Andrzej Wiśniewski

LOGIKA A ZBIORY SYTUACJI

1. „Situations are just that: situations". To sformułowanie Keitha Devlina, autora jednej z najbardziej interesujących książek poświęconych semantyce sytuacyjnej[1], stanowić będzie motto naszych rozważań. Chociaż pojęcie sytuacji będzie tu pełniło podstawową rolę, nie będziemy bliżej określać, czym są sytuacje, przyjmując tylko, że wśród sytuacji występują sytuacje rzeczywiste oraz sytuacje nie będące rzeczywistymi. Pragnąc bliżej określić, czym są sytuacje, musielibyśmy zarazem określić, czym są sytuacje rzeczywiste. Wypowiadanie się o strukturze świata nie leży jednak w kompetencjach logiki. Nie przesądzając, czym są sytuacje, założymy tu po prostu istnienie niepustych *zbiorów sytuacji*. Na gruncie teorii mnogości – stanowiącej podstawę naszych rozważań – znaczy to, że istnieje również niepusty zbiór sytuacji będący sumą wszystkich istniejących zbiorów sytuacji. Ten ostatni zbiór będziemy dalej nazywać *uniwersum sytuacji*. Rozważać będziemy języki, w których występują zdania proste, tj. takie, których żadna część właściwa nie jest zdaniem, oraz zdania złożone, powstające ze zdań prostych za pomocą spójników. O zdaniach prostych założymy z kolei, że każde z nich odnosi się do pewnego *zbioru* sytuacji. Gdy jest to zbiór niepusty, to, intuicyjnie rzecz biorąc, elementami tego zbioru są te wszystkie sytuacje, w których jest tak, jak głosi rozważane zdanie proste; w przypadku dowolnego zdania prostego A wyrażenie mające postać „w sytuacji s jest tak, jak głosi zdanie A" uważać będziemy za dostatecznie zrozumiałe. I tak, przykładowo, zdanie:

(1) Andrzej Wiśniewski pracuje.

[1] K. Devlin, *Logic and Information*, Cambridge University Press, Cambridge 1991. Cytat pochodzi ze strony 70.

odnosi się do zbioru tych wszystkich sytuacji, w których jest tak, że Andrzej Wiśniewski pracuje, natomiast zdanie:

(2) Andrzej Wiśniewski lewituje.

odnosi się do zbioru tych wszystkich sytuacji, w których jest tak, że A.W. lewituje. W zbiorze sytuacji, do których odnosi sie zdanie (1) występują sytuacje rzeczywiste, podczas gdy zbiór sytuacji, do których odnosi się zdanie (2) nie zawiera żadnej sytuacji rzeczywistej.[2] Zbiór sytuacji, w których jest tak, jak głosi zdanie:

(3) Stół jest odważny.

jest jednak zapewne zbiorem pustym.

Zdaniom prostym są zatem przyporządkowane zbiory sytuacji, a nie pojedyncze sytuacje. Co więcej, odpowiednie zbiory sytuacji nie muszą być ani niepuste, ani jednoelementowe. Tak więc, czymkolwiek są sytuacje, pojęcia sytuacji nie rozumiemy tu w znaczeniu „to, co zdanie przedstawia".

O każdym zbiorze sytuacji przyporządkowanym danemu zdaniu prostemu zakładamy, że jest on podzbiorem uniwersum sytuacji. Uniwersum sytuacji oznaczać będziemy dalej symbolem U. Wypowiadanie się o mocy uniwersum sytuacji nie leży w kompetencjach logiki.

2. Rozważmy następujące zdanie złożone:

(4) Andrzej Wiśniewski pracuje i Andrzej Wiśniewski przebywa w Zielonej Górze.

Zastanówmy się, czym, intuicyjnie rzecz biorąc, jest zbiór (wszystkich) sytuacji, w których jest tak, jak głosi zdanie (4). Na pierwszy rzut oka można by sądzić, że zbiór ten należałoby określić jako zbiór wszystkich sytuacji *s* takich, że w sytuacji *s* jest tak, że Andrzej Wiśniewski pracuje i Andrzej Wiśniewski przebywa w Zielonej Górze. Pragnąc sprecyzować sens tego ostatniego wyrażenia, musimy jednak określić, czym jest odniesienie przedmiotowe spójnika „i" w (pojedynczej) sytuacji *s*, co natychmiast prowadzi nas do rozważań nad strukturą sytuacji i powoduje powstawanie wszystkich dobrze znanych trudności (pojawiających się również w przypadku innych spójników). Tego chcemy jednak uniknąć. Co więcej, możemy to z łatwością osiągnąć, określając interesujący nas zbiór bezpośrednio: przyjmując, że zbiór sytuacji, w których jest tak, jak głosi zdanie (4) jest iloczynem zbioru sytuacji, w których jest

[2] Czytelnik proszony jest tu o okazanie zaufania autorowi.

tak, jak głosi zdanie (1) oraz zbioru sytuacji, w których jest tak, jak głosi zdanie „Andrzej Wiśniewski przebywa w Zielonej Górze". Podobnie w przypadku zdania złożonego:

(5) Andrzej Wiśniewski pracuje lub Andrzej Wiśniewski dobrze się bawi.

zbiór sytuacji, w których jest tak, jak głosi zdanie (5) możemy utożsamić z sumą zbioru sytuacji, w których jest tak, jak głosi zdanie (1) i zbioru sytuacji, w których jest tak, jak głosi zdanie „Andrzej Wiśniewski dobrze się bawi".[3]

Rozważmy teraz zdanie:

(6) Nieprawda, że Andrzej Wiśniewski dobrze się bawi.

Pragnąc określić sens wyrażenia „w sytuacji *s* jest tak, że nieprawda, że Andrzej Wiśniewski dobrze się bawi", natychmiast wikłamy się we wszystkie dobrze znane trudności związane z odniesieniem przedmiotowym spójnika negacji. Większych zastrzeżeń nie budzi natomiast stwierdzenie, iż zbiór sytuacji, w których jest tak, jak głosi zdanie (6) jest identyczny ze zbiorem tych sytuacji, w których *nie* jest tak, jak głosi zdanie „Andrzej Wiśniewski dobrze się bawi". Mówiąc bardziej ściśle, zbiór sytuacji, w których jest tak, jak głosi zdanie (6) jest identyczny z różnicą uniwersum sytuacji i zbioru sytuacji, w których jest tak, jak głosi zdanie „Andrzej Wiśniewski dobrze się bawi".[4]

Rozważmy z kolei zdanie:

(7) Jeśli Andrzej Wiśniewski pracuje, to Andrzej Wiśniewski dobrze się bawi.

Chwila namysłu wystarczy, aby zauważyć, że zbiorem sytuacji, w których *nie* jest tak, jak głosi zdanie (7) jest iloczyn zbioru sytuacji, w których jest tak, jak głosi zdanie (1) oraz zbioru sytuacji, w których jest tak, jak głosi zdanie (6). A zatem zbiór sytuacji, w których *jest* tak, jak głosi zdanie (7) jest równy sumie zbioru sytuacji, w których jest tak, jak głosi zdanie „Nieprawda, że Andrzej Wiśniewski pracuje" i zbioru sytuacji, w których jest tak, jak głosi zdanie „Andrzej Wiśniewski dobrze się bawi".

W przypadku zdania:

(8) Andrzej Wiśniewski pracuje wtedy i tylko wtedy, gdy Andrzej Wiśniewski dobrze się bawi.

[3] Por. Barwise [4], s. 30.

[4] Por. Cooper & Kamp [12], s. 316-320.

zbiór sytuacji, w których jest tak, jak głosi zdanie (8) jest równy iloczynowi zbioru wszystkich sytuacji, w których jest tak, jak głosi zdanie (7) oraz zbioru wszystkich sytuacji, w których jest tak, jak głosi zdanie:

(9) Jeśli Andrzej Wiśniewski dobrze się bawi, to Andrzej Wiśniewski pracuje.

3. Analizowane wyżej zdania złożone były zbudowane bezpośrednio ze zdań prostych. Jest jednak oczywiste, że przeprowadzone rozważania możemy uogólnić tak, aby odnosiły się one do dowolnego zdania złożonego analizowanego języka. Niech $\cap$, $\cup$, $-$ będą odpowiednio teoriomnogościowymi znakami iloczynu zbiorów, sumy zbiorów i różnicy zbiorów. Przyjmijmy, że w rozważanym języku występują wyłącznie spójniki negacji ($\neg$), koniunkcji (&), alternatywy (v), implikacji ($\rightarrow$) oraz równoważności ($\equiv$); zdaniami tego języka są wyłącznie zdania proste oraz zdania powstające ze zdań prostych za pomocą powyższych spójników. Załóżmy, że każdemu zdaniu prostemu A jest jednoznacznie przyporządkowany pewien zbiór sytuacji $S(A)$ będący podzbiorem uniwersum sytuacji U. Gdy zbiór $S(A)$ jest niepusty, to, intuicyjnie rzecz biorąc, do zbioru tego należą wszystkie te sytuacje z uniwersum U, w których jest tak, jak głosi rozważane zdanie proste A i tylko te sytuacje. Możemy teraz zdefiniować pewną funkcję V przyporządkowującą każdemu zdaniu rozważanego języka pewien podzbiór zbioru U w następujący sposób:

(i) Jeśli A jest zdaniem prostym, to $V(A) = S(A)$.
(ii) Jeśli A ma postać $\neg B$, to $V(A) = \mathrm{U} - V(B)$.
(iii) Jeśli A ma postać $B \,\&\, C$, to $V(A) = V(B) \cap V(C)$.
(iv) Jeśli A ma postać $B \vee C$, to $V(A) = V(B) \cup V(C)$.
(v) Jeśli A ma postać $B \rightarrow C$, to $V(A) = V(\neg B) \cup V(C)$.
(vi) Jeśli A ma postać $B \equiv C$, to $V(A) = (V(\neg B) \cup V(C)) \cap (V(\neg C) \cup V(B))$.

Wartość funkcji V dla danego zdania A można by nazwać zbiorem tych wszystkich sytuacji, w których jest tak, jak głosi zdanie A. Zauważmy, że dla pewnych zdań zbiór ten może być pusty! Korzystając z tego pojęcia, możemy teraz określić pojęcie „w sytuacji s jest tak, jak głosi zdanie złożone A":

(*) w sytuacji s jest tak, jak głosi zdanie złożone A wtedy i tylko wtedy, gdy $s \in V(A)$.

Gdy zbiór $V(A)$ dla danego zdania złożonego A jest pusty, możemy zatem powiedzieć, że nie istnieje sytuacja, w której jest tak, jak głosi rozważane zdanie złożone A (a jednocześnie w każdej sytuacji z uniwersum sytuacji U jest tak, jak głosi negacja rozważanego zdania). Zgodnie z przyjętymi wyżej założeniami nie jest wykluczone, że dla pewnych zdań prostych $A_1, A_2, ..., A_i, ...$ $(i \geq 1)$ zbiory $S(A_1), S(A_2), ..., S(A_i), ...$ są puste. Jeśli jest tak właśnie, to możemy powiedzieć, że w każdej sytuacji z uniwersum sytuacji U jest tak, jak głoszą negacje zdań $A_1, A_2, ..., A_i, ...$.

4. Przeprowadzone wyżej rozważania miały charakter szkicowy: nie określiliśmy tu bliżej ani zbiorów sytuacji przyporządkowanych poszczególnym zdaniom prostym, ani też uniwersum sytuacji. To, co zostało wyżej powiedziane, wystarcza jednak do pokazania, że istnieją zdania złożone o tej własności, że zbiór sytuacji, w których jest tak, jak one głoszą jest zawsze pusty – niezależnie od tego, czym jest uniwersum sytuacji. W szczególności, własność tę ma zdanie:

(10) Andrzej Wiśniewski przebywa w Zielonej Górze i nieprawda, że Andrzej Wiśniewski przebywa w Zielonej Górze.

Oznaczmy zdanie „Andrzej Wiśniewski przebywa w Zielonej Górze" przez A^*. Dla dowolnego uniwersum sytuacji U mamy $V(A^* \,\&\, \neg A^*) = V(A^*) \cap V(\neg A^*) = V(A^*) \cap (\mathrm{U} - V(A^*))$. Ponieważ $V(A^*)$ jest podzbiorem U, zatem ostatecznie $V(A^* \,\&\, \neg A^*) = \emptyset$. Wnosimy stąd, że zbiór sytuacji, w których jest tak, jak głosi zdanie (10) jest pusty. Analogicznie jest w przypadku zdania:

(11) Krasnoludek Gapcio jest przystojny i nieprawda, że krasnoludek Gapcio jest przystojny.

Można również pokazać, że istnieją zdania złożone o tej własności, że w każdej sytuacji z uniwersum sytuacji jest tak, jak one głoszą – niezależnie od tego, czym jest uniwersum sytuacji. Przykładem może tu być zdanie:

(12) Andrzej Wiśniewski przebywa w Zielonej Górze lub nieprawda, że Andrzej Wiśniewski przebywa w Zielonej Górze.

Zgodnie z wyżej powiedzianym mamy $V(A^* \vee \neg A^*) = V(A^*) \cup V(\neg A^*) = V(A^*) \cup (\mathrm{U} - V(A^*))$. Jako że $V(A^*)$ jest podzbiorem U, ostatecznie otrzymujemy, iż $V(A^* \vee \neg A^*) = \mathrm{U}$. Tak więc możemy powiedzieć, że w każdej sytuacji ze zbioru U jest tak, jak głosi zdanie (12). To samo zachodzi rzecz jasna w przypadku zdania:

(13) Krasnoludek Gapcio jest przystojny lub nieprawda, że krasnoludek Gapcio jest przystojny.

zupełnie niezależnie od tego, jaki jest status ontologiczny krasnoludka Gapcia.

Zdania (12) i (13) są podstawieniami tezy klasycznego rachunku zdań. Możemy wobec tego postawić następujące pytania: (a) czy każde zdanie będące podstawieniem tezy klasycznego rachunku zdań ma tę własność, że w każdej sytuacji z uniwersum sytuacji jest tak, jak ono głosi – niezależnie od tego, czym jest uniwersum sytuacji?; (b) czy każde zdanie mające powyższą własność jest podstawieniem jakiejś tezy klasycznego rachunku zdań?

Aby odpowiedzieć na te pytania – i to odpowiedzieć twierdząco – zbudujemy teraz pewną semantykę dla klasycznego rachunku zdań nawiązującą do intuicji przedstawionych w dotychczasowych rozważaniach.

5. Dla porządku scharakteryzujemy najpierw język rozważanej tu wersji klasycznego rachunku zdań (dalej: KRZ). W alfabecie tego języka występują: przeliczalnie nieskończenie wiele zmiennych zdaniowych p_1, p_2, ..., spójniki $\neg$, &, v, $\rightarrow$, $\equiv$ oraz nawiasy. Zbiór formuł zdaniowych $Form_{KRZ}$ jest najmniejszym zbiorem zawierającym wszystkie zmienne zdaniowe i spełniającym następujące warunki: (i) jeśli α należy $Form_{KRZ}$, to wyrażenie mające postać $\neg\alpha$ należy do $Form_{KRZ}$; (ii) jeśli α, β należą do $Form_{KRZ}$, to wyrażenia mające postać $(\alpha \,\&\, \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\alpha \equiv \beta)$ należą do $Form_{KRZ}$. Greckich liter α, β, ... będziemy dalej używać w charakterze metajęzykowych zmiennych reprezentujących formuły zdaniowe języka KRZ; przyjmujemy tu zwykłe konwencje dotyczące pomijania nawiasów. W metajęzyku zakładamy teorię mnogości Zermelo-Fraenkla.[5]

Jak wiadomo, zmienne zdaniowe mogą być interpretowane zarówno podstawieniowo, jak i obiektywistycznie. Według interpretacji podstawieniowej zmienne zdaniowe nie są zmiennymi w ścisłym sensie, lecz są schematycznymi literami reprezentującymi zdania pewnego innego języka. Interpretacje obiektywistyczne różnią się co do tego, czym jest uniwersum przebiegane przez zmienne zdaniowe. Najbardziej znane są tu następujące ujęcia: (a) zmienne zdaniowe przebiegają dwuelementowe uniwersum, którego elementami są Prawda i Fałsz (Frege); (b) zmienne zdaniowe przebiegają uniwersum wartości logicznych, w którym Prawda i Fałsz są wyróżnionymi elementami (Łukasiewicz, Post); (c) zmienne zdaniowe przebiegają uniwersum sytuacji (Wittgenstein, Suszko); (d) zmienne zdaniowe przebiegają zbiory światów możliwych (Kripke, Fine).[6]

[5] W rozważaniach poświęconych semantyce sytuacyjnej zakłada się niekiedy niestandardowe teorie mnogości, w tym zwłaszcza teorię hiperzbiorów (zbiorów nieufundowanych) Aczela (zob. Aczel [1]; zob. też Paśniczek [20]). W sprawie motywacji tego kroku zob. Barwise [7].

Dla potrzeb naszych prostych rozważań wystarczy jednak ZF.

[6] Por. Omyła [19], s. 118.

Intuicje, które leżą u podstaw proponowanej niżej semantyki dla KRZ możemy przedstawić następująco: zmienne zdaniowe są schematycznymi literami reprezentującymi te zdania języka naturalnego, które nie zawierają spójników negacji, koniunkcji, alternatywy, implikacji czy równoważności.[7] Istnieją jednak różne języki naturalne; co więcej, nawet gdy język naturalny jest ustalony, można w rozmaity sposób przyporządkowywać zmiennym zdaniowym zdania tego języka nie zawierające spójników KRZ i w konsekwencji w różnoraki sposób reprezentować w języku KRZ różne zdania złożone. Z drugiej strony, zgodnie z wyżej powiedzianym, każdemu zdaniu prostemu jest przyporządkowany pewien zbiór sytuacji, przy czym gdy jest to zbiór niepusty, to – intuicyjnie rzecz biorąc – jest to zbiór tych wszystkich sytuacji, w których jest tak, jak zdanie to głosi. Ponadto w każdym języku naturalnym istnieją odpowiedniki spójników KRZ; zbiory sytuacji, w których jest tak, jak głoszą zdanie złożone utworzone za pomocą tych spójników można określić w przedstawiony wyżej sposób. Jednakże z uwagi na występowanie zjawiska nieprzekładalności trudno oczekiwać, aby sumy zbiorów sytuacji przyporządkowanych zdaniom prostym dowolnych dwu różnych języków były identyczne. Ponadto nie sposób z góry określić uniwersum sytuacji. Wszystko to prowadzi do wniosku, iż w przypadku języka KRZ musimy dopuścić istnienie różnych modeli sytuacyjnych; modele te będą się różnić zarówno uniwersami sytuacji, jak i podzbiorami uniwersów sytuacji przyporządkowanymi poszczególnym zmiennym zdaniowym. Pojęcie modelu sytuacyjnego, które tu mamy na myśli można określić następująco (znak $\subseteq$ jest znakiem inkluzji):

DEFINICJA 1: *Modelem sytuacyjnym* języka KRZ nazywamy dowolną parę uporządkowaną $< U, v >$ taką, że U jest niepustym zbiorem, natomiast v jest funkcją określoną na zbiorze $Form_{\mathrm{KRZ}}$ o wartościach w zbiorze 2^U spełniającą następujące warunki:

(1) dla dowolnej zmiennej zdaniowej p_i, $v(p_i) \subseteq U$,

(2) dla dowolnych $\alpha, \beta \in Form_{\mathrm{KRZ}}$:

(i) $v(\neg\alpha) = U - v(\alpha)$.

(ii) $v(\alpha \,\&\, \beta) = v(\alpha) \cap v(\beta)$.

(iii) $v(\alpha \vee \beta) = v(\alpha) \cup v(\beta)$.

(iv) $v(\alpha \rightarrow \beta) = v(\neg\alpha) \cup v(\beta)$.

(v) $v(\alpha \equiv \beta) = (v(\neg\alpha) \cup v(\beta)) \cap (v(\neg\beta) \cup v(\alpha))$.

Gdy $< U, v >$ jest modelem sytuacyjnym języka KRZ, to zbiór U nazywamy *uniwersum* tego modelu.

Proponując powyższą definicję, o uniwersum modelu sytuacyjnego założyliśmy tylko, że jest ono niepustym zbiorem. Intuicyjnie rzecz biorąc, będziemy tu myśleli o uniwersum dowolnego modelu sytuacyjnego jako o zbiorze

[7] Zauważmy, że zgodnie z wyżej powiedzianym zdania te mogą zawierać np. kwantyfikatory.

sytuacji, ponieważ jednak nie określiliśmy, czym są sytuacje, nie możemy też nałożyć żadnego warunku (poza niepustością) na uniwersa modeli sytuacyjnych. Jak zobaczymy, nie jest to zresztą konieczne z punktu widzenia celu tych rozważań. O zbiorze wartości funkcji v dla formuły zdaniowej α możemy z kolei myśleć jako o zbiorze tych wszystkich sytuacji z uniwersum rozważanego modelu, w których jest tak, jak „głosi" formuła α. Zbiór ten może być pusty.

Wprowadźmy teraz pojęcie tautologii sytuacyjnej:

DEFINICJA 2: Formuła zdaniowa α języka KRZ jest *tautologią sytuacyjną* wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego modelu sytuacyjnego $<U, v>$ języka KRZ jest tak, że $v(\alpha) = U$.

Intuicja leżąca u podstaw powyższej definicji jest następująca: formuła α jest tautologią sytuacyjną dokładnie wtedy, gdy w każdej sytuacji jest tak, jak „głosi" formuła α – niezależnie od tego, jaki zbiór sytuacji bierzemy pod uwagę i w jaki sposób poszczególnym zmiennym zdaniowym są przyporządkowane podzbiory tego zbioru, to zbiór sytuacji, w których jest tak, jak „głosi" formuła α jest identyczny ze zbiorem wszystkich branych pod uwagę sytuacji.

Formuły zdaniowe języka KRZ reprezentują zdania języka naturalnego. O każdym zdaniu reprezentowanym przez tautologię sytuacyjną możemy zatem powiedzieć co następuje: w każdej sytuacji z uniwersum sytuacji – niezależnie od tego, czym jest to uniwersum[8] i czym są sytuacje – jest tak, jak głosi to zdanie.

6. Można udowodnić, że klasyczny rachunek zdań jest pełny względem przedstawionej wyżej semantyki, tj. że każda teza aksjomatycznego systemu KRZ jest tautologią sytuacyjną oraz że każda tautologia sytuacyjna jest tezą systemu aksjomatycznego KRZ.

Aksjomatami (przyjmowanej tu wersji) klasycznego rachunku zdań są wszystkie formuły zdaniowe języka KRZ mające postać:

(14) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
(15) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
(16) $(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

Regułami inferencyjnymi są reguła odrywania (RO) oraz reguła zastępowania definicyjnego (ZD) z uwagi na następujące definicje:

(17) $\alpha \vee \beta =_{df} \neg\alpha \rightarrow \beta$

[8] Przypomnijmy, że na uniwersum sytuacji U nałożyliśmy tylko dwa warunki: (1) jest ono niepuste, (2) dla każdego zdania prostego A, zbiór $S(A)$ zawiera się w uniwersum sytuacji.

(18) $\alpha \,\&\, \beta =_{df} \neg(\alpha \rightarrow \neg\beta)$
(19) $\alpha \equiv \beta =_{df} \neg((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg(\beta \rightarrow \alpha))$

Pojęcie dowodu rozumiemy w standardowy sposób; tezą KRZ jest każda formuła zdaniowa języka KRZ posiadająca dowód w oparciu o aksjomaty KRZ.

Mówiąc dalej o modelach sytuacyjnych, będziemy mieli na myśli modele sytuacyjne języka KRZ.

Można łatwo udowodnić:

LEMAT 1: Dla każdego modelu sytuacyjnego $<U, v>$:
(a) $v(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) = U$,
(b) $v((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))) = U$,
(c) $v((\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) = U$.

Tak więc wszystkie aksjomaty KRZ są tautologiami sytuacyjnymi.

LEMAT 2. Jeśli dla każdego modelu sytuacyjnego $<U, v>$, $v(\alpha \rightarrow \beta) = U$ oraz dla każdego modelu sytuacyjnego $<U, v>$, $v(\alpha) = U$, to dla każdego modelu sytuacyjnego $<U, v>$, $v(\beta) = U$.

D o w ó d: Przypuśćmy, że spełnione są założenia lematu oraz że $<U', v'>$ jest modelem sytuacyjnym takim, że $v'(\beta) \neq U'$. Z założenia mamy $v'(\alpha) = U'$ oraz $v'(\alpha \rightarrow \beta) = U'$. Wnosimy stąd, że $(U' - v'(\alpha)) \cup v'(\beta) = U'$. Skoro jednak $v'(\alpha) = U'$, to $v'(\beta) = U'$. Otrzymaliśmy sprzeczność. ■

Zgodnie z Lematem 2 każda formuła zdaniowa powstająca z tautologii sytuacyjnej poprzez zastosowanie reguły odrywania (RO) jest tautologią sytuacyjną.

Można również łatwo udowodnić:

LEMAT 3. Dla każdego modelu sytuacyjnego $<U, v>$:
(a) $v(\alpha \vee \beta) = v(\neg\alpha \rightarrow \beta)$,
(b) $v(\alpha \,\&\, \beta) = v(\neg(\alpha \rightarrow \neg\beta))$,
(c) $v(\alpha \equiv \beta) = v(\neg((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg(\beta \rightarrow \alpha)))$.

Lemat 3 implikuje, że każda formuła zdaniowa powstająca z tautologii sytuacyjnej poprzez zastosowanie reguły zastępowania definicyjnego (ZD) jest tautologią sytuacyjną.

Prawdziwe jest zatem:

TWIERDZENIE 1. Każda teza KRZ jest tautologią sytuacyjną.

Udowodnimy teraz

TWIERDZENIE 2. Każda tautologia sytuacyjna jest tezą KRZ.

D o w ó d: Z twierdzenia o pełności dla KRZ wiadomo, że formuła zdaniowa α jest tezą KRZ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego wartościowania w (tj. dla każdego nieskończonego przeliczalnego ciągu wartości logicznych 1, 0), wartość formuły α przy wartościowaniu w jest równa 1. Pojęcie wartości formuły zdaniowej α przy wartościowaniu w rozumiemy tu w zwykły sposób[9]; wartość formuły zdaniowej α przy wartościowaniu w oznaczamy przez $\alpha\ [w]$. Aby udowodnić, że każda tautologia sytuacyjna jest tezą KRZ, wystarczy zatem pokazać, że dla dowolnej formuły zdaniowej α spełniony jest warunek:

(w) jeśli istnieje wartościowanie w takie, że $\alpha\ [w] = 0$, to istnieje model sytuacyjny $<U, v>$ taki, że $v(\alpha) \neq U$.

Załóżmy, że α jest formułą zdaniową taką, że dla pewnego dowolnego ale ustalonego wartościowania w jest tak, że $\alpha\ [w] = 0$. Dla każdej formuły zdaniowej istnieje inferencyjnie równoważna formuła zdaniowa mająca koniunkcyjną postać normalną. Niech β będzie formułą zdaniową w koniunkcyjnej postaci normalnej inferencyjnie równoważną formule α. Wnosimy stąd, że tezami KRZ są formuły:

(a) $\alpha \rightarrow \beta$
(b) $\beta \rightarrow \alpha$

Formuła β jest w koniunkcyjnej postaci normalnej, tj. ma postać $\gamma_1\ \&\ \gamma_2\ \&\ ...\ \&\ \gamma_k$, gdzie $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_k$ są alternatywami elementarnymi oraz $k \geq 1$. Skoro jednak $\beta \rightarrow \alpha$ jest tezą KRZ, to na mocy twierdzenia o pełności dla KRZ mamy $(\beta \rightarrow \alpha)\ [w] = 1$. Skoro jednak $\alpha\ [w] = 0$, to $\beta\ [w] = 0$, czyli $(\gamma_1\ \&\ \gamma_2\ \&\ ...\ \&\ \gamma_k)\ [w] = 0$. Tak więc wartość co najmniej jednej spośród alternatyw elementarnych $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_k$ przy wartościowaniu w jest równa 0. Niech γ_j $(1 \leq j \leq k)$ będzie alternatywą elementarną taką, że $\gamma_j\ [w] = 0$. Skoro γ_j jest alternatywą elementarną, to γ_j ma postać $\delta_1 \vee \delta_2 \vee ... \vee \delta_m$, gdzie $m \geq 1$ oraz δ_s – dla $1 \leq s \leq m$ – jest bądź zmienną zdaniową, bądź zmienną zdaniową poprzedzoną znakiem negacji. Skoro formuła $\alpha \rightarrow \beta$ jest tezą KRZ, to formuła:

(c) $\alpha \rightarrow \delta_1 \vee \delta_2 \vee ... \vee \delta_m$

jest też tezą KRZ. Jednocześnie mamy $(\delta_1 \vee \delta_2 \vee ... \vee \delta_m)\ [w] = 0$, czyli dla każdego s, gdzie $1 \leq s \leq m$, $\delta_s\ [w] = 0$. Rozważmy teraz model sytuacyjny $<\{1,0\}, v>$, gdzie v spełnia następujący warunek:

[9] Zob. np. Batóg [10], rozdział 1.

(●) dla dowolnej zmiennej zdaniowej p_i, $v(p_i) = \{p_i[w]\}$.

Jest oczywiste, że dla każdego s, gdzie $1 \leq s \leq m$, $v(\delta_s) = \{0\}$. Tak więc $v(\delta_1 \vee \delta_2 \vee \ldots \delta_m) = \{0\}$. Skoro jednak formuła (c) jest tezą KRZ, to na mocy Twierdzenia 1 $v(\alpha \rightarrow \delta_1 \vee \delta_2 \vee \ldots \vee \delta_m) = \{1, 0\}$. Znaczy to, że $(\{1, 0\} - v(\alpha)) \cup \{0\} = \{1, 0\}$. Wnosimy stąd, że $v(\alpha) = \{0\}$ lub $v(\alpha) = \emptyset$. Tak więc $v(\alpha) \neq \{1, 0\}$, co kończy dowód. ■

Wnioskiem z powyższych twierdzeń jest następujące twierdzenie o pełności KRZ względem przedstawionej tu semantyki:

TWIERDZENIE 3. Formuła zdaniowa α języka KRZ jest tezą KRZ wtedy i tylko wtedy, gdy α jest tautologią sytuacyjną.

Ponieważ KRZ jest pełny względem standardowej semantyki, znaczy to, że pojęcia tautologii sytuacyjnej i tautologii KRZ rozumianej w zwykłym sensie tego terminu są równozakresowe. Pojęcia te mają jednak niewątpliwie różną treść.

7. W przeprowadzonych wyżej rozważaniach nie używaliśmy pojęcia prawdy. Było to zamierzone, chociaż nie jest to wyrazem jakiejś szczególnej niechęci piszącego te słowa do tego pojęcia. Idee, których użyliśmy konstruując semantykę dla KRZ, nie były w zasadzie nowe[10], chociaż zapewne pewną nowością jest sposób ich użycia. Intuicja, zgodnie z którą w dowolnej sytuacji

[10] W semantyce Kripkego zmienne zdaniowe przebiegają zbiory światów możliwych, natomiast wartościowania zmiennych zdaniowych są funkcjami przyporządkowującymi każdej zmiennej zdaniowej pewien zbiór światów możliwych. Semantyka ta jest jednak semantyką dla rachunków modalnych. Przenosząc idee semantyki Kripkego na semantykę dla KRZ, można przyjąć, że modelem jest para uporządkowana $<K, s>$, gdzie K jest niepustym zbiorem „możliwych światów", natomiast s jest wartościowaniem zmiennych zdaniowych, tj. funkcją przyporządkowującą każdej zmiennej zdaniowej pewien podzbiór zbioru K. Niech $w \in K$. Pojęcie „w świecie w zachodzi α" (symbolicznie: $w \models \alpha$) można następnie wprowadzić następująco: (a) $w \models p_i$ wtw $w \in s(p_i)$; (b) $w \models \neg\alpha$ wtw nieprawda, że $w \models \alpha$; (c) $w \models \alpha \,\&\, \beta$ wtw $w \models \alpha$ oraz $w \models \beta$; (d) $w \models \alpha \vee \beta$ wtw $w \models \alpha$ lub $w \models \beta$; (e) $w \models \alpha \rightarrow \beta$ wtw $w \models \beta$ lub nieprawda, że $w \models \alpha$; (f) $w \models \alpha \equiv \beta$ wtw $w \models \alpha$ zawsze i tylko, gdy $w \models \beta$. Zbiór wszystkich możliwych światów ze zbioru K, w których zachodzi α możemy teraz zdefiniować jako $\{w \in K: w \models \alpha\}$.

Intuicje łączone z pojęciem sytuacji są jednak różne od intuicji łączonych z pojęciem świata możliwego (zob. Barwise [5]). Światy możliwe są również niekiedy definiowane przy pomocy pojęcia sytuacji (zob. np. Zalta [27], s. 96-101).

Uważny czytelnik z pewnością zauważył też podobieństwo przedstawionej wyżej semantyki z semantyką topologiczną dla intuicjonistycznego rachunku zdań Heytinga zaproponowaną przez Tarskiego (zob. Tarski [25]). Podobieństwo to jest widoczne zwłaszcza wtedy, gdy semantykę tę przedstawimy w sposób nieco odbiegający od jej oryginalnej prezentacji (por. Krajewski [17]). Niech jest tak, jak głoszą zdania będące podstawieniami tez klasycznego rachunku zdań jest jedną z najbardziej podstawowych intuicji, jakie żywimy wobec logiki. Celem tych rozważań było wyrażenie tej intuicji przy pomocy stosunkowo niewielu pojęć pomocniczych posiadających intuicyjne uzasadnienie. Podkreślmy, że intuicję tę wyraziliśmy nie określając bliżej pojęcia sytuacji.[11] Gdy pojęcie sytuacji i/lub pojęcie uniwersum sytuacji są dookreślone w taki czy inny sposób, można argumentować, iż pewne logiki nieklasyczne są – mówiąc ogólnie – adekwatne względem odpowiednich semantyk opartych na intuicjach wiązanych z pojęciem sytuacji[12] lub też że pełnią one rolę ontologii odpowiednich uniwersów sytuacji[13]. W przypadku klasycznego rachunku zdań możemy jednak powiedzieć, że – czymkolwiek są sytuacje – w dowolnej sytuacji jest tak, jak głoszą zdania będące podstawieniami tez tego rachunku. W rękach czytelnika pozostawiamy decyzję, czy świadczy to na niekorzyść klasycznego rachunku zdań, czy też na niekorzyść przedstawionej tu semantyki.

Literatura

[1] Aczel P., *Non-Well Founded Sets*, Center for the Study of Language and Information, Stanford 1988 (CSLI Lecture Notes No. 14).

[2] Barwise J., „AFA and the Unification of Information", w: J. Barwise, *The Situation in Logic*, Center for the Study of Language and Information, Stanford 1989 (CSLI Lecture Notes No. 17), s. 277-283.

[3] Barwise J., „Notes on Branch Points in Situation Theory", w: J. Barwise, *The Situation in Logic*, s. 255-277.

(X, Int) będzie przestrzenią topologiczną (X jest tu niepustym zbiorem, natomiast Int–operacją wnętrza). Rozważmy teraz parę uporządkowaną $<(X, Int), g>$, gdzie g jest funkcją określoną na zbiorze formuł zdaniowych spełniającą następujące warunki: (a) $g(p_i)$ jest zbiorem otwartym przestrzeni (X, Int) dla $i = 1, 2, \ldots$; (b) $g(\neg\alpha) = Int(X - g(\alpha))$; (c) $g(\alpha \,\&\, \beta) = g(\alpha) \cap g(\beta)$; (d) $g(\alpha \vee \beta) = g(\alpha) \cup g(\beta)$; (e) $g(\alpha \to \beta) = Int((X - g(\alpha)) \cup g(\beta))$. Zgodnie z udowodnionym przez Tarskiego twierdzeniem o pełności intuicjonistycznego rachunku zdań Heytinga względem semantyki topologicznej, formuła zdaniowa α jest tezą rachunku intuicjonistycznego wtedy i tylko wtedy, gdy $g(\alpha) = X$ dla dowolnego $<(X, Int), g>$ spełniającego powyższe warunki. W przypadku KRZ możemy powiedzieć – nawiązując do pewnych uwag Tarskiego (zob. Tarski [25], s. 448) – że formuła zdaniowa α jest tezą KRZ wtedy i tylko wtedy, gdy $g(\alpha) = X$ dla dowolnego $<(X, Int), g>$ spełniającego powyższe warunki i takiego, że $Int(Y) = Y$ dla każdego $Y \subseteq X$.

[11] Chociaż pojęcie sytuacji pełni w semantyce sytuacyjnej podstawową rolę, nie doczekało się ono jak dotąd określenia akceptowanego przez większość zainteresowanych. Jest to zresztą przejawem szerszego zjawiska: Jon Barwise w artykule [3] przedstawia 19 pytań, których możliwe układy odpowiedzi konstytuują podstawy różnych paradygmatów badawczych w obrębie omawianego nurtu. Nie znaczy to jednak, że nie podejmowano prób określenia pojęcia sytuacji. W opinii piszącego te słowa na szczególną uwagę zasługują tu prace: Barwise [7], Devlin [13], Seligman [24], Wolniewicz [26], Zalta [27].

[12] Zob. np. Fenstad i in. [14], rozdział IV, czy też Plotkin [22].

[13] Zob. Omyła [18] oraz Omyła [19].

[4] Barwise J., „Scenes and Other Situations"', w: J. Barwise, *The Situation in Logic*, s. 5-36. Opublikowane po raz pierwszy w: *Journal of Philosophy*, Vol. 78, 1981, No. 7, s. 369-397.

[5] Barwise J., „Situations and Small Worlds", w: J. Barwise, *The Situation in Logic*, s. 79-92.

[6] Barwise J., „Situations, Facts, and True Propositions", w: J. Barwise, *The Situation in Logic*, s. 221-254.

[7] Barwise J., „Situations, Sets and the Axiom of Foundation" w: J. Barwise, *The Situation in Logic*, s. 177-200. Opublikowane po raz pierwszy w: *Studies in Logic: Logic Colloquium '84*, Elsevier, Amsterdam 1986.

[8] Barwise, J., Etchemendy, J., „Information, Infons, and Inference", w: R. Cooper, K. Mukai, J. Perry (wyd.), *Situation Theory and its Applications, Volume 1*, Center for the Study of Language and Information, Stanford 1990 (CSLI Lecture Notes No. 22), s. 33-78.

[9] Barwise J., Perry J., *Situations and Attitudes*, The MIT Press, Cambridge, Mass., 1983.

[10] Batóg T., *Podstawy logiki*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 1994.

[11] Biłat A., „Stany rzeczy w semantyce klasycznej" w: J. Perzanowski, A. Pietruszczak, C. Gorzka (red.), *Filozofia/Logika: Filozofia Logiczna 1994*, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń 1995, s. 151-160.

[12] Cooper R., Kamp H., „Negation in situation semantics and discourse representation theory", w: J. Barwise, J. M. Gawron, G. Plotkin, S. Tutiya (wyd.), *Situation Theory and its Applications, Volume 2*, Center for the Study of Language and Information, Stanford 1991 (CSLI Lecture Notes No. 26), s. 312-333.

[13] Devlin K., *Logic and Information*, Cambridge University Press, Cambridge 1991.

[14] Fenstad J. E., Halvorsen P-K., Langholm T., van Benthem J., *Situations, Language and Logic*, D. Reidel, Dordrecht 1987 (Studies in Linguistics and Philosophy, vol. 34).

[15] Grobler A., *Prawda i racjonalność naukowa*, Inter Esse, Kraków 1993.

[16] Horwich P., *Truth*, Basil Blackwell, Oxford 1990.

[17] Krajewski S., „Logika intuicjonistyczna", w: W. Marciszewski (red.), *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny z zastosowaniem do informatyki i lingwistyki*, PWN, Warszawa 1987, s. 360--368.

[18] Omyła M., *Zarys logiki niefregowskiej* , PWN, Warszawa 1986.

[19] Omyła M., „Ontologie sytuacji w języku niefregowskiej logiki zdań", w: J. Pelc (red.), *Prace z pragmatyki, semantyki i metodologii semiotyki*, Ossolineum, Wrocław 1991, s. 117-122.

[20] Paśniczek J., „Filozoficzne znaczenie hiperzbiorów", w: J. Perzanowski, A. Pietruszczak, C. Gorzka (red.), *Filozofia/Logika: Filozofia Logiczna 1994*, s. 49-65.

[21] Perzanowski J., *Logiki modalne a filozofia*, Uniwersytet Jagielloński, Kraków 1989.

[22] Plotkin G., „An Illative Theory of Relations", w: R. Cooper, K. Mukai, J. Perry (wyd.), *Situation Theory and its Applications, Volume 1*, s. 133-146.

[23] Quine W. v. O., *Filozofia logiki*, PWN, Warszawa 1977.

[24] Seligman J., „Physical situations and information flow", w: J. Barwise, J. M. Gawron, G. Plotkin, S. Tutiya (wyd.), *Situation Theory and its Applications, Volume 2*, s. 257-292.

[25] Tarski A., „Sentential Calculus and Topology", w: A. Tarski, *Logic, Semantics, Metamathematics*, Hacket Publishing Company, Indianapolis 1983, s. 421-454. Opublikowane po raz pierwszy w języku niemieckim pod tytułem „Der Aussagenkalkül und die Topologie" w *Fundamenta Mathematicae*, vol. 31, 1938, s. 103-134.

[26] Wolniewicz B., *Ontologia sytuacji*, PWN, Warszawa 1985.

[27] Zalta E.N., „A theory of situations", w: J. Barwise, J. M. Gawron, G. Plotkin, S. Tutiya (wyd.), *Situation Theory and its Applications, Volume 2*, s. 81-111.

Artykuł ten został napisany podczas pobytu autora w Netherlands Institute for Advanced Study in the Humanities and Social Sciences w Wassenaar.