zakładając, że obowiązuje aksjomat pomostowy $KB1$ i w konsekwencji – zależnie od postaci dodatkowych założeń – formuły (I) i/lub (II).

2.1. Paradoks nieomylności

Korzystając z formuły (II) oraz aksjomatu $KB3$, natychmiast dostajemy paradoksalną formułę:

(V) $Bp \rightarrow p$

Istotnie, mamy:

1. $Bp \rightarrow BKp$ — ($KB3$)
2. $BKp \rightarrow p$ — (formuła II)
3. $Bp \rightarrow p$ — (1, 2 RSH)

Formuła (V) głosi, iż „gdy podmiot jest przekonany, że zachodzi *p*, to *p* zachodzi". W logice epistemicznej nosi to nazwę **paradoksu nieomylności** (*paradox of infallibility*). Jak pokazaliśmy wyżej, aby formuła (II) była tezą, wystarczy, aby tezami były formuły $KB1$, D_B oraz B_K*. Gdy dodatkowo założymy formułę $KB3$, w konsekwencji pojawia się formuła (V) wyrażająca paradoks nieomylności. Rzecz jasna będzie tak również wówczas[5], gdy tezami są formuły $KB3$, $KB1$, D_B, T_K i 5_K. Zachodzą:

[5] I ten fakt jest od dawna znany.

Wniosek 5: $\Psi \oplus KB3 \vdash_{\mathrm{KRZ}} Bp \rightarrow p$

Wniosek 6: $\Phi \oplus KB3 \oplus \mathrm{T}_K \vdash_{\mathrm{KRZ}} Bp \rightarrow p$

Paradoks nieomylności powstaje zatem zarówno wówczas, gdy logiką wiedzy budowanej bimodalnej logiki epistemicznej jest **S5**, jak i gdy jest nią logika **B** – rzecz jasna zakładając oba aksjomaty pomostowe, *KB*1 i *KB*3, oraz przyjmując, że logiką przekonań jest (co najmniej) **D**.

2.2. Nieodróżnialność przekonań i wiedzy

Korzystając z formuły (II) oraz z aksjomatów pomostowych *KB*1 i *KB*3, można również wyprowadzić następującą, paradoksalną tezę:

(VI) $Bp \leftrightarrow Kp$

głoszącą, że **przekonanie i wiedza są nieodróżnialne.** Rozumujemy następująco:

1. $Bp \rightarrow BKp$	(*KB*3)
2. $BKp \rightarrow BKKp$	(1 RP: p/Kp)
3. $BKp \rightarrow p$	(formuła II)
4. $BKKp \rightarrow Kp$	(3 RP: p/Kp)
5. $BKp \rightarrow Kp$	(2, 4 RSH)
6. $Bp \rightarrow Kp$	(1, 5 RSH)
7. $Kp \rightarrow Bp$	(*KB*1)
8. $(Bp \rightarrow Kp) \rightarrow ((Kp \rightarrow Bp) \rightarrow (Bp \leftrightarrow Kp))$	(ARZ)
9. $(Kp \rightarrow Bp) \rightarrow (Bp \leftrightarrow Kp)$	(8, 6 RO)
10. $Bp \leftrightarrow Kp$	(9, 7 RO)

Formułę (VI), wyrażającą nieodróżnialność przekonań i wiedzy, można również wyprowadzić z aksjomatów *KB*3 i *KB*1 w oparciu o formułę (I). Rozumujemy najpierw tak:

1. $Bp \rightarrow BKp$	(*KB*3)
2. $BKp \rightarrow Kp$	(formuła I)
3. $Bp \rightarrow Kp$	(1, 2 RSH)

a następnie postępujemy tak samo, jak w poprzednio przedstawionym wyprowadzeniu formuły (VI). Zachodzą:

Wniosek 7: $\Psi \oplus KB3 \vdash_{\mathrm{KRZ}} Bp \leftrightarrow Kp$

Wniosek 8: $\Phi \oplus \mathrm{T}_K \oplus KB3 \vdash_{\mathrm{KRZ}} Bp \leftrightarrow Kp$

Wniosek 9: $\Phi \oplus KB3 \vdash_{\mathrm{KRZ}} Bp \leftrightarrow Kp$

Jak pokazują wnioski 7 i 8, nieodróżnialność przekonań i wiedzy występuje w tych samych okolicznościach, w których mamy do czynienia z paradoksem nieomylności. Z kolei wnioski 7 i 9 pokazują, że nieodróżnialność wiedzy i przekonań można otrzymać niezależnie od formuły T_K.

2.3. Paradoks urojeniowości

Jak dotąd rozważaliśmy wyprowadzalność klasyczną. Przypuśćmy teraz, że dysponujemy dodatkową regułą inferencyjną RR_K mającą postać:

$$\varphi \rightarrow \phi \ / \ K\varphi \rightarrow K\phi$$

(RR_K to reguła regularności dla *K*). Możemy wówczas wyprowadzić formułę:

(VII) $KBp \rightarrow p$

Treść intuicyjną formuły (VII) można wyrazić następująco: „jeśli wiem, że jestem przekonany, że *p*, to *p* zachodzi/jest faktem”[6]. Innymi słowy, wiedza o posiadaniu przekonania, że coś jest faktem, pociąga za sobą to, że jest to faktem. Jest to paradoksalne. Treść intuicyjną formuły (VII) można by zatem określić mianem **paradoksu urojeniowości**.

Oto wyprowadzenie formuły (VII):

1. $Bp \rightarrow BKp$	($KB3$)
2. $KBp \rightarrow KBKp$	(1 RR_K)
3. $BKp \rightarrow p$	(formuła II)
4. $KBKp \rightarrow Kp$	(3 RR_K)
5. $KBp \rightarrow Kp$	(2, 4 RSH)
6. $Kp \rightarrow p$	(T_K)
7. $KBp \rightarrow p$	(5, 6 RSH)

Skorzystaliśmy z formuły (II). Sytuacja jest analogiczna, gdy – alternatywnie – użyjemy formuły (I):

1. $Bp \rightarrow BKp$	($KB3$)
2. $KBp \rightarrow KBKp$	(1 RR_K)
3. $Kp \rightarrow p$	(T_K)

[6] Przykładowo: Jeśli wiem, że jestem przekonany, że jestem Napoleonem, to jestem Napoleonem.

4. $KBKp \rightarrow BKp$ (3RP:p/BKp)

5. $KBp \rightarrow BKp$ (2, 4 RSH)

6. $BKp \rightarrow Kp$ (formuła I)

7. $KBp \rightarrow Kp$ (5, 6 RSH)

8. $KBp \rightarrow p$ (7, 3 RSH)

Pisząc $\Gamma \vdash_{\mathrm{KRZ},\ \mathrm{RR}_K} \varphi$, mamy na myśli, że istnieje co najmniej jedno wyprowadzenie formuły φ ze zbioru formuł Γ i ewentualnie zbioru aksjomatów KRZ, w którym to wyprowadzeniu jedynymi zastosowanymi regułami inferencyjnymi są reguła odrywania RO**,** reguła podstawiania RP **oraz** reguła regularności RR_K. Biorąc pod uwagę wnioski 1 i 2, otrzymujemy:

Wniosek 10: $\Psi \oplus \mathrm{T}_K \oplus KB3 \vdash_{\mathrm{KRZ},\ \mathrm{RR}_K} KBp \rightarrow p$

Wniosek 11: $\Phi \oplus \mathrm{T}_K \oplus KB3 \vdash_{\mathrm{KRZ},\ \mathrm{RR}_K} KBp \rightarrow p$

Paradoks urojeniowości powstaje zatem, gdy logiką wiedzy budowanej bimodalnej logiki epistemicznej jest czy to **S5**, czy logika Brouwera **B**, natomiast logiką przekonań jest (co najmniej) logika **D** – rzecz jasna zakładając oba aksjomaty pomostowe, *KB*1 i *KB*3.

2.4. Wiedza jako możliwość posiadania przekonania

Załóżmy, że w logice *L* tezami są:

(D_B) $Bp \rightarrow \neg B\neg p$

(4_B) $Bp \rightarrow BBp$

(5_B) $\neg Bp \rightarrow B\neg Bp$

(4_K) $Kp \rightarrow KKp$

(5^*_K) $p \rightarrow (\neg Kp \rightarrow K\neg Kp)$

oraz że obowiązują aksjomaty pomostowe *KB*1 i *KB*3. Przyjmijmy ponadto, że regułą inferencyjną – pierwotną lub wtórną – logiki *L* jest reguła RR_B regularności ze względu na *B*:

$$\varphi \rightarrow \phi \ / \ B\varphi \rightarrow B\phi$$

Wówczas tezą logiki *L* jest formuła:

(VIII) $p \rightarrow (\neg B\neg Bp \leftrightarrow Kp)$

Formułę postaci $\neg B\neg\varphi$ możemy odczytywać: „dopuszczam, że φ". Treść intuicyjna formuły (VIII) to: „jeśli *p* jest faktem, to dopuszczanie, że jest się przekonanym, że *p* jest tym samym, co wiedza, że *p*”. Wniosek taki trudno uznać za zgodny z intuicjami.

Oto wyprowadzenie formuły (VIII):

1. $Kp \to Bp$	(KB1)
2. $K\neg Kp \to B\neg Kp$	(1RP:$p/\neg Kp$)
3. $Bp \to \neg B\neg p$	(D_B)
4. $(Bp \to \neg B\neg p) \to (B\neg p \to \neg Bp)$	(ARZ)
5. $B\neg p \to \neg Bp$	(4, 3 RO)
6. $B\neg Kp \to \neg BKp$	(5 RP: p/Kp)
7. $p \to (\neg Kp \to K\neg Kp)$	(5^*_K)
8. $(p \to (\neg Kp \to K\neg Kp)) \to (p \wedge \neg Kp \to K\neg Kp)$	(ARZ)
9. $p \wedge \neg Kp \to K\neg Kp$	(8, 7 RO)
10. $p \wedge \neg Kp \to B\neg Kp$	(9, 2 RSH)
11. $p \wedge \neg Kp \to \neg BKp$	(10, 6 RSH)
12. $\neg Bp \to B\neg Bp$	(5_B)
13. $\neg BKp \to B\neg BKp$	(12RP:p/Kp)
14. $p \wedge \neg Kp \to B\neg BKp$	(11,13RSH)
15. $Bp \to BKp$	(KB3)
16. $(Bp \to BKp) \to (\neg BKp \to \neg Bp)$	(ARZ)
17. $\neg BKp \to \neg Bp$	(16, 15 RO)
18. $B\neg BKp \to B\neg Bp$	(17 RR_B)
19. $p \wedge \neg Kp \to B\neg Bp$	(14,18RSH)
20. $(p \wedge \neg Kp \to B\neg Bp) \to (p \to (\neg B\neg Bp \to Kp))$	(ARZ)
21. $p \to (\neg B\neg Bp \to Kp)$	(20, 19 RO)
22. $Kp \to \neg B\neg p$	(1, 3 RSH)
23. $KKp \to \neg B\neg Kp$	(22RP:p/Kp)
24. $(Kp \to Bp) \to (\neg Bp \to \neg Kp)$	(ARZ)
25. $\neg Bp \to \neg Kp$	(24, 1 RO)
26. $B\neg Bp \to B\neg Kp$	(25 RR_B)
27. $(B\neg Bp \to B\neg Kp) \to (\neg B\neg Kp \to \neg B\neg Bp)$	(ARZ)
28. $\neg B\neg Kp \to \neg B\neg Bp$	(27, 26 RO)
29. $KKp \to \neg B\neg Bp$	(23,28RSH)
30. $Kp \to KKp$	(4_K)

31. $Kp \rightarrow \neg B\neg Bp$ (30,29RSH)
32. $(Kp \rightarrow \neg B\neg Bp) \rightarrow (p \rightarrow (Kp \rightarrow \neg B\neg Bp))$ (ARZ)
33. $p \rightarrow (Kp \rightarrow \neg B\neg Bp)$ (32, 31 RO)
34. $(p \rightarrow (Kp \rightarrow \neg B\neg Bp)) \rightarrow ((p \rightarrow (\neg B\neg Bp \rightarrow Kp)) \rightarrow (p \rightarrow (\neg B\neg Bp \leftrightarrow Kp)))$ (ARZ)
35. $(p \rightarrow (\neg B\neg Bp \rightarrow Kp)) \rightarrow (p \rightarrow (\neg B\neg Bp \leftrightarrow Kp))$ (34, 33 RO)
36. $p \rightarrow (\neg B\neg Bp \leftrightarrow Kp)$ (35, 21 RO)

W powyższym wyprowadzeniu nie korzystamy ani z formuły $\mathbf{B}_K{}^*$, ani z formuły $\mathbf{5}_K$. Formuła (VIII) jest dowodliwa wówczas, gdy logiką wiedzy budowanej bimodalnej logiki epistemicznej jest **S4.4**, a logiką przekonań jest **KD45**.

3. Aksjomaty *KB*2 i *KB*1

Jak dotąd rozważaliśmy paradoksalne następstwa przyjęcia, że wiedza i przekonania są powiązane w sposób wskazywany przez aksjomaty pomostowe ***KB***1 i ***KB***3. Zobaczmy teraz, co się stanie, gdy zamiast aksjomatu ***KB***3 przyjmiemy aksjomat pomostowy ***KB***2. Przypomnijmy, że ma on postać:

$$Bp \rightarrow KBp$$

3.1. Paradoks wyznawcy po raz drugi

Następstwa takiego kroku nie będą tak daleko idące, jak w przypadku aksjomatu ***KB***3. Jednakże korzystając z reguły RR_K, w oparciu m.in. o formułę (II) można wyprowadzić formułę:

(III) $BKp \rightarrow KKp$

nie odwołując się do formuły 4_K. Przykładowo, można rozumować tak:

1. $Bp \rightarrow KBp$ (***KB***2)
2. $BKp \rightarrow p$ (formuła II)
3. $KBKp \rightarrow Kp$ (2 RR_K)
4. $BKp \rightarrow KBKp$ (1 RP: p/Kp)
5. $BKp \rightarrow Kp$ (4, 3 RSH)
6. $KBKp \rightarrow KKp$ (7 RR_K)
7. $BKp \rightarrow KKp$ (4, 6 RSH)

Sytuacja nie ulega zmianie, gdy zamiast formuły (II) użyjemy formuły (I).

1. $Bp \to KBp$	(KB2)
2. $BKp \to Kp$	(formuła I)
3. $BKp \to KBKp$	(1 RP: p/Kp)
4. $KBKp \to KKp$	(2 RR_K)
5. $BKp \to KKp$	(3, 4 RSH)

Mamy zatem:

Wniosek 10: $\Psi \oplus KB2 \vdash_{\mathrm{KRZ},\ \mathrm{RR}_K} BKp \to KKp$

Wniosek 11: $\Phi \oplus KB2 \vdash_{\mathrm{KRZ},\ \mathrm{RR}_K} BKp \to KKp$

Przypomnijmy (por. **1.5**), że formuła (III) implikuje następujące paradoksalne stwierdzenie: „jeśli prawdopodobieństwo subiektywne tego, że wiem, że *p*, jest większe od 1/2, to prawdopodobieństwo subiektywne tego, że wiem, że *p*, jest równe 1".

Podobny efekt otrzymamy zakładając, że dopuszczalne jest stosowanie reguły regularności RR_B dla operatora przekonań ***B***. Zachodzą:

Wniosek 12: $\Psi \oplus KB2 \vdash_{\mathrm{KRZ},\ \mathrm{RR}_B} BBp \to KBp$

Istotnie, mamy:

1. $Bp \to KBp$	(KB2)
2. $BBp \to BKBp$	(2 RR_B)
3. $BKp \to p$	(formuła II)
4. $BBKp \to Bp$	(3 RR_B)
5. $BBp \to Bp$	(2, 4 RSH)
6. $BBp \to KBp$	(5, 1 RSH)

Wniosek 13: $\Phi \oplus KB2 \vdash_{\mathrm{KRZ},\ \mathrm{RR}_B} BBp \to KBp$

Oto odpowiednie wyprowadzenie:

1. $Bp \to KBp$	(KB2)
2. $BBp \to BKBp$	(2 RR_B)
3. $BKp \to Kp$	(formuła I)
4. $BKBp \to KBp$	(3 RP: p/Bp)
5. $BBp \to KBp$	(2, 4 RSH)

Formuła:

(IX) $BBp \to KBp$

implikuje: „jeśli prawdopodobieństwo subiektywne tego, że jestem przekonany, że *p* jest większe od 1/2, to prawdopodobieństwo subiektywne tego, że jestem przekonany, że *p* jest równe 1". I ten wniosek trudno uznać za zgodny z intuicjami.

3.2. Redukowalność

Odnotujmy, że wnioski 10 i 11 oraz wnioski 12 i 13 można wzmocnić do równoważności. W przypadku wniosków 10 i 11 rozumujemy tak:

1. $BKp \rightarrow KKp$	(formuła III)
2. $Kp \rightarrow Bp$	(***KB***1)
3. $KKp \rightarrow BKp$	(2 RP: p/Kp)
4. $(BKp \rightarrow KKp) \rightarrow ((KKp \rightarrow BKp) \rightarrow (BKp \leftrightarrow KKp))$	(ARZ)
5. $(KKp \rightarrow BKp) \rightarrow (BKp \leftrightarrow KKp)$	(4, 1 RO)
6. $BKp \leftrightarrow KKp$	(5, 3 RO)

W przypadku wniosków 12 i 13 rozumujemy następująco:

1. $Kp \rightarrow Bp$	(***KB***1)
2. $KBp \rightarrow BBp$	(1 RP: p/Bp)
3. $BBp \rightarrow KBp$	(formuła IX)
4. $(KBp \rightarrow BBp) \rightarrow ((BBp \rightarrow KBp) \rightarrow (KBp \leftrightarrow BBp))$	(ARZ)
5. $(BBp \rightarrow KBp) \rightarrow (KBp \leftrightarrow BBp)$	(4, 2 RO)
6. $KBp \leftrightarrow BBp$	(5, 3 RO)

4. Aksjomaty *KB*2 i *KB*3

Aksjomat pomostowy ***KB***1 pełnił kluczową rolę w przedstawionych wyżej wyprowadzeniach nieintuicyjnych formuł (I)-(IX). Aksjomat ten wyraża pewną podstawową intuicję: **wiedza jest rodzajem przekonania**. Tradycja filozoficzna przekazała nam jednak pewne argumenty przeciwko takiemu ujmowaniu relacji między przekonaniem a wiedzą[7]. Ponadto istnieją bimodalne logiki epistemiczne odrzucające aksjomat pomostowy ***KB***1; klasycznym przykładem jest tu logika Voorbraka (1991). Rozważmy zatem na zakończenie bimodalną logikę episte-

[7] Zagadnienie to zostało interesująco omówione w rozdziale I monografii Marka Lechniaka (2011).

miczną, w której nie jest dowodliwa formuła ***KB***1, natomiast – tak jak w logice Voorbraka – jej tezami są formuły:

($\boldsymbol{KB}$2) $\boldsymbol{Bp} \to \boldsymbol{KBp}$

($\boldsymbol{KB}$3) $\boldsymbol{Bp} \to \boldsymbol{BKp}$

(T_K) $\boldsymbol{Kp} \to p$

a ponadto jej regułą inferencyjną – pierwotną lub wtórną – jest reguła regularności RR_B. W takiej logice tezą jest formuła:

(X) $\boldsymbol{BKp} \leftrightarrow \boldsymbol{KBp}$

wyrażająca **nieodróżnialność przekonania o posiadaniu wiedzy od wiedzy o posiadania przekonania**. Oto dowód formuły (X):

1.	$\boldsymbol{Kp} \to p$	(T_K)
2.	$\boldsymbol{BKp} \to \boldsymbol{Bp}$	(1 RR_B)
3.	$\boldsymbol{Bp} \to \boldsymbol{KBp}$	($\boldsymbol{KB}$2)
4.	$\boldsymbol{BKp} \to \boldsymbol{KBp}$	(2, 3 RSH)
5.	$\boldsymbol{KBp} \to \boldsymbol{Bp}$	(1 RP: $p/\boldsymbol{Bp}$)
6.	$\boldsymbol{Bp} \to \boldsymbol{BKp}$	($\boldsymbol{KB}$3)
7.	$\boldsymbol{KBp} \to \boldsymbol{BKp}$	(5, 6 RSH)
8.	$(\boldsymbol{BKp} \to \boldsymbol{KBp}) \to ((\boldsymbol{KBp} \to \boldsymbol{BKp}) \to (\boldsymbol{BKp} \leftrightarrow \boldsymbol{KBp}))$	(ARZ)
9.	$(\boldsymbol{KBp} \to \boldsymbol{BKp}) \to (\boldsymbol{BKp} \leftrightarrow \boldsymbol{KBp})$	(8, 4 RO)
10.	$\boldsymbol{BKp} \leftrightarrow \boldsymbol{KBp}$	(9, 7 RO)

Zagadnienie intuicyjności formuły (X) pozostawiam do rozstrzygnięcia czytelnikowi.

Literatura

Gochet P., Gribomont P. (2006), Epistemic logic, w: D.M. Gabbay, J. Woods (red.), *Handbook of the History of Logic*, t. 7: *Logic and the Modalities in the Twentieth Century*, Amsterdam: Elsevier.

Kostrzycka Z. (2010), *On Modal Systems in the Neighbourhood of the Brouwer Logic*, Wrocław: Wyd. Uniwersytetu Wrocławskiego.

Lechniak M. (2011), *Przekonania i zmiana przekonań*, Lublin: Wyd. KUL.

Lenzen W. (2004), Epistemic logic, w: I. Niiniluoto, M. Sintonen, J. Woleński (red.), *Handbook of Epistemology*, Dordrecht – Boston – London: Kluwer Academic Publishers.

Voorbraak F. (1991), The logic of objective knowledge and rational belief, w: J. van Eick, (red.), *Logic in AI (Proceedings of JELLIA '90), LNCS 478*, Berlin: Springer.