Некоторые допустимые правила для системы сократического вывода♣

А. Вишневский (Университет им. А. Мицкевича, Познань, Польша)
{Andrzej.Wisniewski@amu.edu.pl}
В. Шангин (МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия)
{shangin@philos.msu.ru}

Данная статья является продолжением [Wiśniewski, A. (2004)] и [Wiśniewski, A. and V. Shangin (2006)]. Для системы сократического вывода E^{PQ} формулируются некоторые допустимые правила, в частности правило сечения. Показывается, что правило сечения эффективно как при построении сократического доказательства, так и при извлечении контрмодели.

1. Введение

Характерной чертой метода философствования Сократа является *наведение* собеседника на правильный ответ. При этом процесс наведения (*диалог* между Сократом и его собеседниками) представлял собою, формально говоря, переход от одного вопроса, задаваемого Сократом, к другому, также задаваемого Сократом, затем к третьему и т.д. Более того, зачастую либо 1) переход от вопроса к следующему вопросу вообще не требовал никакого ответа собеседников Сократа на предыдущий вопрос, либо 2) данный ответ представлял собою одобрительные междометия и восклицания собеседников Сократа («несомненно», «не может быть иначе» и т.п.). В первом случае можно сказать, что Сократ считал, что следующий вопрос *следует* из предыдущего в том смысле, что *удачное* рассмотрение следующего вопроса влечет удачное рассмотрение предыдущего. Во втором случае можно сказать, что в процессе наведения Сократ дошел до такого вопроса, ответ на который в силу очевидности (на что указывают междометия и восклицания собеседников Сократа) не требуется.

Разумеется, мы далеки (по крайней мере, в данный момент) от мысли представить данный процесс *наведения* в виде исчисления, в котором правила представляют собою переход от вопроса к вопросу. В то же время, оставив задачу формализовать и тем самым проанализировать рассуждения Сократа средствами современной символической логики, первый автор развил идею перехода от вопроса к вопросу в виде исчисления. Причем, *доказательством* в таком исчислении (*сократическим доказательством*) являются определенные последовательности вопросов, которые заканчиваются вопросами специального вида: утвердительный ответ на такой вопрос, в известном смысле, очевиден. Историки философии справедливо отметят, что последовательный переход от проблемы к другой проблеме (подпроблеме), конечным результатом которого является обнаружение *несомненных* истин, – один из краеугольных камней картезианского метода. Однако существуют по крайней мере две причины, почему мы отдаем предпочтение вместо термина «картезианский» термину «сократический»: последний не так часто используется в философской литературе; более того, именно Сократа традиционно считают автором идеи активного использования вопросов в процессе философствования.

С другой стороны, обоснованность сократических выводов требует нестандартных методов, так как нередукционистский подход к эпистемологическому статусу такой лингвистической сущности как вопрос не позволяет оценивать вопросы (в отличие от некоторых видов повествовательных предложений) как истинные или ложные. Значит, обоснованность переходов от вопроса к вопросу невозможна средствами классической логики. Однако существует логика вопросов (*inferential erotetic logic*), предложенная первым автором, анализирующая выводы, в которых в качестве посылок и заключений используются вопросы. В задачи данной статьи не входит подробное рассмотрение этой логики. Заинтересованного читателя мы отсылаем к серии статей и монографии первого автора: [Wiśniewski, A. (1994)], [Wiśniewski, A. (1995)], [Wiśniewski, A. (1996)], [Wiśniewski, A. (2001)] и [Wiśniewski, A. (2004)].

♣ Работа выполнена при поддержке *Foundation for Polish Science.*

Статья организована следующим образом. В разделе 2 задаются необходимые языки, их семантика и синтаксис. В разделе 3 задаются правила сократического исчисления E^{PQ}, основные определения, а также формулируется теорема о семантической непротиворечивости и семантической полноте исчисления. В разделе 4 приводятся примеры сократического вывода и сократического доказательства в исчислении. В разделе 5 к исчислению E^{PQ} добавляются некоторые *обратимые* правила и отмечается различие между выводимыми и невыводимыми правилами. Для невыводимых правил показывается их допустимость в исчислении E^{PQ}. Заканчивается раздел анализом некоторых обратимых структурных правил, которые допустимы в исчислении E^{PQ}. В разделе 6 эффективность применения правила сечения демонстрируется на некоторых примерах, приведенных в разделе 4.

2. Язык, семантика и синтаксис

Для наших целей зададим два языка, $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{L^*}$. Язык $\boldsymbol{L}$ – это чистый язык классического исчисления предикатов первого порядка без функциональных символов и равенства, обогащенный счетным числом параметров τ_1, τ_2, ... Стандартно определяется понятие терма и формулы языка $\boldsymbol{L}$, а также свободного и связанного вхождения индивидной переменной в формулу. *Предложение* – это формула, в которой нет свободных вхождений переменных.

Мы строим теоретико-модельную семантику для языка $\boldsymbol{L}$, в которой параметры рассматриваются как *индивидные константы*. Моделью для языка $\boldsymbol{L}$ назовем пару $<M, \boldsymbol{f}>$, где M – непустое множество и $\boldsymbol{f}$ – интепретационная функция, обладающая следующими свойствами: (a) для любого параметра τ, $\boldsymbol{f}(\tau) \in M$, и (b) для любой предикатной константы P_i^n, $\boldsymbol{f}(P_i^n)$ – это n–местное отношение, заданное на множестве M. Стандартным образом определяются понятие выполнимости и истинности формул.

Для того чтобы задать язык $\boldsymbol{L^*}$, добавим к языку $\boldsymbol{L}$ следующие символы: $\vdash$, ?, &, <u>ng</u>. Существуют два вида формул языка $\boldsymbol{L^*}$: *повествовательные формулы* (сокращенно, п-формулы) и *вопросы*. Атомарными п-формулами языка $\boldsymbol{L^*}$ являются односукцедентные секвенции, т.е. выражения вида:

(1) $S \vdash A$

где S – это конечная (возможно пустая) последовательность предложений языка $\boldsymbol{L}$ и A – это предложение языка $\boldsymbol{L}$.

Сложные п-формулы языка $\boldsymbol{L^*}$ состоят из атомарных п-формул (т.е. односукцедентных секвенций, в дальнейшем секвенций), соединенных посредством символов & и/или <u>ng</u>. Символы & и <u>ng</u> не следует путать с символами $\wedge$ и $\neg$, т.е. со связками конъюнкции и отрицания, входящими в алфавит языка $\boldsymbol{L}$.

Вопросы языка $\boldsymbol{L^*}$ имеют вид:

(2) $?\,(S_1 \vdash A_1,\ S_2 \vdash A_2, ...,\ S_n \vdash A_n)$

где $S_1 \vdash A_1, S_2 \vdash A_2, ... , S_n \vdash A_n$ – это конечная непустая последовательность секвенций; элементы данной последовательности мы будем называть *конституэнтами* вопроса.

Следующие п-формулы являются ответами на вопрос (2):

(утвердительный ответ) $S_1 \vdash A_1$ & $(S_2 \vdash A_2$ & $(...$ & $(S_n \vdash A_n) ...))$
(отрицательный ответ) <u>ng</u>$(S_1 \vdash A_1$ & $(S_2 \vdash A_2$ & $(...$ & $(S_n \vdash A_n) ...)))$

Интуитивно вопрос (2) понимается следующим образом: «Правда ли, что $S_1 \vdash A_1$ общезначима и $S_2 \vdash A_2$ общезначима и ... и $S_n \vdash A_n$ общезначима?”. Разумеется, если $n = 1$, вопрос задается по поводу общезначимости только одной секвенции; в противном случае, вопрос задается по поводу общезначимости каждой конституэнты данного вопроса. Напомним, что секвенция $S \vdash A$ *общезначима* тогда и только тогда, когда нет такой модели для языка $\boldsymbol{L}$, в которой все предложения из S истинны, а предложение A ложно. Отметим, что вопросы, а также ответы на них задаются синтаксически.

Можно подробно задать семантику для языка ***L**** (см. [Wisniewski A. and V. Shangin]), но мы не будем здесь этого делать.

Пусть буквы A, B, C, D, ... (возможно с индексами) обозначают произвольные формулы языка ***L***. Конечные последовательности (возможно пустые) предложений языка ***L*** обозначаются буквами S, T, U, W, а конечные (возможно пустые) последовательности атомарных п-формул языка ***L**** (т.е. секвенции) обозначаются буквами Φ, Ψ, Γ. Конкатенация конечных последовательностей понимается следующим образом: конкатенацией конечной последовательности $s = \langle s_1, s_2, \ldots, s_n\rangle$ и конечной последовательности $t = \langle t_1, t_2, \ldots, t_m\rangle$ является последовательность $\langle s_1, s_2, \ldots, s_n, t_1, t_2, \ldots, t_m\rangle$. Мы будем использовать символ «’» как знак конкатенации последовательностей формул языка ***L*** и символ «;» как знак конкатенации последовательностей секвенций. Например, $S\,{}'A$ обозначает конкатенацию S и $\langle A\rangle$. Сходным образом, $\Phi\ ;\ S \vdash A$ обозначает конкатенацию Φ и $\langle S \vdash A\rangle$. В дальнейшем мы, однако, не будем использовать скобки $<\ \ >$ в том случае, когда речь идет о последовательности, состоящей только из одной секвенции. Принимая данное соглашение, можно записать вопрос (2), где $n > 1$, следующим образом:

(2’) $?\,(S_1 \vdash A_1;\ S_2 \vdash A_2; \ldots; S_n \vdash A_n)$

В метатеории мы используем теорию множеств, содержащую Аксиому выбора.

3. Исчисление сократических выводов E^{PQ}

Задаются следующие правила исчисления E^{PQ}:

Пропозициональные правила

$$\mathbf{L}_{\wedge}:\quad \frac{?\,(\Phi;\ S\,{}'A \wedge B\,{}'T \vdash C;\ \Psi)}{?\,(\Phi;\ S\,{}'A\,{}'B\,{}'T \vdash C;\ \Psi)} \qquad \mathbf{R}_{\wedge}:\quad \frac{?\,(\Phi;\ S \vdash A \wedge B;\ \Psi)}{?\,(\Phi;\ S \vdash A;\ S \vdash B;\ \Psi)}$$

$$\mathbf{L}_{\neg\vee}:\quad \frac{?\,(\Phi;\ S\,{}'\neg(A \vee B)\,{}'T \vdash C;\ \Psi)}{?\,(\Phi;\ S\,{}'\neg A\,{}'\neg B\,{}'T \vdash C;\ \Psi)} \qquad \mathbf{R}_{\neg\vee}:\quad \frac{?\,(\Phi;\ S \vdash \neg(A \vee B);\ \Psi)}{?\,(\Phi;\ S \vdash \neg A;\ S \vdash \neg B;\ \Psi)}$$

$$\mathbf{L}_{\neg\to}:\quad \frac{?\,(\Phi;\ S\,{}'\neg(A \to B)\,{}'T \vdash C;\ \Psi)}{?\,(\Phi;\ S\,{}'A\,{}'\neg B\,{}'T \vdash C;\ \Psi)} \qquad \mathbf{R}_{\neg\to}:\quad \frac{?\,(\Phi;\ S \vdash \neg(A \to B);\ \Psi)}{?\,(\Phi;\ S \vdash A;\ S \vdash \neg B;\ \Psi)}$$

$$\mathbf{L}_{\neg\wedge}:\quad \frac{?\,(\Phi;\ S\,{}'\neg(A \wedge B)\,{}'T \vdash C;\ \Psi)}{?\,(\Phi;\ S\,{}'\neg A\,{}'T \vdash C;\ S\,{}'\neg B\,{}'T \vdash C;\ \Psi)} \qquad \mathbf{R}_{\neg\wedge}:\quad \frac{?\,(\Phi;\ S \vdash \neg(A \wedge B);\ \Psi)}{?\,(\Phi;\ S\,{}'A \vdash \neg B;\ \Psi)}$$

$$\mathbf{L}_{\vee}:\quad \frac{?\,(\Phi;\ S\,{}'A \vee B\,{}'T \vdash C;\ \Psi)}{?\,(\Phi;\ S\,{}'A\,{}'T \vdash C;\ S\,{}'B\,{}'T \vdash C;\ \Psi)} \qquad \mathbf{R}_{\vee}:\quad \frac{?\,(\Phi;\ S \vdash A \vee B;\ \Psi)}{?\,(\Phi;\ S\,{}'\neg A \vdash B;\ \Psi)}$$

$$\mathbf{L}_{\to}:\quad \frac{?\,(\Phi;\ S\,{}'A \to B\,{}'T \vdash C;\ \Psi)}{?\,(\Phi;\ S\,{}'\neg A\,{}'T \vdash C;\ S\,{}'B\,{}'T \vdash C;\ \Psi)} \qquad \mathbf{R}_{\to}:\quad \frac{?\,(\Phi;\ S \vdash A \to B;\ \Psi)}{?\,(\Phi;\ S\,{}'A \vdash B;\ \Psi)}$$

$$\mathbf{L}_{\neg\neg}:\quad \frac{?\,(\Phi;\ S\,{}'\neg\neg A\,{}'T \vdash C;\ \Psi)}{?\,(\Phi;\ S\,{}'A\,{}'T \vdash C;\ \Psi)} \qquad \mathbf{R}_{\neg\neg}:\quad \frac{?\,(\Phi;\ S \vdash \neg\neg A;\ \Psi)}{?\,(\Phi;\ S \vdash A;\ \Psi)}$$

Правила для кванторов

L$_\forall$: $$\frac{?\,(\Phi;\ S\ '\forall x_i A\ 'T \vdash B;\ \Psi)}{?\,(\Phi;\ S\ '\forall x_i A\ 'A(x_i/\tau)\ 'T \vdash B;\ \Psi)}$$
x_i свободна в A;
τ – произвольный параметр

R$_\forall$: $$\frac{?\,(\Phi;\ S \vdash \forall x_i A;\ \Psi)}{?\,(\Phi;\ S \vdash A(x_i/\tau);\ \Psi)}$$
x_i свободна в A;
τ не входит в $S \vdash \forall x_i A$

L$_\exists$: $$\frac{?\,(\Phi;\ S\ '\exists x_i A\ 'T \vdash B;\ \Psi)}{?\,(\Phi;\ S\ 'A(x_i/\tau)\ 'T \vdash B;\ \Psi)}$$
x_i свободна в A;
τ не входит в $S\ '\exists x_i A\ 'T \vdash B$

R$_\exists$: $$\frac{?\,(\Phi;\ S \vdash \exists x_i A;\ \Psi)}{?\,(\Phi;\ S\ '\ \forall x_i \neg A \vdash A(x_i/\tau);\ \Psi)}$$
x_i свободна в A;
τ – произвольный параметр

Правила взаимовыразимости кванторов

L$_{\neg\forall}$: $$\frac{?\,(\Phi;\ S\ '\neg\forall x_i A\ 'T \vdash B;\ \Psi)}{?\,(\Phi;\ S\ '\exists x_i \neg A\ 'T \vdash B;\ \Psi)}$$

R$_{\neg\forall}$ $$\frac{?\,(\Phi;\ S \vdash \neg\forall x_i A;\ \Psi)}{?\,(\Phi;\ S \vdash \exists x_i \neg A;\ \Psi)}$$

L$_{\neg\exists}$: $$\frac{?\,(\Phi;\ S\ '\neg\exists x_i A\ 'T \vdash B;\ \Psi)}{?\,(\Phi;\ S\ '\forall x_i \neg A\ 'T \vdash B;\ \Psi)}$$

R$_{\neg\exists}$ $$\frac{?\,(\Phi;\ S \vdash \neg\exists x_i A;\ \Psi)}{?\,(\Phi;\ S \vdash \forall x_i \neg A;\ \Psi)}$$

Правила для вырожденных кванторов

L$_{\exists *}$: $$\frac{?\,(\Phi;\ S\ '\exists x_i A\ 'T \vdash B;\ \Psi)}{?\,(\Phi;\ S\ 'A\ 'T \vdash B;\ \Psi)}$$
x_i не свободна в A

R$_{\exists *}$: $$\frac{?\,(\Phi;\ S \vdash \exists x_i A;\ \Psi)}{?\,(\Phi;\ S \vdash A;\ \Psi)}$$
x_i не свободна в A

L$_{\forall *}$: $$\frac{?\,(\Phi;\ S\ '\forall x_i A\ 'T \vdash B;\ \Psi)}{?\,(\Phi;\ S\ 'A\ 'T \vdash B;\ \Psi)}$$
x_i не свободна в A

R$_{\forall *}$: $$\frac{?\,(\Phi;\ S \vdash \forall x_i A;\ \Psi)}{?\,(\Phi;\ S \vdash A;\ \Psi)}$$
x_i не свободна в A

Теорема 1. Все правила исчисления E^{PQ} *обратимы* в том смысле, что если вопрос Q’ получен из вопроса Q по одному из правил исчисления E^{PQ}, то каждая конституэнта (т.е. секвенция) из Q’ общезначима тогда и только тогда, когда каждая конституэнта (т.е. секвенция) из Q общезначима.

Доказательство: см. [Wiśniewski, A. and V. Shangin (2006)].

Определение 1. Последовательность (возможно, бесконечная) вопросов $<Q_1, Q_2, \ldots >$ языка ***L****** является *сократическим выводом* вопроса Q в исчислении E^{PQ}, если она удовлетворяет следующим условиям:

- $Q_1 = Q$;
- Каждый вопрос, за исключением первого, получен из предыдущего по одному из правил исчисления E^{PQ}.

Определение 2. Вопрос Q является *удачным*, если каждая конституэнта данного вопроса имеет следующий вид:

- T 'B '$U \vdash B$; или
- T 'B 'U '$\neg B$ '$W \vdash C$; или
- T '$\neg B$ 'U 'B '$W \vdash C$.

Определение 3. Пусть $S \vdash A$ является секвенцией, в предложениях которой нет вхождений параметров. Конечная последовательность вопросов $<Q_1, \ldots, Q_n>$ языка ***L**** является *сократическим доказательством секвенции* $S \vdash A$, если она удовлетворяет следующим условиям:

- $<Q_1, \ldots, Q_n>$ является сократическим выводом вопроса ? ($S \vdash A$);
- Q_n является удачным вопросом.

Если для секвенции $S \vdash A$ существует сократическое доказательство в исчислении E^{PQ}, то мы говорим, что секвенция $S \vdash A$ *доказуема* в исчислении E^{PQ}.

Теорема 2. Исчисление E^{PQ} обладает свойствами семантической непротиворечивости и семантической полноты относительно чистого классического исчисления предикатов первого порядка, т.е. для любой секвенции, в предложениях которой нет вхождений параметров, верно: она доказуема в исчислении E^{PQ} тогда и только тогда, когда она общезначима.

Доказательство: см. [Wiśniewski, A. and V. Shangin (2006)]. Существенную роль при доказательстве играет обратимость правил исчисления E^{PQ}.

4. Примеры сократических выводов и сократических доказательств

Для ясности мы будем использовать буквы x, y, z вместо x_1, x_2, x_3. Буквы τ_1, τ_2, τ_3 обозначают параметры. Буквы P, R, Z обозначают предикатные константы, местность которых легко устанавливается в каждом случае, а значит, не указывается явным образом.. Т.к. данное соглашение касается только удобства записи, секвенции в нижеследующих примерах по-прежнему содержат только формулы языка ***L***. В нижеследующих примерах мы выделяем ту конституэнту, к которой применяется правило.

Пример 1: Сократическое доказательство $\forall xP(x) \wedge \forall xR(x) \vdash \forall x(P(x) \wedge R(x))$

1.	? ($\forall xP(x) \wedge \forall xR(x) \vdash \forall x(P(x) \wedge R(x))$)	$\mathbf{L}_\wedge$
2.	? ($\forall xP(x), \forall xR(x) \vdash \forall x(P(x) \wedge R(x))$)	$\mathbf{R}_\forall$
3.	? ($\forall xP(x), \forall xR(x) \vdash P(\tau_1) \wedge R(\tau_1)$)	$\mathbf{R}_\wedge$
4.	? ($\forall xP(x), \forall xR(x) \vdash P(\tau_1)$); $\forall xP(x), \forall xR(x) \vdash R(\tau_1)$)	$\mathbf{R}_\forall$
5.	? ($\forall xP(x), P(\tau_1), \forall xR(x) \vdash P(\tau_1)$); $\forall xP(x), \forall xR(x) \vdash R(\tau_1)$)	$\mathbf{R}_\forall$
6.	? ($\forall xP(x), P(\tau_1), \forall xR(x) \vdash P(\tau_1)$); $\forall xP(x), \forall xR(x), R(\tau_1) \vdash R(\tau_1)$)	

Поскольку в нижеследующем примере нет применений правил для кванторов, мы приводим схему соответствующего сократического доказательства, в котором буквы A, B, C обозначают предложения языка ***L***, в которых нет вхождений параметров.

Пример 2: Сократическое доказательство $(\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \vdash (\neg A \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg C)$

1.	? ($(\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \vdash (\neg A \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg C)$)	$\mathbf{R}_\vee$
2.	? ($(\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B), \neg(\neg A \wedge C) \vdash \neg A \wedge \neg C$)	$\mathbf{L}_\vee$
3.	? ($\neg A \wedge B, \neg(\neg A \wedge C) \vdash \neg A \wedge \neg C$; $\neg A \wedge \neg B, \neg(\neg A \wedge C) \vdash \neg A \wedge \neg C$	$\mathbf{L}_\wedge$
4.	? ($\neg A, B, \neg(\neg A \wedge C) \vdash \neg A \wedge \neg C$; $\neg A \wedge \neg B, \neg(\neg A \wedge C) \vdash \neg A \wedge \neg C$)	$\mathbf{L}_\wedge$
5.	? ($\neg A, B, \neg(\neg A \wedge C) \vdash \neg A \wedge \neg C$; $\neg A, \neg B, \neg(\neg A \wedge C) \vdash \neg A \wedge \neg C$)	$\mathbf{L}_{\neg\wedge}$
6.	? ($\neg A, B, \neg\neg A \vdash \neg A \wedge \neg C$; $\neg A, B, \neg C \vdash \neg A \wedge \neg C$; $\neg A, \neg B, \neg(\neg A \wedge C) \vdash \neg A \wedge \neg C$)	$\mathbf{R}_\wedge$

Пусть α_1 обозначает секвенцию $\neg A, B, \neg\neg A \vdash \neg A \wedge \neg C$

7. ? (α_1; $\neg A, B, \neg C \vdash \neg A$; $\neg A, B, \neg C \vdash \neg C$; $\neg A, \neg B, \neg(\neg A \wedge C) \vdash \neg A \wedge \neg C$) **$L_{\neg\wedge}$**

Пусть α_2 и α_3 обозначают секвенции $\neg A, B, \neg C \vdash \neg A$ и $\neg A, B, \neg C \vdash \neg C$, соответственно

8. ? (α_1; α_2; α_3; $\neg A, \neg B, \neg\neg A \vdash \neg A \wedge \neg C$; $\neg A, \neg B, \neg C \vdash \neg A \wedge \neg C$) **$R_{\wedge}$**

Пусть α_4 обозначает секвенцию $\neg A, \neg B, \neg\neg A \vdash \neg A \wedge \neg C$

9. ? (α_1; α_2; α_3; α_4; $\neg A, \neg B, \neg C \vdash \neg A$; $\neg A, \neg B, \neg C \vdash \neg C$)

Пример 3: Сократический вывод $(\forall xP(x) \wedge \neg\forall xR(x)) \vee (\neg\forall xP(x) \wedge \forall xR(x)) \vdash \forall xZ(x)$

1.	? ($(\forall xP(x) \wedge \neg\forall xR(x)) \vee (\neg\forall xP(x) \wedge \forall xR(x)) \vdash \forall xZ(x)$)	**$R_{\forall}$**
2.	? ($(\forall xP(x) \wedge \neg\forall xR(x)) \vee (\neg\forall xP(x) \wedge \forall xR(x)) \vdash Z(\tau_1)$)	**$L_{\vee}$**
3.	? ($\forall xP(x) \wedge \neg\forall xR(x) \vdash Z(\tau_1)$; $\neg\forall xP(x) \wedge \forall xR(x) \vdash Z(\tau_1)$)	**$L_{\wedge}$**
4.	? ($\forall xP(x), \neg\forall xR(x) \vdash Z(\tau_1)$; $\neg\forall xP(x) \wedge \forall xR(x) \vdash Z(\tau_1)$)	**$L_{\wedge}$**
5.	? ($\forall xP(x), \neg\forall xR(x) \vdash Z(\tau_1)$; $\neg\forall xP(x), \forall xR(x) \vdash Z(\tau_1)$)	**$L_{\neg\forall}$**
6.	? ($\forall xP(x), \exists x\neg R(x) \vdash Z(\tau_1)$; $\neg\forall xP(x), \forall xR(x) \vdash Z(\tau_1)$)	**$L_{\neg\forall}$**
7.	? ($\forall xP(x), \exists x\neg R(x) \vdash Z(\tau_1)$; $\exists x\neg P(x), \forall xR(x) \vdash Z(\tau_1)$)	**$L_{\exists}$**
8.	? ($\forall xP(x), \neg R(\tau_2) \vdash Z(\tau_1)$; $\exists x\neg P(x), \forall xR(x) \vdash Z(\tau_1)$)	**$L_{\exists}$**
9.	? ($\forall xP(x), \neg R(\tau_2) \vdash Z(\tau_1)$; $\neg P(\tau_2), \forall xR(x) \vdash Z(\tau_1)$)	

В дальнейшем возможны только (бесконечные) применения правила $L_{\forall}$, которые не приводят к появлению удачного вопроса. Данная ситуация наталкивает на мысль (но ни в коем случае не доказывает утверждение) о невозможности построения сократического доказательства начального вопроса.

5. Некоторые допустимые правила

Исчисление вопросов рассматриваемого типа – это упорядоченная тройка <Λ, Θ, Δ>, где Λ – это язык, в котором п-формулы содержат секвенции и где вопросы содержат конечные последовательности секвенций, Θ – это множество правил вывода исчисления, представляющих собою переход от вопроса к вопросу, и Δ – это множество *удачных* вопросов, т.е. вопросов особого вида. В нашем исчислении E^{PQ} каждое правило вывода обратимо в том смысле, что для любых двух вопросов Q, Q^* языка $\boldsymbol{L^*}$, если Q^* получен из Q в результате применения некоторого правила исчисления E^{PQ}, то каждая конституэнта (т.е. секвенция), входящая в Q^*, общезначима тогда и только тогда, когда общезначима каждая конституэнта (т.е. секвенция), входящая в Q.

С другой стороны, существуют обратимые правила, которые не являются правилами исчисления E^{PQ}. При этом некоторые из них *выводимы* в нашем исчислении, а некоторые – нет.

Далее следуют два примера правил, которые одновременно выводимы и обратимы.

$L_{\neg/\to/\neg}$ $$\frac{?\,(\Phi;\ S\text{'}\neg A \to \neg B\text{'}T \vdash C;\ \Psi)}{?\,(\Phi;\ S\text{'}A\text{'}T \vdash C;\ S\text{'}\neg B\text{'}T \vdash C)}$$

$R_{\neg\exists\neg}$ $$\frac{?\,(\Phi;\ S \vdash \neg\exists x_i\neg A;\ \Psi)}{?\,(\Phi;\ S \vdash A(x_i/\tau);\ \Psi)}$$

где x_i свободна в A;

τ не входит в $S \vdash \neg\exists x_i\neg A$

Действительно, если Q^* получен из Q по правилу **$L_{\neg/\to/\neg}$**, то существует сократический вывод Q по правилам исчисления E^{PQ}, последним вопросом которого является Q^*, например.:

? (Φ; S ‘$\neg A \to \neg B$ ‘$T \vdash C$; Ψ) **$L_{\to}$**

? (Φ; S ‘$\neg\neg A$ ‘$T \vdash C$; S ‘ $\neg B$ ‘ $T \vdash \Psi$) **$L_{\neg\neg}$**

$? (\Phi; S\text{‘}A\text{‘}T \vdash C; S\text{‘}\neg B\text{‘}T \vdash C)$

Аналогично в случае правила $\mathbf{R}_{\neg\exists\neg}$:

$? (\Phi; S \vdash \neg\exists x_i \neg A; \Psi)$	$\mathbf{R}_{\neg\exists}$
$? (\Phi; S \vdash \forall x_i \neg\neg A; \Psi)$	$\mathbf{R}_{\forall}$
$? (\Phi; S \vdash \neg\neg A(x_i/\tau); \Psi)$	$\mathbf{R}_{\neg\neg}$
$? (\Phi; S \vdash A(x_i/\tau); \Psi)$	

Если добавить к исчислению E^{PQ} выводимые правила $\mathbf{L}_{\neg/\to/\neg}$ и $\mathbf{R}_{\neg\exists\neg}$, то получится новое исчисление, некоторые сократические выводы/доказательства в котором будут меньше, чем соответствующие сократические выводы/доказательства в исчислении E^{PQ}. В то же время новое исчисление будет также обладать свойством семантической непротиворечивости, и, поскольку E^{PQ} обладает свойством семантической полноты, множество доказуемых в новом исчислении секвенций останется таким же, как и множество секвенций, доказуемых в E^{PQ}.

Теперь рассмотрим некоторые обратимые правила, которые не являются выводимыми:

$\mathbf{L}_{1\to}$ $$\frac{? (\Phi; S\text{’}A\text{’}A \to B \vdash C; \Psi)}{? (\Phi; S\text{’}A\text{‘}B \vdash C; \Psi)}$$

$\mathbf{R}_{1\wedge}$ $$\frac{? (\Phi; S\text{’}A \vdash A \wedge B; \Psi)}{? (\Phi; S\text{’}A \vdash B; \Psi)}$$

Если посмотреть на правила исчисления E^{PQ}, то станет ясно, что по правилам исчисления E^{PQ} невозможно перейти от $? (\Phi; S\text{‘}A\text{‘}A \to B \vdash C; \Psi)$ к $? (\Phi; S\text{‘}A\text{‘}B \vdash C; \Psi)$. То же самое относится ко второму случаю.

Заметим, что добавление к исчислению E^{PQ} правил $\mathbf{L}_{1\to}$ и/или $\mathbf{R}_{1\wedge}$ приводит к тому, что в новом исчислении уменьшается сложность некоторых доказательств (под сложностью здесь понимается количество вхождений секвенций в доказательство). (Однако, добавление к исчислению E^{PQ} обратимого правила, которое не является выводимым, не всегда приводит к такому эффекту.) Например, в исчислении E^{PQ} можно вывести:

$? (A, A \to B \vdash B)$
$? (A, \neg A \vdash B; A, B \vdash B)$

тогда как в исчислении, полученном путем добавления к E^{PQ} правила $\mathbf{L}_{1\to}$, можно вывести:

$? (A, A \to B \vdash B)$
$? (A, B \vdash B)$

Имеет место следующая

Теорема 3. Любое исчисление, полученное из E^{PQ} путем добавления некоторого непустого множества обратимых и не выводимых правил, обладает свойствами семантической непротиворечивости и полноты относительно чистого классического исчисления предикатов первого порядка т.е. для любой секвенции, в предложениях которой нет вхождений параметров, верно: она доказуема в таком исчислении тогда и только тогда, когда она общезначима.

Доказательство: т.к. новые правила обратимы (по условию) и (по определению) удачный вопрос состоит только из общезначимых конституэнт (секвенций), то секвенция, входящая в первый вопрос (т.е. та секвенция, которую необходимо доказать), общезначима. С другой стороны, т.к. E^{PQ} обладает свойством семантической полноты, невозможно семантически непротиворечивое исчисление, полученное из E^{PQ} путем добавления некоторого непустого множества обратимых и не выводимых правил, в котором доказуема не доказуемая в E^{PQ} секвенция.

Отметим также, что в E^{PQ} нет структурных правил (несмотря на то, что данное исчисление обладает свойством семантической полноты). Однако, можно добавить к E^{PQ} некоторые обратимые структурные правила. Например,

(*внешняя перестановка*)

$$\frac{?\,(\Phi;\, S \vdash A;\, \Gamma;\; T \vdash B\,;\, \Psi)}{?\,(\Phi;\; T \vdash B;\, \Gamma;\, S \vdash A;\, \Psi)}$$

(внутренняя перестановка)

$$\frac{?\,(\Phi;\, S\,'B\,'T\,'C\,'W \vdash A;\, \Psi)}{?\,(\Phi;\, S\,'C\,'T\,'B\,'W \vdash A;\, \Psi)}$$

(внешнее сокращение)

$$\frac{?\,(\Phi;\, S \vdash A;\, S \vdash A;\, \Psi)}{?\,(\Phi;\, S \vdash A;\, \Psi)}$$

(*внутреннее сокращение*)

$$\frac{?\,(\Phi;\, S\,'B\,'B\,'T \vdash A;\, \Psi)}{?\,(\Phi;\, S\,'B\,'T \vdash A;\, \Psi)}$$

(*сечение*)

$$\frac{?\,(\Phi;\, S\,'B\,'T \vdash A;\, S\,'\neg B\,'T \vdash A;\, \Psi)}{?\,(\Phi;\, S\,'T \vdash A;\, \Psi).}$$

.

Несложно показать, что данное правило обратимо.

(*ослабление*)

$$\frac{?\,(\Phi;\, S \vdash A;\, \Psi)}{?\,(\Phi;\, S\,'B \vdash A;\, S\,'\neg B \vdash A;\, \Psi)}$$

Повторимся, что добавление к E^{PQ} некоторых обратимых структурных правил не приведет к появлению более сильного исчисления (в смысле доказуемости). Результатом такого добавления станет исчисление, в котором некоторые сократические выводы/доказательства станут менее сложными (в смысле количества вхождений секвенций вывода/доказательства и/или длины вывода/доказательства), чем соответствующие сократические выводы/доказательства в исчислении E^{PQ}.

Применение правила сечения позволяет уменьшить количество вхождений секвенций в соответствующий сократический вывод/доказательство. Иногда применение правила сечения позволяет уменьшить длину доказательства по сравнению с длиной доказательства этой же секвенции в исчислении без правила сечения, т.е. в E^{PQ}. Более того, в ряде случаев с помощью сечения можно извлечь конечный контрпример.

Наконец, отметим, что если в вопрос входят *комплиментарные* конституэнты, но правило сечения неприменимо, то с помощью правил перестановки мы всегда получим другой вопрос, в котором к этим комплиментарным конституэнтам применимо правило сечения. Под *комплиментарными* конституэнтами понимаются конституэнты, для которых верны следующие условия: (а) одна и та же формула находится справа от знака выводимости в обеих конституэнтах (секвенциях); (б) существует формула B: B находится слева от знака выводимости в одной конституэнте, а $\neg B$ находится слева от знака выводимости в другой конституэнте; (в) эти конституэнты не отличаются между собой в отношении остальных формул, которые находятся слева от знака выводимости. Отметим также, что остальные структурные правила могут пригодиться либо для получения комплиментарных конституэнт, либо для получения такого вопроса, к которому применимо правило сечения.

6. Примеры, демонстрирующие эффективность правила сечения

Традиционный подход к правилу сечения, идущий от работ Г. Генцена, – устранение этого правила в том смысле, что если секвенция доказуема с помощью сечения, то она может быть доказуема без применения правила сечения. В то же время А. Драгалин, например, идет в обратном направлении: он формулирует секвенциальное исчисление без правила сечения, а потом показывает допустимость этого правила в том смысле, что добавление этого правила в исчисление не влияет на множество доказуемых секвенций. Используя вышеприведенные примеры, показывается, что добавление правила сечения позволяет сократить количество шагов в доказательстве некоторых секвенций **(пример 2*)**. Этот же пример показывает, что добавление правила сечения также позволяет сократить количество секвенций в последнем вопросе в доказательстве некоторых секвенций **(строка 9 примера 2 и строка 8 примера 2*)**. С другой стороны, добавление правила сечения позволяет извлечь конечный контрпример в случае, когда его невозможно извлечь в исчислении без правила сечения **(пример 3*)**.

Пример 2*. Применение правила сечения сокращает длину сократического доказательства данной секвенции.

1. $?\,(\,(\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \vdash (\neg A \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg C))$ **R$_\vee$**
2. $?\,(\,(\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B), \neg(\neg A \wedge C) \vdash \neg A \wedge \neg C)$ **L$_\vee$**
3. $?\,(\,\neg A \wedge B, \neg(\neg A \wedge C) \vdash \neg A \wedge \neg C; \neg A \wedge \neg B, \neg(\neg A \wedge C) \vdash \neg A \wedge \neg C)$ **L$_\wedge$**
4. $?\,(\,\neg A, B, \neg(\neg A \wedge C) \vdash \neg A \wedge \neg C; \neg A \wedge \neg B, \neg(\neg A \wedge C) \vdash \neg A \wedge \neg C)$ **L$_\wedge$**
5. $?\,(\,\neg A, B, \neg(\neg A \wedge C) \vdash \neg A \wedge \neg C; \neg A, \neg B, \neg(\neg A \wedge C) \vdash \neg A \wedge \neg C)$ **сечение**
6. $?\,(\,\neg A, \neg(\neg A \wedge C) \vdash \neg A \wedge \neg C)$ **L$_{\neg\wedge}$**
7. $?\,(\,\neg A, \neg\neg A \vdash \neg A \wedge \neg C; \neg A, \neg C \vdash \neg A \wedge \neg C)$ **R$_\wedge$**
8. $?\,(\,\neg A, \neg\neg A \vdash \neg A \wedge \neg C; \neg A, \neg C \vdash \neg A; \neg A, \neg C \vdash \neg C)$

Пример 3*. Применение правила сечения позволяет извлечь *конечную* контрмодель для данной секвенции.

1. $?\,(\,(\forall x P(x) \wedge \neg\forall x R(x)) \vee (\neg\forall x P(x) \wedge \forall x R(x)) \vdash \forall x Z(x))$ **R$_\forall$**
2. $?\,(\,(\forall x P(x) \wedge \neg\forall x R(x)) \vee (\neg\forall x P(x) \wedge \forall x R(x)) \vdash Z(\tau_1))$ **L$_\vee$**
3. $?\,(\,\forall x P(x) \wedge \neg\forall x R(x) \vdash Z(\tau_1); \neg\forall x P(x) \wedge \forall x R(x) \vdash Z(\tau_1))$ **L$_\wedge$**
4. $?\,(\,\forall x P(x), \neg\forall x R(x) \vdash Z(\tau_1); \neg\forall x P(x) \wedge \forall x R(x) \vdash Z(\tau_1))$ **L$_\wedge$**
5. $?\,(\,\forall x P(x), \neg\forall x R(x) \vdash Z(\tau_1); \neg\forall x P(x), \forall x R(x) \vdash Z(\tau_1))$ **сечение**
6. $?\,(\,\neg\forall x R(x) \vdash Z(\tau_1); \forall x R(x) \vdash Z(\tau_1))$ **внешняя перестановка**
6. $?\,(\,\forall x R(x) \vdash Z(\tau_1); \neg\forall x R(x) \vdash Z(\tau_1))$ **сечение**
7. $?\,(\,\vdash Z(\tau_1))$

7. Литература

Leszczyńska, D. (2004): 'Socratic Proofs for some Normal Modal Propositional Logics', *Logique et Analyse* **185-188,** pp. 259-285.

Skura, T. (2005): 'Intuitionistic Socratic Procedures ', *Journal of Applied Non-Classical Logic*s **15**, No. 4, 2005, s. 453-464.

Wiśniewski, A. (1994): 'Erotetic Implications', *Journal of Philosophical Logic* **23**, No. 2, pp. 173-195.

Wiśniewski, A. (1995): *The Posing of Questions: Logical Foundations of Erotetic Inferences*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London.

Wiśniewski, A. (1996): 'The Logic of Questions as a Theory of Erotetic Arguments', *Synthese* **109**, No. 2, pp.1-25.

Wiśniewski, A. (2001): 'Questions and Inferences', *Logique et Analyse* **173--175**, pp. 5-43.

Wiśniewski, A. (2004): 'Socratic Proofs', *Journal of Philosophical Logic*, **33**, pp. 299-326.

Wiśniewski, A. and V. Shangin (2006): 'Socratic Proofs for Quantifiers', *Journal of Philosophical Logic* **35**, pp. 147-178.

Wiśniewski, A., Vanackere, G., and Leszczyńska, D. (2005): 'Socratic Proofs and Paraconsistency: A Case Study', *Studia Logica* **80**, pp. 433-468.